21世纪大学公共数学系列教材

微积分学习指导

严守权 编著

Math

中国人民大学出版社

扫码下资源

21世纪大学公共数学系列教材

微积分学习指导

严守权　编著

Math

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导/严守权编著. —北京：中国人民大学出版社，2019.7
21 世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-27067-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①严… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 131390 号

21 世纪大学公共数学系列教材
微积分学习指导
严守权　编著
Weijifen Xuexi Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2019 年 7 月第 1 版
印　　张	24.5	**印　　次**	2019 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	577 000	**定　　价**	52.00 元

总　序

进入21世纪以来，现代科学技术大潮汹涌澎湃，深刻地影响着人类社会的进步和发展．新的时代呼唤新的高素质的人才，呼唤教育有更多的创新和更大的发展．

在诸多教育中，数学教育具有特殊地位和作用．数学作为科学的“皇后”、一个具有丰富内容的知识体系，在其发展过程中，与其他学科交叉渗透，广泛应用，已成为科学发展的强有力的工具和原动力．数学以其特有的哲学属性，又是人们的思维训练的体操．正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中所指出的，“数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断、运用符号等等．它们是普遍适用并且强有力的思考方式．运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法．数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界．”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用．”数学作为一种文化、一门艺术，同样可以为人们提供美的熏陶．多年来，我国高校的数学教育为了适应新形势，已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科，课程建设和教学改革广泛而深入，硕果累累．

教材建设是教学改革的核心，为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设和发展，我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了“21世纪大学公共数学系列教材”．系列教材的宗旨是，面向世界，面向未来，面向现代化，总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果，更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能．

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多个学科，在总体把握数学教育的功能定位的基础上，充分考虑不同学科的特点和需求，区分出不同层次和侧重点，并参照相关专业通行的教学大纲编写．例如，理、工学科的公共数学课同时是专业基础课，更要注重课程的工具功能，更强调与后续课程的有机衔接，而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能．

系列教材力求将传统和创新相结合. 相对而言，公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系，具有简洁、严谨和逻辑性强的特点. 历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材. 我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时，注意加入新的因素，主要目的是：使内容更能适应各个学科发展和创新的需要；使结构更加优化、更便于施教；使形式更为多样化、立体化，使教学手段更为丰富.

我们深知，一部好的数学教材不仅需要对数学学科的深刻理解，而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼，尤其是需要作者的专业水准和敬业精神. 我们有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作，这是难能可贵的，也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证.

前言

本书是与21世纪大学公共数学系列教材中的《微积分》(严守权编著)配套的学习辅导书.

21世纪大学公共数学系列教材中的《微积分》是根据教育部教学指导委员会颁布的经济和管理类微积分教学大纲(修改稿)编写的教材. 本书作为该教材的配套辅导书,紧扣教材编写大纲,围绕基本概念、基本方法和基本计算,精心组织典型例题和习题,力求在帮助读者同步学习或期末复习过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能.

本书每章由五部分内容组成:

1. 知识结构:归纳总结本章知识点的联系与逻辑结构. 知识结构图列于每章之首,便于读者了解全章概貌,也更宜于在精读全章后再仔细回顾和品味,这将有助于读者达到我国著名数学家、教育家华罗庚先生倡导的“从厚到薄”的治学境界.

2. 内容提要:列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,增强读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性的错误. 学习内容提要后,读者即可直接阅读本书其他内容.

3. 重点与要求:说明本章学习中应注意的重点、难点,明确学习要求.

4. 例题解析:根据各章的知识点和问题类型,以“助学”为原则,以解读教材中基本知识点为基础,采取从易到难、循序渐进、点面结合、前后联系的方法,精选典型例题,并通过各种典型例题的详尽分析,巩固和加深读者对基本概念的理解,增强各知识点间的相互联系、扩展和活跃解题思路,提高读者综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力. 作为教材习题类型的补充,典型例题采用的形式有:(1) 填空题(以基本计算为主),(2) 选择题(四选一,以基本概念为主),(3) 解答题(以概念性的计算题、综合题为主,还配备了一定数量的证明题).

5. 综合练习:为了使读者获得更多的解题能力的训练,也为了弥补教材中习题数量及广度和深度上的不足,本书每章都以常见的试题形式,选编了一定数量的与“例题解析”搭配的题目,供读者练习.

每章最后提供了综合练习的参考答案，其中大多数习题还提供了提示或解题思路.

此外，在本书的最后，我们将教材中的全部习题以及本书各章的综合练习作了解答，以帮助读者解决在课程学习中遇到的困难.

“解题可以认为是人最富有特征的活动……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能靠模仿与实践才能学会……如果你想从解题中得到最大的收获，就应该在新做的题目中找到它的特征，那些特征在求解其他问题时能起到指导作用. 一种解题方法，若是经过你自己努力得到的，或是从别人那里学来的或听来的，只要经过自己的体验，那么对你来讲，它就是一种楷模，碰到类似的问题时，就成为你仿照的模型.”这是著名数学家、教育家乔治·波利亚（George Polya）的一段名言，在这里和本书一起奉献给读者，引领读者到数学的海洋中去模仿，去实践，去体验.

由于编著者水平所限，错误和不妥之处在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编著者

2019 年 3 月

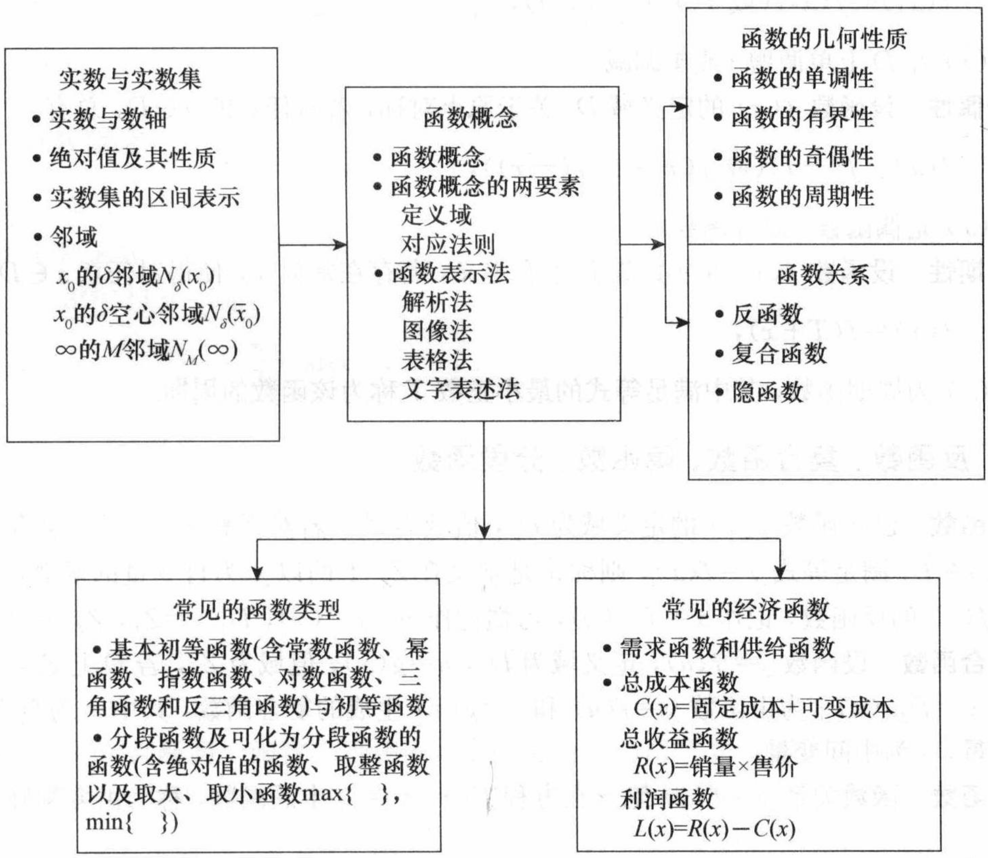
世纪 大学公共数学系列教材

目　录

第 1 章

函　数

一、知识结构


实数与实数集
• 实数与数轴
• 绝对值及其性质
• 实数集的区间表示
• 邻域
x_0的δ邻域$N_\delta(x_0)$
x_0的δ空心邻域$N_\delta(\bar{x}_0)$
∞的M邻域$N_M(\infty)$
函数概念
• 函数概念
• 函数概念的两要素
定义域
对应法则
• 函数表示法
解析法
图像法
表格法
文字表述法
函数的几何性质
• 函数的单调性
• 函数的有界性
• 函数的奇偶性
• 函数的周期性
函数关系
• 反函数
• 复合函数
• 隐函数
常见的函数类型
• 基本初等函数(含常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)与初等函数
• 分段函数及可化为分段函数的函数(含绝对值的函数、取整函数以及取大、取小函数max{　}, min{　})
常见的经济函数
• 需求函数和供给函数
• 总成本函数
$C(x)$=固定成本+可变成本
总收益函数
$R(x)$=销量×售价
利润函数
$L(x)=R(x)-C(x)$

二、内容提要

1. 函数概念

设有两个变量 x，y 属于一个非空集合 D，如果存在一个对应法则 f，使得对于每个 $x\in D$，依法则必存在唯一的实数 y 与之对应，则称对应法则 $f(x)$ 为定义在实数集 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 为因变量，D 为定义域，记作 D_f，函数所有取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数表示法：解析法（即公式法）；列表法；图像法；文字表述法.

2. 函数的几何性质

有界性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若存在正数 M，使得对任意 $x\in D$，总有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

单调性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若对任意 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时总有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上单调增（或单调减）.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x)(\text{或 } f(x)=-f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 是偶函数（或奇函数）.

周期性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若存在常数 T，使得对任意 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(T+x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，其中满足等式的最小正数 T 称为该函数的周期.

3. 反函数、复合函数、隐函数、分段函数

反函数 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f，若对任意的 $y\in Z_f$，必存在唯一的实数 $x\in D_f$ 满足等式 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 Z_f 上的以 y 为自变量的函数，并称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯记作 $y=f^{-1}(x)$，$D_{f^{-1}}=Z_f$，$Z_{f^{-1}}=D_f$.

复合函数 设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_f，$u=g(x)$，值域为 Z_g，若 $D_f\cup Z_g\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 生成的复合函数，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

隐函数 函数关系 $y=f(x)$ 隐含在方程 $F(x, y)=0$ 中的函数，称为由方程确定的隐函数.

分段函数 函数关系用解析法表示时，两个或两个以上解析式表示的函数，称为分段

函数. 含绝对值的函数或取整函数[.]或取大、取小函数 max{ }，min{ }均可化为分段函数.

4. 初等函数和经济函数

基本初等函数 即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

初等函数 从基本初等函数出发，经过有限次四则运算或有限次复合并由一个解析式表示的函数.

经济函数 需求函数、供给函数、总成本函数、总收益函数、总利润函数.

三、重点与要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法. 了解需求函数、供给函数、总成本函数、总收益函数、总利润函数等经济函数及其结构特点，会建立简单应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数与隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

四、例题解析

1. 函数概念

[**例 1**] 单项选择题

(1) 下列函数对中两函数不相等的是(   ).

A. $y=3^{\log_3 x}$ 与 $y=\log_3 3^x$

B. $y=\arcsin x$ 与 $y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$

C. $y=1-\sqrt{x}$与 $x=1-\sqrt{y}$

D. $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$与 $y=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{1-x}$

(2) 设函数 $f(x)=\frac{x^2+2kx}{kx^2+2kx+3}$的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，则 k 的值域为(   ).

A. $(0, 3)$　　B. $[0, 3)$

C. $(3, +\infty)$　　D. $(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$

答 (1) A (2) B

解析 (1) 判断两个函数是否相等，依据是函数的两个要素即定义域和对应法则是否相同. 选项(A)中两函数的定义域不同，故不相等. 选项(B)中，两函数的定义域均为 $[-1, 1]$，且同在值域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有 $\sin(\arcsin x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=$

x，从而有 $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$，故函数相等. 选项(C)中，虽然函数符号不同，但两函数定义域都为 $[0, +\infty)$，对定义域内每个取值，均对应有相同的函数值，因此，它们表示同一个函数关系. 选项(D)中，在同一定义域内，相互之间可经恒等运算得到. 综上分析，本题应选(A).

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域即为保证函数解析式有意义的自变量 x 的取值范围. 依题设，要求对任意 x 的取值，总有 $kx^2+2kx+3\neq 0$，即方程 $kx^2+2kx+3=0$ 无实根，也即 $\Delta=4k^2-4\times 3\times k<0$ 或 $k=0$，解得 $0\leqslant k<3$，故取(B).

[例 2] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2]$，求函数 $f(x)f(1-x)+f(x^2)$ 的定义域.

分析 由若干函数的和、差及乘的运算生成的函数的定义域为各自函数定义域的交集，由函数 $f(x)$，$g(x)$ 复合生成的函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $f(x)$ 的定义域和 $g(x)$ 的值域的交集.

解 由

$$\begin{cases}0<x\leqslant 2\\ 0<1-x\leqslant 2,\\ 0<x^2\leqslant 2\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}0<x\leqslant 2\\ -1\leqslant x<1\\ 0<x\leqslant\sqrt{2}\text{ 或 }-\sqrt{2}\leqslant x<0\end{cases},$$

解得定义域为 $(0, 1)$.

[例 3] 求函数 $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x-3}$ 的定义域和值域.

分析 反三角函数 $\arccos u$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$，值域为 $[0, \pi]$，又在反函数存在，即 $|u|\leqslant 1$，$\arccos u\in[0, \pi]$ 的条件下，函数的值域即为其反函数的定义域.

解 由 $\left|\frac{2}{x-3}\right|\leqslant 1$ 且 $x-3\neq 0$，即 $2\leqslant|x-3|$，解得所求定义域为 $(-\infty, 1]\cup[5, +\infty)$.

又由 $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x-3}$ 反解得其反函数为 $x=3+\frac{2}{\cos 2y}$，其定义域为 $y\neq\frac{1}{2}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，同时有 $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，综上讨论，得所求值域为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

小结 函数是通过法则确定的由定义域到值域的一种一一对应关系、因果关系或映射关系. 对应法则是函数关系的具体体现，定义域是函数关系成立的前提，在定义域和对应法则确定的情况下，函数值域随之确定. 因此，定义域和对应法则是函数概念中最重要的两个基本要素. 对应法则是单值对应法则，有多种表达方式，可用不同符号表示，如 $y=x^2$，$s=t^2$，$u=v^2$ 均表示同一个函数关系. 研究函数关系必须在定义域范围内进行. 因此，求函数定义域是一个基本运算. 对于一个简单的函数，确定其定义域的基本原则是：分式分母非零，偶次根式下解析式非负，对数的真数和指数为实数的幂函数的底数恒正，等等. 由若干函数的四则运算生成的函数的定义域为各运算函数定义域的交集(分母非零). 由函数 $f(x)$，$g(x)$ 复合生成的函数 $f[g(x)]$ 的定义域则为 $f(x)$ 的定义域和 $g(x)$ 的值域的交集. 分段函数的定义域则为各分段区间的并集. 另外，在存在反函数的情况下，函数的定义域和值域也可由其反函数的值域和定义域表示. 由函数自身的数学含义确定的定义域称为自然定义域，在实际应用问题中还应根据题意确定特定的定义域.

2. 函数的几何特性

［例 1］填空题

(1) 函数 $y=\operatorname{arccot}(x-1)^2$ 的单调增区间为________.

(2) 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-3x$，则 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=$________.

(3) 设函数 $f(x)=f(x+2)$，且当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=6x-x^3$，则当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=$________.

答 (1) $(-\infty, 0)$. (2) $f(x)=x^2+3x$. (3) $f(x)=-x^3-6x^2-6x+4$.

解析 (1) 函数 $y=\operatorname{arccot}(x-1)^2$ 由 $y=\operatorname{arccot}u$ 与 $u=(x-1)^2$ 复合而成，其中函数 $y=\operatorname{arccot}u$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减，$u=(x-1)^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减，两个同在单调减区间内复合的函数单调增，故 $y=\operatorname{arccot}(x-1)^2$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$.

(2) 当 $x\leqslant 0$ 时，同时有 $-x\geqslant 0$，于是，依题设 $f(x)=f(-x)=(-x)^2-3(-x)=x^2+3x$.

(3) 依题设，$f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$0<x+2\leqslant 2$，于是 $f(x)=f(x+2)=6(x+2)-(x+2)^3=-x^3-6x^2-6x+4$.

［例 2］单项选择题

(1) 设函数 $y=\log_a x$ 在区间 $(1, a)$ 内有定义，则（　　）.

A. $f[f(x)]<f(x^2)<f^2(x)$　　B. $f[f(x)]<f^2(x)<f(x^2)$

C. $f(x^2)<f^2(x)<f[f(x)]$　　D. $f[f(x)]<f^2(x)<f(x^2)$

(2) 下列函数中为无界函数的是（　　）.

A. $y=\arctan e^{x^2}$　　B. $y=\dfrac{4x}{16+x^2}$

C. $y=\lg(\sin x)$　　D. $y=\sqrt{-4x-x^2}$

(3) 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x)>0$，单调增，又设 $F(x)=3-f^2(x)$，则 $F(x)$（　　）.

A. 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 内单调增　　B. 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 内单调减

C. 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 内非单调　　D. 为奇函数，在 $(-\infty, 0)$ 内单调减

答 (1) B. (2) C. (3) A.

解析 (1) 依题设，$a>1$，$f(x)$ 在 $(1, a)$ 内单调增，于是有

$$0=f(1)<f(x)=\log_a x<f(a)=1<x^2,$$

从而有 $f[f(x)]<f(1)=0<f^2(x)<f(x)<2f(x)=f(x^2)$，
故选择 B.

(2) 选项 A 中函数由有界函数 $y=\arctan u$ 与 $u=e^{x^2}$ 复合生成，必为有界函数. 选项 B 中，由 $(4-|x|)^2=16+x^2-8|x|\geqslant 0$，有 $\left|\dfrac{8x}{16+x^2}\right|\leqslant 1$，知 $y=\dfrac{4x}{16+x^2}$ 为有界函数. 选项 C 中，$y=\lg u$ 为无界函数，且函数 $u=\sin x$ 的取值点 $\sin 0=0$ 为其无界点，故 $y=\lg(\sin x)$ 为无界函数. 选项 D 中，函数曲线夹在直线 $y=0$ 和 $y=4$ 之间，必为有界函数. 综上讨论，本题应选 C.

(3) 容易验证 $F(x)=F(-x)$，$F(x)$ 为偶函数，由奇函数 $f(x)$ 的对称性，在 $(-\infty,0)$内 $f(x)<0$，单调增，从而有$|f(x)|$单调减，即有 $f^2(x)$ 单调减，于是 $F(x)=3-f^2(x)$ 单调增，故选择 A.

[例 3] 判断函数 $f(x)=\sin\sqrt{2}x+\cos\sqrt{3}x$ 是否为周期函数，并证明你的结论.

分析 两个周期函数的和是否仍为周期函数，关键是看两函数的周期是否有公倍数.

解 函数 $f(x)$ 不是周期函数. 若不然，设 $f(x)$ 为周期为 T 的周期函数，则 T 是$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$和$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$的公倍数，即 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}m$，$T=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}n(m,n=1,2,\cdots)$，于是有

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{\sqrt{2}T}{2\pi}\right)\Big/\left(\frac{\sqrt{3}T}{2\pi}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

从而有理数变为一个无理数，矛盾. 故 $f(x)$ 不是周期函数.

小结 函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性都是函数研究的重要特征之一，具有十分清晰的直观背景. 在讨论相关问题时，首先要掌握其定义式或判别式，同时要了解这些性质在函数的运算或复合过程中发生的变化，并能作简单推断. 如单调增（减）函数的复合或相加仍为单调增（减）函数，两个单调增（减）函数的乘积未必单调；偶函数与偶（奇）函数的复合必为偶函数，奇函数的复合必为奇函数，奇函数与奇函数的乘积为偶函数，奇函数与偶函数的乘积为奇函数；有界函数的和、差、积仍为有界函数，有界函数$f(x)$与其他函数 $\varphi(x)$ 的复合 $f[\varphi(x)]$ 仍为有界函数；其他函数 $f(x)$ 与周期函数 $g(x)$ 的复合 $f[g(x)]$ 仍为周期函数等.

要特别强调的是，利用直观背景讨论函数的性质是一种简单有效的方法和手段，在微积分中有重要应用，如偶函数在 y 轴两侧的单调性相异，奇函数在 y 轴两侧的单调性相同等，应当注意掌握.

掌握一些常见的有界函数，如

$$|\sin x|\leqslant 1;\ |\cos x|\leqslant 1;\ |\arctan x|<\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant \operatorname{arccot} x<\pi;$$

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},\ x\in(-\infty,+\infty);\ |\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\ x\in[-1,1].$$

对于周期函数，可以将一个周期内的函数关系和性质平移至其他周期范围内讨论.

3. 反函数、复合函数、分段函数、初等函数

[例 1] 填空题

(1) 已知函数 $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$的图形与函数 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则$g(x)=$________.

(2) 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，$f[\varphi(x)]=\ln x$，则 $\varphi(x)=$________.

(3) 已知函数 $f(x)$ 满足等式 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=2f(x)+3x$，则 $f(x)=$________.

答 (1) $g(x)=\frac{1}{2}\log_2\frac{1+x}{1-x}$. (2) $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$. (3) $f(x)=-2x-1-\frac{1}{x-1}$.

解析 (1) 依题设，两函数互为反函数，于是反解 $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，得 $x=\frac{1}{2}\log_2\frac{1+y}{1-y}$，从而知 $g(x)=\frac{1}{2}\log_2\frac{1+x}{1-x}$.

(2) 由 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$，知 $f(u)=\ln\frac{u+1}{u-1}$，从而有 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，同时有$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，于是，解得 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

(3) 设 $u=\frac{x}{x-1}$，反解得 $x=\frac{u}{u-1}$，代入原式，得

$$f(u)=2f\left(\frac{u}{u-1}\right)+\frac{3u}{u-1},\quad \text{即 } f(x)=2f\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x}{x-1},$$

与原式联立方程组，解得 $f(x)=-2x-1-\frac{1}{x-1}$.

[例 2] 单项选择题

(1) 设 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$，则有（　　）.

A. $f(-2-x)=-2-f(x)$　　B. $f(-x)=f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

C. $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$　　D. $f[f(x)]=-x$

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x, & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]=$（　　）.

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(3) 已知 $y=f(x)$ 在(a,b)内存在反函数 $x=\varphi(y)$，则有结论（　　）.

A. $y=f(x)$ 在(a,b)内严格单调

B. 曲线 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$关于直线 $y=x$ 对称

C. $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 有相同的单调性

D. $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 有相同的有界性

答 (1) A. (2) C. (3) C.

解析 (1) 为作出判断，需求出 $f(x)$. 设 $u=\frac{1-x}{1+x}$，得 $x=\frac{1-u}{1+u}$，知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，于是有 $f(-2-x)=-\frac{3+x}{1+x}=-2-\frac{1-x}{1+x}=-2-f(x)$，故选择 A.

(2) 当 $x<0$ 时，$g(x)=-2x>0$，于是，$f[g(x)]=(-2x)^2=4x^2$，又 $f[g(0)]=f(0)=0$，从而知当 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]=4x^2$，故选择 C.

(3) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调是其存在反函数的充分条件，但非必要条件. 如函数$f(x)=\begin{cases}-1-x, & -1<x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$，在 $(-1,1)$ 内存在反函数，但不单调，结论 A 不正确.