普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等数学
试题分析与解答

上海交通大学高等数学课程组　组编

第二版

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus 新核心

理工基础教材

高等数学试题分析与解答

第二版

上海交通大学高等数学课程组　组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书选编了上海交通大学近年的20份本科生高等数学试卷，对每一道试题均作详解，部分题目有题前分析和题后点评，指明解题思路和方法以及学生在解题过程中常犯的错误，有的题还给出多种解法.

本书可作为高等院校《高等数学》课程的教学辅导用书，也可供考研者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题分析与解答/上海交通大学高等数学课程组组编. —2版. —上海：上海交通大学出版社，2018

ISBN 978-7-313-20014-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①上… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第195880号

高等数学试题分析与解答(第二版)

组　　编：上海交通大学高等数学课程组

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

出 版 人：谈　毅

印　　制：常熟市大宏印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：710mm×1000mm　1/16　　印　　张：11.75

字　　数：224千字

版　　次：2012年9月第1版　2018年9月第2版　　印　　次：2018年9月第6次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-20014-3/O

定　　价：36.00元

再版前言

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、管理等各科学生都具有扎实的数学基础. 历年来，上海交通大学的学生在国内外高校的数学竞赛中，屡屡获奖；在历届硕士研究生入学考试中，考生的数学平均成绩，总是名列前茅. 这些成绩的取得，是因为上海交通大学有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进且成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队，特别是有一个教学核心，几十年来始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验，搜集教学资料. 今天的成绩，是长期积累的成果，是历史的沉淀和升华.

学好一门基础理论课程与顺利地通过这门课程的考试，两者的要求是不同的. 前者要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容何处来，用在何处，如何应用. 后者是检验所学内容的掌握情况，注重课程内各概念和内容之间的联系，强调基本概念和基本方法，适当顾及应用问题. 这两者之间没有包含关系，所以顺利地通过考试也是一门学问. 本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助.

高等数学是大学数学中一门主要的基础理论课程，不仅各高等院校非数学专业的本科学生因后继课程所需而必修，而且是硕士研究生入学考试的主考课程之一. 上海交通大学经过多年的教学实践，在高等数学课程的教学和考核等方面都积累了许多经验. 本书收入的 20 份试卷，是本课程在上海交通大学的历年试卷中的一部分，对原来试卷之间的重复题目重新作了选编，因此本书中的每一份试题都具有以下特点：

1. 涵盖课程所含的知识点，突出课程的重点.

2. 涉及基本内容之间的联系，既有检验基本概念掌握情况的客观题，又有了解基本方法掌握情况的基本计算题和应用题，还有考查学生综合能力的综合题.

3. 能较好地区分学生学习情况的差异性.

通过本书的学习，读者不难发现该课程的考试重点和对学生的要求. 作者在书中对试卷的每一题都从分析、解答、点评三个方面进行阐述. 其中，分析部分主要说明试题的类型或解题的基本方法；解答部分给出解题的主要过程；点评部分包含解

题过程中的常见错误,该题在本课程的地位,考题的其他解法,题目涉及的相关知识,考题的延拓,等等. 编者希望本书对学生顺利地通过考试和教师较好地组织试卷有所帮助.

本书可作为高等院校高等数学课程学生的教学辅导用书,也可作为教师的教学参考用书. 本书由何铭、王铭执笔. 本书的编写和出版得到了上海交通大学数学系和上海交通大学出版社的大力支持和帮助,编者在此一并表示感谢. 最后还要感谢课程组的同仁们对历年命题付出的艰辛劳动.

由于时间紧迫,又囿于编者的水平,书中存在的错误或不妥之处,诚恳希望读者提出宝贵意见.

编　者

2018 年 6 月于上海交通大学

目　录

试 卷 1

第一学期期中考试试卷.

考核内容：函数，极限与连续，导数和微分，微分中值定理及导数应用.

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知数列$\{a_n\}$单调，下列结论正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}$ 存在；　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}$ 存在；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan a_n$ 存在；　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a_n^2}$ 存在.

2. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 同阶的无穷小是（　　）.

(A) $\sqrt{1+x}-1$；　　(B) $\ln(1+x)-x$；

(C) $\cos(\sin x)-1$；　　(D) x^x-1.

3. 设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f^{(n)}(x)=$（　　）.

(A) $(-1)^n(1+n)xe^{-x}$；　　(B) $(-1)^n(1-n)xe^{-x}$；

(C) $(-1)^n(x+n)e^{-x}$；　　(D) $(-1)^n(x-n)e^{-x}$.

4. 函数 $f(x)=|x^2+3x-1|$ 的拐点数为（　　）.

(A) 0 个；　(B) 1 个；　(C) 2 个；　(D) 3 个.

5. 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续，在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，以下是三个断语：

(1) 若 $f(x_0)\geqslant 0$，则存在 $\delta_1>0$，使得对任意 $x\in U(x_0,\delta_1)$，都有 $f(x)\geqslant 0$；

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

(3) $f'(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内无第一类间断点.

上述三个断语中，正确的个数是（　　）.

(A) 0 个；　(B) 1 个；　(C) 2 个；　(D) 3 个.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=\dfrac{1}{n^2+4n+3}$，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项部分和（$n=1$，2，3，…），则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ________.

7. 函数 $y=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的第一类间断点是________.

8. 已知 $y=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$，$f'(x)=\arctan(1-x^2)$，则 $\mathrm{d}y\,|_{x=0}=$ ________.

9. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在点 $t=0$ 处的切线方程为________________.

10. 函数 $f(x)=x^3(x-4)$ 单调减少且上凸的区间是________.

三、求极限(每小题 8 分，共 24 分)

11. 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

四、求导数(每小题 8 分，共 16 分)

14. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y\sin x-y+1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{3x}, & x>0\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f''(x)$.

五、解答题(本题 10 分)

16. 已知 $y=f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $|f'(x)|\leqslant L<1$(L 是常数)，x_0 满足 $f(x_0)=x_0$. 对任意取定的 x_1，定义 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$；

(2) 当 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、函数作图题(本题 12 分)

17. 分析函数 $y=\dfrac{x^2}{1+2x}$ 的性态，并作出其简图.

$\left(y'=\dfrac{2x^2+2x}{(1+2x)^2},\ y''=\dfrac{2}{(1+2x)^3}\right)$.

七、证明题(本题 8 分)

18. 已知非负函数 $y=f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且 $f(2x)\leqslant f(x)+1$. 证明：

(1) 存在常数 M，使得当 $x>1$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant M+\log_2 x$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A(A\in\mathbf{R})$，则 $A=0$.

试　卷　2

第一学期期末考试试卷.

考核内容:

(1) 函数,极限与连续,导数和微分,微分中值定理及导数应用(约占 25%);

(2) 不定积分、定积分及其应用,微分方程,向量代数及空间解析几何.

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$,则方程 $a^x+1=-x^2+2x+2a$ 的解的个数为(　　).

(A) 0;　　(B) 1;

(C) 2;　　(D) 3.

2. 已知在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+1+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$f^{(n)}(0)=$(　　).

(A) 3;　　(B) 2;

(C) 1;　　(D) 0.

3. 已知 $\int f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\sin(x^2)+C$,则 $f(x)=$(　　).

(A) $2x\cos(x^2)$;　　(B) $4x\cos(x^2)$;

(C) $2x\cos(4x^2)$;　　(D) $4x\cos(4x^2)$.

4. 下列广义积分收敛的是(　　).

(A) $\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x$;　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$;

(C) $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　　(D) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设 $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$,则下列结论正确的是(　　).

(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$;

(B) $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}x+C(x\in[a,b])$;

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$;

(D) $\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 若常数 $p>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}=$ ________.

7. 函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$的值域是________.

8. 曲线 $\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长为________.

9. 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为________.

10. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量. 若 $\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{QR}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{RS}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,且 P, Q 和 S 三点共线,则 $k=$ ________.

三、计算下列各题(每小题 7 分,共 28 分)

11. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{3}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

12. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

13. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

14. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^1\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

四、求解下列方程(每小题 8 分,共 16 分)

15. 求微分方程 $xy''-3y'=x^2$ 满足初始条件 $y(1)=-\dfrac{1}{12}$, $y'(1)=0$ 的特解.

16. 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$, $y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$, $y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解. 求此微分方程,并求此微分方程的通解.

五、计算题(本题 8 分)

17. 已知直线 l 过点(1, 0, 1),且与 x 轴、y 轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$,与直线 l': $\dfrac{x-(\sqrt{2}+1)}{1}=\dfrac{y-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-2}{-1}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$,求直线 l 的方程.

六、应用题(本题 10 分)

18. 设抛物线 $y=ax^2+bx$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$,且该抛物线与 x 轴及直线

$x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a，b，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

七、证明题（本题 8 分）

19. 证明：

(1) 对于定义在 $[0, 1]$ 上的任意一个满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ 的非负连续函数 $f(x)$，都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x < 2$；

(2) 若常数 $c < 2$，则存在一个定义在 $[0, 1]$ 上的非负连续函数 $f(x)$，使得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，且 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x > c$.

试　卷　3

第二学期期中考试试卷.

考核内容：多元函数微分学，重积分及其应用.

一、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设函数 $f(x, y)$ 可微，且对任意 x, y 都有 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是(　　).

(A) $x_1 > x_2$, $y_1 < y_2$;　　(B) $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$;

(C) $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$;　　(D) $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$.

2. 设函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是(　　).

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x, y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微；

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x, y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微；

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x, y)}{|x|+|y|}$ 存在；

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x, y)}{x^2+y^2}$ 存在.

3. 当 $t \to 0^+$ 时，$f(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} [1-\cos(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$ 是 t 的 n 阶无穷小量，则 $n =$ (　　).

(A) 4;　　(B) 5;　　(C) 6;　　(D) 7.

4. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$;　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x$;　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x$.

5. 设 $0 < R \leqslant 1$，则二重积分 $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{1+xy}\mathrm{d}\sigma =$ (　　).

(A) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$; (B) $2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$;

(C) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$; (D) 0.

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

7. $\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$________.

8. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$ 在点(2, 1, 1)处的切线方程为__________.

9. 已知 $f(x,y)=(xy+xy^2)e^{x+y}$,则 $\dfrac{\partial^{10}f}{\partial x^5\partial y^5}=$________.

10. 已知 Ω 是位于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之上,半球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2(z\geqslant a)$ 之下的区域,则在球坐标下 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$ 的累次积分为____________.

三、计算下列偏导数(每小题 8 分,共 16 分)

11. 设函数 $u=e^{\frac{x}{y}}+z^2$,其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定的隐函数,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,1)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$.

12. 设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中 f 具有二阶连续的偏导数,$g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

四、计算下列重积分(每小题 10 分,共 20 分)

13. 求 $\iint\limits_{D}\mathrm{sgn}(xy-1)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$,

$$\mathrm{sgn}\,u=\begin{cases}1, & u>0\\ 0, & u=0.\\ -1, & u<0\end{cases}$$

14. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{x^2+y^2+(z+2)^2}dV$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$.

五、应用题(本题 10 分)

15. 求曲面 $z=2(x^2+y^2)$，$x^2+y^2=x$，$x^2+y^2=2x$ 和 $z=0$ 所围几何体的体积.

六、解答题(每小题 8 分,共 16 分)

16. 求函数 $z=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

17. 已知 $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$，$g(x, y, z)$ 是 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(1, -1, 0)$ 的方向导数：

(1) 求 $g(x, y, z)$；

(2) 若 $P(x, y, z)$ 在椭球面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上,问 $g(x, y, z)$ 是否有最大值?若有,求此最大值.

七、证明题(本题 8 分)

18. 设 $u=f(x, y, z)$ 是可微函数,若 $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{f_z}{z}$,证明：$u$ 仅为 r 的函数,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

试　卷　4

第二学期期末考试试卷.

考核内容：

(1) 多元函数微分学,重积分及其应用(约占 25%)；

(2) 曲线积分,曲面积分,级数.

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设函数 $f(x, y)$ 可微,且存在唯一驻点 $M_0(x_0, y_0)$,则(　　).

(A) M_0 一定是 $f(x, y)$ 的极值点；　　(B) M_0 一定是 $f(x, y)$ 的最值点；

(C) M_0 一定不是 $f(x, y)$ 的最值点；　　(D) 以上结论(A, B, C)都不对.

2. 设三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant z\leqslant 1}} xyz^2 e^{xyz}\,dV = I_1$, $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\\-1\leqslant z\leqslant 0}} xyz^2 e^{xyz}\,dV = I_2$,则(　　).

(A) $I_1 = I_2$；　　(B) $I_1 < I_2$；

(C) $I_1 > I_2$；　　(D) 以上结论(A, B, C)都不对.

3. 若对 $\mathbf{R}^2$ 上的任何逐段光滑闭曲线 L,都有 $\displaystyle\oint_L (ye^{xy} + xy)\,dx + (xe^{xy} - \lambda x^2)\,dy = 0$,则有(　　).

(A) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$；　　(B) $\lambda = \dfrac{1}{2}$；　　(C) $\lambda = -1$；　　(D) $\lambda = 1$.

4. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径 R 为(　　).

(A) $R = 1$；　　(B) $R < 1$；

(C) $R > 1$；　　(D) R 无法确定.

5. 下列命题中,正确的命题个数为(　　).

(1) 设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在,则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$；

(2) 设 $f(x) = x - \sin x$,则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 绝对收敛；

(3) 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有任意阶导数,则对 $x, x_0 \in (a, b)$ 有：

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设区域 D 由闭曲线 $|x|+|y|=1$ 围成,则 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

7. 椭球面 S: $x^2+2y^2+z^2=k$(常数 $k>0$) 外侧的一组法向量为______.

8. 微分方程 $\left(2x+\frac{y}{1+x^2y^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{x}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y=0$ 的通解为______.

9. 设 Σ 为球面: $x^2+y^2+z^2=1$, 则第一类曲面积分 $\iint\limits_\Sigma x(4x-z)\mathrm{d}S=$ ______.

10. 设 $f(x)=x^{12}\mathrm{e}^{-3x^2}$, 则 $f^{(2\,012)}(0)=$ ______(答案中用阶乘数"$k!$"表示).

三、解答题(本题 8 分)

11. 设 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数,且 $F_u(1,2)=F_v(1,2)\neq 0$. 若 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x+2y,x^2yz)=0$ 确定的隐函数,满足 $z(-1,1)=2$,求梯度 $\mathbf{grad}\,z|_{(-1,1)}$.

四、计算积分(每小题 8 分,共 16 分)

12. 计算重积分 $\iiint\limits_\Omega (2x^2+z^2)\mathrm{d}V$,其中区域 Ω 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内,及圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 下,即 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z\leqslant\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

13. 计算曲线积分 $\oint_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 C 是星形线: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

五、计算积分(第 14 题 8 分,第 15 题 10 分,共 18 分)

14. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{xy\mathrm{d}x+(y^2+x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2+1}$,其中 L 为圆 $x^2+y^2=1$,方向顺时针.

15. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.