高等代数

（上册）

曹重光　张　龙　唐孝敏　编著

科学出版社

高 等 代 数

(上 册)

曹重光　张　龙　唐孝敏　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是编者在多年教学实践与教学改革的基础上编写而成的. 本书注重概念和理论的导入，结构合理、层次清晰、论证简明，富于直观性和启发性. 本书通过设置典型例题来阐明高等代数的思想与方法，配备了层次丰富的练习题和研讨题，有助于学生抽象思维能力和代数学能力的培养.

本书可供高等院校数学类各专业学生用作教材，也可供相关专业学生及数学教学和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数. 上册/曹重光, 张龙, 唐孝敏编著. —北京: 科学出版社, 2018.11
ISBN 978-7-03-059309-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… ②张… ③唐… Ⅲ.①高等代数–高等学校–教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 251269 号

责任编辑: 王 静 / 责任校对: 杨聪敏
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 11 月第一次印刷 印张: 14 1/2
字数: 292 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

本书按国家颁布的现行教学大纲及有关要求编写, 是供综合性大学、师范类大学数学类各本科专业使用的高等代数教材, 也可供理工类其他本科专业作为参考书.

高等代数是数学类各专业的一门重要基础课程, 也是代数课的入门课程. 本书的总体编写原则是, 上册力求直观化、形象化, 下册抽象化, 采用逐步过渡的方式.

本书重视对数学思想的渗透以及对数学方法的介绍和应用, 注重挖掘高等代数各部分内容之间的联系, 并重视初等变换方法及矩阵分块技术的运用和训练. 同时, 本书还对高等代数中一些重要定理给出了有别于现行诸教材的证明方法. 例如行列式乘法定理、矩阵等价分解的唯一性定理、齐次线性方程组基础解系定理、实对称阵的正交对角化定理、实二次型的惯性定理及哈密顿–凯莱定理等.

本书的习题很多, 每节后面都附有练习题, 每章后都附有三种层次的习题, 其中包含了很多经典题目. 完成练习题和 A 类题是基本要求, 其他题目供学有余力的学生继续学习或考研、参加数学竞赛等使用. 本书从培养学生能力的角度出发, 为提高学生提出问题和解决问题的能力, 在每一章都单设一节问题与研讨, 设置了一些开放性问题, 加强学生这方面能力的培养, 也为教师设计习题课提供了一些材料, 可以参考选用. 本书正文部分中带 * 的问题可根据专业特点、教学层次和学生的个性需求自由选用.

本书是编者在多年教学实践与教学改革的基础上编写而成的. 上册已在黑龙江大学数学科学学院本科生中讲授过二十多次, 下册已讲授两次, 并在教学实践中作了多次修改. 本书由编写小组成员曹重光、唐孝敏、生玉秋、张龙、远继霞共同完成, 其中上册由曹重光、张龙、唐孝敏编写, 下册由曹重光、生玉秋、远继霞编写. 全书在 5 人小组讨论后由曹重光、生玉秋统稿. 本书的出版得到了黑龙江大学数学科学学院领导和广大同仁的支持和帮助, 张隽、闫盼盼和付丽在打印方面给予了编者极大的帮助, 在此一并致谢. 由于编者水平有限, 不足之处恳请读者批评指正.

编　者

2018 年 2 月

目　　录

第 1 章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具, 它不仅是线性代数必不可少的内容, 而且在其他数学领域以及数学以外的许多领域都有着重要的意义和广泛的应用. 本章介绍行列式的基本性质和计算.

1.1 预 备 知 识

本节所叙述的几个预备知识对本章, 乃至全书来说都是基本的知识.

1.1.1 数域

讨论某些代数问题时常常在一个确定的“数的范围”内来进行. 例如, 求一个实系数一元二次方程的实根、将一个有理系数多项式在有理数或实数范围内分解、求一个整系数方程的整数根等. 代数问题常常关心数的集合在某些运算下的封闭性质, 为此引出如下定义.

定义 1.1 设 $\mathbb{F}$ 是至少含有两个不同数的数集. 如果对 $\mathbb{F}$ 中的任意数 a 和 b 来说, $a \pm b$, ab 及 $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ 总在 $\mathbb{F}$ 中, 则称 $\mathbb{F}$ 是一个**数域**.

定义 1.1 其实就是说, 数集 $\mathbb{F}$ 对于加、减、乘和除四种运算是封闭的. 如果只考虑加、减和乘三种运算的封闭性, 还可以定义数环. 按上面定义来衡量, 容易看出全体复数构成**复数域** $\mathbb{C}$、全体实数构成**实数域** $\mathbb{R}$、全体有理数构成**有理数域** $\mathbb{Q}$、全体整数不构成数域 (对除法不封闭), 但构成数环, 称为**整数环** $\mathbb{Z}$, 自然数集连数环也不是. 除了上面列举的通常数域外, 我们可以举出一些新的数域.

例 1.1 设 $\mathbb{F} = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$, 证明 $\mathbb{F}$ 是一个数域.

解 $\mathbb{F}$ 中显然含有两个元素, 例如 1 及 0.

任取 $a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{F}$, 则

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2},$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2},$$

故由 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ 可知, $(a_1+b_1\sqrt{2}) \pm (a_2+b_2\sqrt{2})$, $(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2}) \in \mathbb{F}$.

当 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ 时, 由 $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ 知 $a_2 - b_2\sqrt{2} \neq 0$, 故由乘法封闭性可得

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{a_2^2 - 2b_2^2} \in \mathbb{F}.$$

由数域定义知 $\mathbb{F}$ 是一个数域. □

命题 1.1　任何数域 $\mathbb{F}$ 都包含有理数域.

证明　由数域 $\mathbb{F}$ 的定义可知, $\mathbb{F}$ 中含两个不同数, 故存在 $a \in \mathbb{F}$, 使得 $a \neq 0$, 从而由 $\frac{a}{a}=1$, $a-a=0$ 可知, $0, 1 \in \mathbb{F}$.

另一方面, 对任意的正整数 n, 由

$$1+1=2,\ 1+2=3,\ \cdots,\ 1+(n-1)=n$$

及加法封闭性可知, $n \in \mathbb{F}$, 再由减法封闭性可知, $0-n=-n \in \mathbb{F}$, 从而 $\mathbb{F}$ 含所有整数, 即 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{F}$. 再由除法封闭性可知, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$. □

1.1.2　和号

对于数域 $\mathbb{F}$ 中的任意 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 为了将这些数的连加法缩写, 常使用和号, 即用 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 表示

$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

使用和号可以使某些表达式更为简洁. 例如, 等比数列的前 n 项和

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

可以记成 $\sum\limits_{k=1}^{n} aq^{k-1}$, 二项式定理的展开公式可记为

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i x^{n-i} y^i.$$

反过来, 看到用和号写出的式子, 应正确理解其含义. 例如, $\sum\limits_{k=1}^{n} 2(k^2+1)$ 表示

$$2(1^2+1)+2(2^2+1)+\cdots+2(n^2+1),$$

$\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i-1} i k^2$ 则表示

$$k^2-2k^2+3k^2-4k^2+\cdots+(-1)^{k-1} k k^2.$$

由和号的意义容易得出下面的公式:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(c a_i)=c \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i+\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b)=nb+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$.

公式 (4) 的左端实际是 $\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$, 即

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\cdots+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn},$$

而右端是 $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$, 即

$$a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2}+\cdots+a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn},$$

容易看出两端相等.

在公式 (4) 中, 实际上出现了两个变动标号 i 和 j, 还有更复杂的情况. 例如, 我们用 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 表示六项和, 每一项由 $j_1j_2j_3$ 取 1, 2, 3 的一个全排列而定, 于是这个和是

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例 1.2 设 $f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+k+1)$, 求表达式 $f(n)$.

解 由和运算公式 (2) 得

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{5}{3}n.\end{aligned}$$

□

1.1.3 排列

由 1, 2, $\cdots$, n 中取不同数组成的 n 元有序数组称为一个 n **级排列**. 在中学曾研究过排列的种数公式, 现在讨论排列的奇偶性.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中, 如果 $i<k$ 且 $j_i>j_k$, 则称 j_ij_k 构成排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的一个**逆序**, 逆序的总个数称为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的**逆序数**, 记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如,

$$\tau(12\cdots n)=0,\quad \tau(3214)=3,\quad \tau(4321)=6.$$

定义 1.3 对于给定的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$, 当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数时, 称该排列为**奇排列**, 当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶数时, 称该排列为**偶排列**.

例如, $12\cdots n$ 是偶排列, 3214 是奇排列, 4321 又是偶排列.

定义 1.4　在一个 n 级排列中将某两个数码的位置交换, 其余数码不动, 称对这个排列进行了一次**对换**.

例如, 排列 32154 经数码 2 与 5 的对换变成了排列 35124.

命题 1.2　对一个排列进行一次对换, 则奇排列变成了偶排列, 偶排列变成了奇排列, 即对换改变排列的奇偶性.

证明　首先考虑相邻数码对换的情况. 设排列写成

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_k\, j_{k+1}\, j_{k+2} \cdots j_m,$$

调换 j_k 与 j_{k+1} 的位置后, 得到新排列为

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+1}\, j_k\, j_{k+2} \cdots j_m.$$

注意在计算这两个排列的逆序数时, j_k 与 j_{k+1} 以外的数引起的逆序个数没有改变. 当 $j_k < j_{k+1}$ 时, j_k 与 j_{k+1} 所引起的逆序个数 (新排列比原排列) 增加 1 个, 即

$$\tau(j_1 \cdots j_{k-1}\, j_k\, j_{k+1}\, j_{k+2} \cdots j_m) = \tau(j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+1}\, j_k\, j_{k+2} \cdots j_m) - 1;$$

当 $j_k > j_{k+1}$ 时, j_k 与 j_{k+1} 所引起逆序个数 (新排列比原排列) 减少 1 个, 即

$$\tau(j_1 \cdots j_{k-1}\, j_k\, j_{k+1}\, j_{k+2} \cdots j_m) = \tau(j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+1}\, j_k\, j_{k+2} \cdots j_m) + 1.$$

因此, 在调换 j_k 与 j_{k+1} 的位置后排列的奇偶性改变了.

下面考虑一般情况. 设排列写成

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_k\, j_{k+1} \cdots j_{k+l-1}\, j_{k+l}\, j_{k+l+1} \cdots j_m,$$

调换 j_k 与 j_{k+l} 的位置后, 得到新排列为

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+l}\, j_{k+1} \cdots j_{k+l-1}\, j_k\, j_{k+l+1} \cdots j_m.$$

这个过程可以认为是下列连续施行的对换的结果: 先由 $l-1$ 个相邻对换使其变成

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+1} \cdots j_{k+l-1}\, j_k\, j_{k+l}\, j_{k+l+1} \cdots j_m,$$

再经 l 个相邻对换使其变成

$$j_1 \cdots j_{k-1}\, j_{k+l}\, j_{k+1} \cdots j_{k+l-1}\, j_k\, j_{k+l+1} \cdots j_m,$$

这里一共进行了 $2l-1$ 次相邻对换. 由上述分析可知, 新排列的奇偶性改变了. □

命题 1.3 任意一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 可经有限次对换变为 $1\,2 \cdots n$, 并且所使用对换次数的奇偶性与排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性一致.

证明 如果 $j_1 \neq 1$, 可将 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 经一次对换变为 $1 i_2 \cdots i_n$. 如果 $i_2 \neq 2$, 又可经一次对换变为 $12 k_3 \cdots k_n$, 如此继续, 可经有限次对换将原排列变为 $12 \cdots n$. 因为 $12 \cdots n$ 是偶排列, 由命题 1.2 可知, 本命题后一结论成立. □

练 习 1.1

1.1.1 指出下列数集哪些构成数域, 哪些不构成数域, 并说明理由.

(1) $\{a - b\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$; (2) $\{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$;

(3) $\{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}$; (4) $\{a(\sqrt{2}+1) \mid a \in \mathbb{Q}\}$;

(5) $\{a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{R}\}$;

(6) $\left\{ \dfrac{a_0\pi^n + a_1\pi^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0\pi^m + b_1\pi^{m-1} + \cdots + b_m} \;\middle|\; \begin{array}{l} m,\ n \text{ 为任意非负整数},\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{Z}, \\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m \in \mathbb{Z},\ \text{且}\ b_0 \neq 0 \end{array} \right\}$.

1.1.2 数域 $\mathbb{F}$ 不是复数域 $\mathbb{C}$ 时是否全由实数构成?

1.1.3 用和号表示 $(x-y)^n$ 的展开式.

1.1.4 将 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$ 用和号表示.

1.1.5 设 $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k^2 + k + 1)$, 求 $f(n)$ 的表达式.

1.1.6 $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ 对吗? 为什么?

1.1.7 $\sum\limits_{i=1}^{m} \left[a_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} c_j\right)\right] = \sum\limits_{j=1}^{n} \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_{ij}\right) c_j\right]$ 对吗? 为什么?

1.1.8 确定下列排列的奇偶性:

(1) 362514; (2) 253461;

(3) 436125; (4) $n(n-1)\cdots 21$;

(5) $23 \cdots n1$.

1.1.9 用数学归纳法证明命题 1.3.

1.1.10 四级排列有多少个? 其中奇排列及偶排列各多少个?

1.2 行列式的定义

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 用加减消元法可求其解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

如果引进记号 (称为二阶行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

上述方程组当 $D\neq 0$ 时解可写成

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

类似地, 对三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

引进记号 (称为三阶行列式)

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}\tag{1.2}$$

当 $D\neq 0$ 时, 上面三元一次方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

由 (1.2) 式可以看出, 三阶行列式是 $3!=6$ 项的和, 每一项都是取自不同行不同列的三个元素先作乘积, 然后放上适当的正负号. 任意项可记为 $\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 其中 $j_1j_2j_3$ 是任意一个三级排列, 前面的符号随 $j_1j_2j_3$ 这个排列的奇偶性而定, 当其为偶排列时取正号, 当其为奇排列时取负号. 二阶行列式也有类似的规律. 现在将二、三阶行列式这种构造规律加以推广, 定义 n 阶行列式.

定义 1.5 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $a_{ij} \in \mathbb{F}\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为 n **阶行列式**, 其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

这个定义说明 n 阶行列式恰为 $n!$ 项的和, 每一项都是由来自不同行不同列的 n 个元素先作乘积再放上适当的正负号构成的, 即当行标排列为 $12 \cdots n$ 时, 如果列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列则取正号, 如果列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列则取负号.

例 1.3 计算如下的**上三角行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 上述行列式按定义展开的一般项是

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{n-1 j_{n-1}} a_{nj_n},$$

容易看出, 当 $j_n \neq n$ 时, $a_{nj_n} = 0$, 故展开式中只剩下 $j_n = n$ 的项. 再看 j_{n-1}, 当 $j_{n-1} \neq n-1$ 时, 项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{n-1 j_{n-1}} a_{nn}$$

必为零. 如此继续, 观察 $j_{n-2}, j_{n-3}, \cdots, j_1$ 可知, D 的展开式中只剩一项

$$(-1)^{\tau(12 \cdots n)} \cdot a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

故

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \qquad \square$$

如上, $a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}$ 所占的对角线称为**主对角线**, 简称**对角线**. 上例说明上三角行列式等于对角线上元素的积. 同样, **下三角行列式**以及**对角行列式** (对角线以外元素都是零) 的值都等于对角线上元素的积.

例 1.4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (n \geqslant 2).$$

解　由行列式的定义, 得

$$D=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}\cdot n!=(-1)^{n-1}n!.$$ □

练　习　1.2

1.2.1　在五阶行列式中, $a_{42}a_{13}a_{35}a_{54}a_{21}$ 及 $a_{25}a_{31}a_{14}a_{52}a_{43}$ 前面应带什么符号?

1.2.2　写出四阶行列式中含因子 a_{32} 且带负号的项.

1.2.3　一个行列式第一行与第一列以外的元素都是 0, 这个行列式一定为 0 吗?

1.2.4　计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2)$;

(6) $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2)$;

(7) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix}$;　　(8) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.3　行列式的性质

单纯用行列式定义来计算行列式显然是比较麻烦的, 本节研究行列式的一些基本性质, 它将对行列式的计算和理论的进一步展开起重要作用.

性质 1.1 行列式中某一行的公因子可以提出去, 或者说用数 k 乘行列式的某一行, 其余行不动, 所得行列式为原行列式的 k 倍, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式定义可知, 左端行列式按定义展开的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n},$$

从而

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$ □

性质 1.2 如果行列式的第 i 行所有元素都是两个数的和的形式, 则这个行列式等于两个行列式的和, 这两个行列式分别用两个加数之一作第 i 行, 其余各行都与原来行列式的各行相同, 即

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

证明 由行列式定义, 得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&=\text{右端}.
\end{aligned}
$$

□

容易看出, 这个性质可推广到一行中每个元素都是 m 项的和的情形.

性质 1.3　如果行列式中有两行对应元素完全相同, 则行列式为零.

证明　设行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{vmatrix}
$$

中第 i 行与第 k 行对应元素完全相同, 即 $a_{ij}=a_{kj}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则在 D 的展开式中, 项

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}\\
=&(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

和项

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}\\
=&(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

成对出现, 且其和显然为零, 故 $D=0$. □

由性质 1.1 和性质 1.3 立即推得如下性质.

性质 1.4　如果行列式的某两行对应元素成比例, 则这个行列式等于零.

性质 1.5　把行列式的某一行的元素乘以同一数 k 后加到另一行的对应元素上, 其余行不动, 则行列式的值不变, 即

$$
\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{vmatrix}.
$$

证明　由性质 1.2, 左端行列式可按第 j 行劈开写成两个行列式之和, 其一为右端行列式; 其二为第 i 行与第 j 行成比例的情形, 由性质 1.4 可知这个行列式为零, 故性质 1.5 成立. □

性质 1.6　交换行列式某两个不同行, 则所得行列式与原行列式反号.