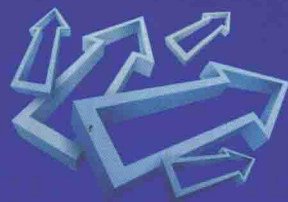


CALCULUS  
LINEAR ALGEBRA  
PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

微积分、线性代数、  
概率论与数理统计



解题指导及提高

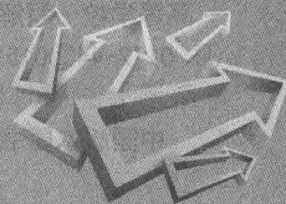
PROBLEM SOLVING GUIDANCE AND IMPROVEMENT

■ 晏建学 王云秋 张宏宇 编著

云南出版集团公司  
云南科技出版社

CALCULUS  
LINEAR ALGEBRA  
PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

# 微积分、线性代数、 概率论与数理统计



# 解题指导及提高

PROBLEM SOLVING GUIDANCE AND IMPROVEMENT

■ 晏建学 王云秋 张宏宇 编著  
汤兴华 审



云南出版集团公司  
云南科技出版社  
· 昆 明 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

微积分、线性代数、概率论与数理统计解题指导及提高 / 晏建学, 王云秋, 张宏宇编著. — 昆明: 云南科技出版社, 2018. 5

ISBN 978-7-5587-1397-2

I. ①微… II. ①晏… ②王… ③张… III. ①微积分—高等学校—题解②线性代数—高等学校—题解③概率论—高等学校—题解④数理统计—高等学校—题解 IV.

① 0172-44②0151. 2-44③021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 130730 号

微积分、线性代数、概率论与数理统计解题指导及提高  
晏建学、王云秋、张宏宇 编著

---

责任编辑: 张 磊  
封面设计: 万李江南  
责任校对: 张舒园  
责任印制: 翟 苑

书 号: 978-7-5587-1397-2  
印 刷: 云南大学出版社印刷厂  
开 本: 889mm×1194mm 1/16  
印 张: 23  
字 数: 500 千字  
版 次: 2018 年 6 月第 1 版 2018 年 6 月第 1 次印刷  
定 价: 36.00 元

出版发行: 云南出版集团公司 云南科技出版社  
地 址: 昆明市环城西路 609 号  
网 址: <http://www.ynkjph.com/>  
电 话: 0871-64190889

---

版权所有 侵权必究

# 序 言

这本习题集涵盖了基础数学的三大领域：高等数学（微积分）、线性代数、概率论与数理统计，实用性强，是一本不可多得的教学参考书。无论对于讲授基础数学课的同行和学习基础数学的同学们都能从中获益匪浅。

习题集浸透了晏建学、王云秋二位老师多年的教学心得及张宏宇同志的辛勤劳动。晏建学老师历来注重钻研、吃透教材、不断总结提升。该习题集解题思路清晰、方法新颖、颇具创新性，阅后让人耳目一新、回味无穷。

愿本习题集的出版能在数学习题集的百花园中锦上添花，同时也能让莘莘学子从中得到启迪、举一反三、有所收获，提升数学解题的兴趣和能力。

云南大学数统学院教授 汤兴华

2018年5月1日于昆明

# 自序

自2008年9月起接触数学教学工作以来，先后已经使用过吴传生老师编写的《微积分》、同济《高等数学》（五、六、七版）、马锐老师主编《微积分》、卢刚主编人大版《线性代数》（第二版）、赵云河老师主编《线性代数》（第一、二版）、吴赣昌人大版《概率论与数理统计》（第三、四、五版）等教材。为了教学方便，先后对这些教材的知识点做了归纳、梳理，对书中的例题及书后的习题也都做了详细的解答，同时将自己解题心得体会形成文字并发表数篇相应的教学论文。十年磨一剑，遂将上述的教学相关内容整理、汇集成书，也算是多年的一个总结。

该书新意在于将笔者发表的多篇教学论文《线性代数教学中的几个简便计算方法》《某些特殊矩阵幂运算的简便方法》《极限教学中的换元法》《线性代数中向量组的线性表示、极大无关组及线性方程组快速求解》以及总结的《口诀》等内容充分融入，做题风格快速灵活，让读者开卷有益。

本书涵盖同济大学版《高等数学》部分习题详解、马锐版《微积分》习题全解、赵云河版《线性代数》习题、吴赣昌版《概率论与数理统计》习题详解共三部分内容。将微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容整合，与学校学生所使用的教材相对应。

感谢云南大学数统学院的汤兴华老师欣然为本书作序，感谢同济大学《高等数学》、马锐老师《微积分》、赵云河老师《线性代数》、吴赣昌老师《概率论与数理统计》这几本经典教材的精彩习题。同时也要感谢多年以来云南财经大学统数学院各位领导及数学教研室众位数学老师（王林、王汉权、唐永昆、马锐、赵云河、陈怡娟、谭莹、罗兆富、王刚、赵萍、杜荣川、马磊、朱云、邓伟奇、纳静、罗秋瑾……）、统数学院教务办公室（哈颖、段永毅、梁丁凡）信任支持。

作者

2018年5月1日

# 目 录

## 第一部分 高等数学、微积分

高等数学、线性代数、概率论与数理统计口诀	1
微积分复习	3
换元法求极限	14
同济大学《高等数学》函数与极限、导数与微分、 微分中值定理与导数的应用习题选解	16
同济大学《高等数学》不定积分习题选解	26
同济大学《高等数学》微分方程习题选解	36
马锐《微积分》函数、极限与连续、导数与微分习题选解	49
马锐《微积分》中值定理与导数的应用习题选解	66
马锐《微积分》不定积分、定积分习题选解	77
马锐《微积分》无穷级数习题选解	93
马锐《微积分》多元函数、微分方程习题选解	102

## 第二部分 线性代数

线性代数知识点	113
《线性代数》教学中的几个简便计算方法	114
线性代数中向量极大无关组及线性方程组快速求解	117
赵云河《线性代数》行列式习题全解	121
赵云河《线性代数》矩阵习题全解	143
赵云河《线性代数》线性方程组习题全解	160
赵云河《线性代数》矩阵的特征值习题全解	186
赵云河《线性代数》二次型习题全解	206
赵云河《线性代数》线性空间与线性变换习题全解	225
赵云河《线性代数》模拟试卷及解析	136、154、181、201、220、238

## 第三部分 概率论与数理统计

概率论与数理统计知识点	243
概率论与数理统计模拟试题及解析	246、271、287、306、327、340、355
吴赣昌《概率论与数理统计》第一章随机事件的概率题解	251
吴赣昌《概率论与数理统计》第二章随机变量及其分布题解	276
吴赣昌《概率论与数理统计》第三章多维随机变量及其分布 题解	292
吴赣昌《概率论与数理统计》第四章随机变量数字特征题解	311
吴赣昌《概率论与数理统计》第五章数理统计基础知识题解	332
吴赣昌《概率论与数理统计》第六章参数估计题解	345
吴赣昌《概率论与数理统计》第七章假设检验题解	360
参考文献	368

# 第一部分高等数学(微积分)

## 天净沙·数学随想一

基础应用计算,  
随机连续离散,  
代数几何分析.  
数形结合,  
抽象构造转换.

## 数学随想二

几何代数化,  
变量坐标系,  
创建微积分,  
引入群环境.

## 集合与函数

并交差余直,  
映射与函数.  
定义表达值,  
反函复合初.

## 初等函数

反对幂指三,  
加减乘除幂.  
单变与多元,  
有限次复合.

## 极限

变量渐近值,  
单调且有界.  
振荡并衰减,  
收敛及发散.

## 极限计算

定单夹代换,  
消除零因子.  
等价无穷小,  
洛必达法则.

泰勒式展开,  
积分与级数.  
微中值定理,  
七种不定式.

## 连续与间断

左右极限点,  
大小与介值.  
空断峭振荡,  
连续和突变.

## 一元函数导数

增量比极限,  
切线之斜率.  
可导必连续,  
连续未可导.

增减极值切法线,  
凹凸拐点曲率圆.

## 一元函数求导与微分

和差积商幂,  
复反隐对参.  
可导即可微,  
微分不变性.

## 一元函数高阶导数

逐阶归纳间接,  
莱布尼兹公式.

## 微分中值定理

费罗拉柯泰,  
中单极凸拐.  
逆向去思维,  
设辅助函数.  
不等恒等式,  
求特殊极限.

## 函数作图

原端间分零,  
极拐对轴渐.

## 方程求根

扫描并隔离,  
逐步去逼近.

## 不定积分总则

基本积分表,  
化掉不可积.  
幂函数降次,  
对偶关系式.

## 不定积分技巧

拆凑倒三根,  
反对幂指三.  
分部积分法,  
作辅助积分.

## 有理函数积分

一二次分拆,  
二次项配方.  
正弦余弦切,  
万能法代换.

## 定积分

化整为零常代变,  
积零为整累极限.  
条带段环扇片壳,  
微元分析后积分.  
平行线段积平面,  
平行截面积体积.  
参数形式换元法,  
顺时方向定起止.

连续极径平方半,  
射线起止积扇形.  
光滑曲线直代曲,  
弧长微元积表面.

换元必换限,  
凑微分不变.  
偶倍奇为零,  
边积边代限<sup>①</sup>.

①出处: 高等教育出版社  
《同济大学·高等数学》  
(第六版课件)

## 微分方程

未知函数及导数,  
显式隐式方程式.  
常微偏微导数阶,  
通解特解初边值.

齐次方程可分离,  
一阶线性可降阶.  
高阶线性常系数,  
欧拉方程算子解.

特征方程特征值,  
重根复根要区别.  
指数三角多项式,  
 $k$ 重根前 $k$ 次幂.

## 平面点集

内点外点边界点,  
聚点邻域开闭集.

## 空间解析几何与向量

空间形式点线面,  
数量关系坐标限.  
右手定则向量化,  
模与方向及投影.

加法减法与数乘,  
内积外积混合积.  
垂直平行和共面,  
内外混合积为零.

## 二阶曲面

球面旋转并柱面,  
抛物双曲圆锥面.

## 平面

点法截距三点式,  
垂直平行二面角.

## 直线

对称参数一般式,  
线面平行垂直交,  
夹角距离点线面.

## 切线与切平面

偏导存在有切线,  
二元可微切平面.

## 空间曲线

空间曲线参数式,  
切线向量法平面.

## 空间曲面

法线向量切平面,  
光滑曲面方程式.

## 多元函数求导链式法则

分段乘法分叉加,  
单路全导岔路偏.  
方程求解隐函数,  
方向导数与梯度.

## 多元函数极值

一阶偏导极值点,  
极大极小作判别.  
拉格朗日乘数法,  
比较驻点及边界.

## 最小二乘法

偏差平方和最小,  
经验公式解方程.

## 多元函数积分

二重积分求体积,  
直角坐标极坐标.  
三重积分求质量,  
直角柱面球坐标.

弧长坐标线积分,  
面积坐标面积分.  
格林高斯斯托克,  
通量旋度与散度.

画出积分域,  
选择坐标系.  
定出积分限,  
确定积分序<sup>①</sup>.

①出处: 高等教育出版社  
《同济大学·高等数学》  
(第六版课件)

## 无穷级数

通项比值先判断,  
比较极限部分和.  
莱布尼兹交错项,  
条件绝对项任意.

## 幂级数

判断敛散性,  
确定收敛域.  
比值法判别,  
换元标准型.

部分和极限,  
逐项微积分.  
直接去展开,  
间接展开法.

## 线性代数

向量矩阵行列式,  
加法数乘及转置.  
 $n$ 阶排列逆序数,  
对换改变奇偶性.

左乘右乘逆矩阵,  
初等变换阶梯形.  
等价相似与合同,  
降阶展开零分块.

矩阵向量方程组,  
有解无解作判别.  
有解唯一无穷多,  
基础解系加特解.  
相关无关极大组,  
内积夹角正交模.

特征向量特征值,  
可对角化标准形.  
参数特征行列式,  
特征向量基础解.  
合同正交配方法,  
正定矩阵二次型.

独立对立不相容,  
包含相等与或非.  
必然至多不可能,  
至少同时恰有一.

独立一定不相关,  
不相关未必独立.  
对立必定不相容,  
不相容未必对立.

分类加法分步乘,  
分类分步全概率.  
至少一个概率加,  
相互独立看对立.

条件概率看因果,  
贝叶斯逆推果因.

古典几何等可能,  
0-1泊松与二项.  
稀有事件用泊松,  
多次重复伯努力.

分球入箱是排列,  
直线圆形可重复.  
箱中取球乃组合,  
区分放回不放回.

密度分布连续型,  
均匀正态及指数.  
密度关注点附近,  
分布函数看区间.  
连续积分离散加,  
正态分布标准化.  
联合密度积边缘,  
二元区域重积分.

期望方差标准差,  
加权平均偏离度.  
相关系数协方差,  
次数特征作分解.

大数定律不等式,  
中心极限近似值.  
极大似然四步骤,  
成组独立同分布.

牢记四大统计量,  
区间估计点估计.  
单双正态显著性,  
均值方差设检验.

## 概率论与数理统计

重复观察不确定,  
随机频率稳定性.  
大样本、贫信息,  
整体规律无个体.

事件符号数量化,  
复杂事件再分解.



## 微积分复习

数学是研究数量关系（数）及空间几何形式（形）的一门学科。

数学的 3 大学科是 { 基础数学  
应用数学、重要数学常数  $0, 1, i, \pi, e, \varphi, \omega, \infty$   $e^{i\pi} + 1 = 0$   
信息与计算科学

古典（初等）数学研究的是常量，它的 3 部分内容是：代数、几何、三角

近代（高等）数学建立的 3 个标志 { 解析几何(几何代数化) { 用变量研究运动  
用坐标系建立静止参照系  
用函数实现了数、形结合  
微积分的创建 { 标志着从初等数学到高等数学的飞跃  
进入了无限小分析领域  
群论的建立使代数从局部研究转向系统结构的整体分析

函数 { 定义及性质 { 集合、元素、有限集、无限集、集合的运算、区间和邻域  
定义(域)、表达(式)、值(域)  
单(调)、凸(凹)、奇(偶)、周(期)、(有、无)界 —— 有界必有上、下确界  
函(数)、反(函数)、复合(函数)、初(等函数) { 反对幂指三  
加减乘除幂  
有限次复合  
连续与间断 { 连续 { 左右极限点  
大小满射值  
间断：空断峭振荡

变量类型 { 单调型 { 无界，趋于  $\infty$   
有界，有渐近值，极限存在，收敛  
振荡型 { 有界 { 衰减，有渐近值，极限存在，收敛  
不衰减，无渐近值，但有收敛子数列  
无界，发散，有无穷子数列

极限就是变量的一个渐近值(分为达到和不可达到)；极限存在也叫收敛；极限不存在称为发散；数列收敛则极限必唯一且有界，有界数列必有收敛子数列；无界数列必有单调无穷子数列；

极限 { 数列极限 { 极限存在 —— 单调有界、振荡并衰减  
极限不存在 —— 单调无界、振荡不衰减

函数的极限：左右正负  $\infty$

无穷大与无穷小 { 定义与性质  
比较、转换、等价无穷小替换

求极限的方法 { 定单夹代换  
消除零因子  
等价无穷小  
洛必达法则  $\frac{0}{0}$   $\frac{\infty}{\infty}$   $0 \cdot \infty$   $\infty - \infty$   $1^\infty$   $0^0$   $\infty^0$   
泰勒式展开、积分与级数  
微分中值定理、柯西收敛原理

极限存在准则①夹逼准则(三明治原理)②单调有界准则(天花板原理)③柯西收敛准则(拥挤原理)

5个重要的极限常数:  $0 \ 1 \ \pi \ e \ \infty$ , 反三角函数:  $\arcsin x + \arccos x = \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

4组常用等价无穷小:  $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$$

7个常用无穷大的比较:  $\ln n < n < n \ln n < 2^n < e^n < n! < n^n$

3个基本极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ (k > 0)$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \ (|q| < 1)$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \ (a > 1 \ k > 0)$

2个重要极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

6对常用极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ (a > 0)$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \ (a > 1)$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \ (k > 0)$

3个常见高阶导数:  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$

7个常用幂级数展开公式:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

导数  $\left\{ \begin{array}{l} \text{变化率、切线斜率、陡峭程度、瞬时速度、光滑程度} \\ \text{定义} \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{左、右导数 } f'_-(x_0), f'_+(x_0) \end{array} \right. \\ \text{连续是可导的前提条件, 可导一定连续, 但连续不一定可导} \end{array} \right.$

导数与微分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{求导数的方法} \left\{ \begin{array}{l} \text{和差积商倍} \\ \text{反对幂指三} \\ \text{复反隐对参} \\ \text{高阶导数} \left\{ \begin{array}{l} \text{定义、求法: 乘对幂指三} \\ \text{逐阶归纳间接, Leibniz公式: } (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$

微分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \\ \text{几何意义} \\ \text{可导即可微} \end{array} \right.$

弹性:  $\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = f'(x) \cdot \frac{x}{y}$  反映了  $f(x)$  对  $x$  变化反应的强烈程度或灵敏度

中值定理 { 费  
罗  
拉  
柯  
泰

洛必达法则(消除零因子)  $\frac{0}{0}$   $\frac{\infty}{\infty}$   $0 \cdot \infty$   $\infty - \infty$   $1^\infty$   $0^0$   $\infty^0$

证明不等式 { 中  
单  
极  
凸  
泰

微分中值定理与导数的应用 { 单调与极值 { 单增 } 极值点就是单增与单减的分界点  
{ 单减 }

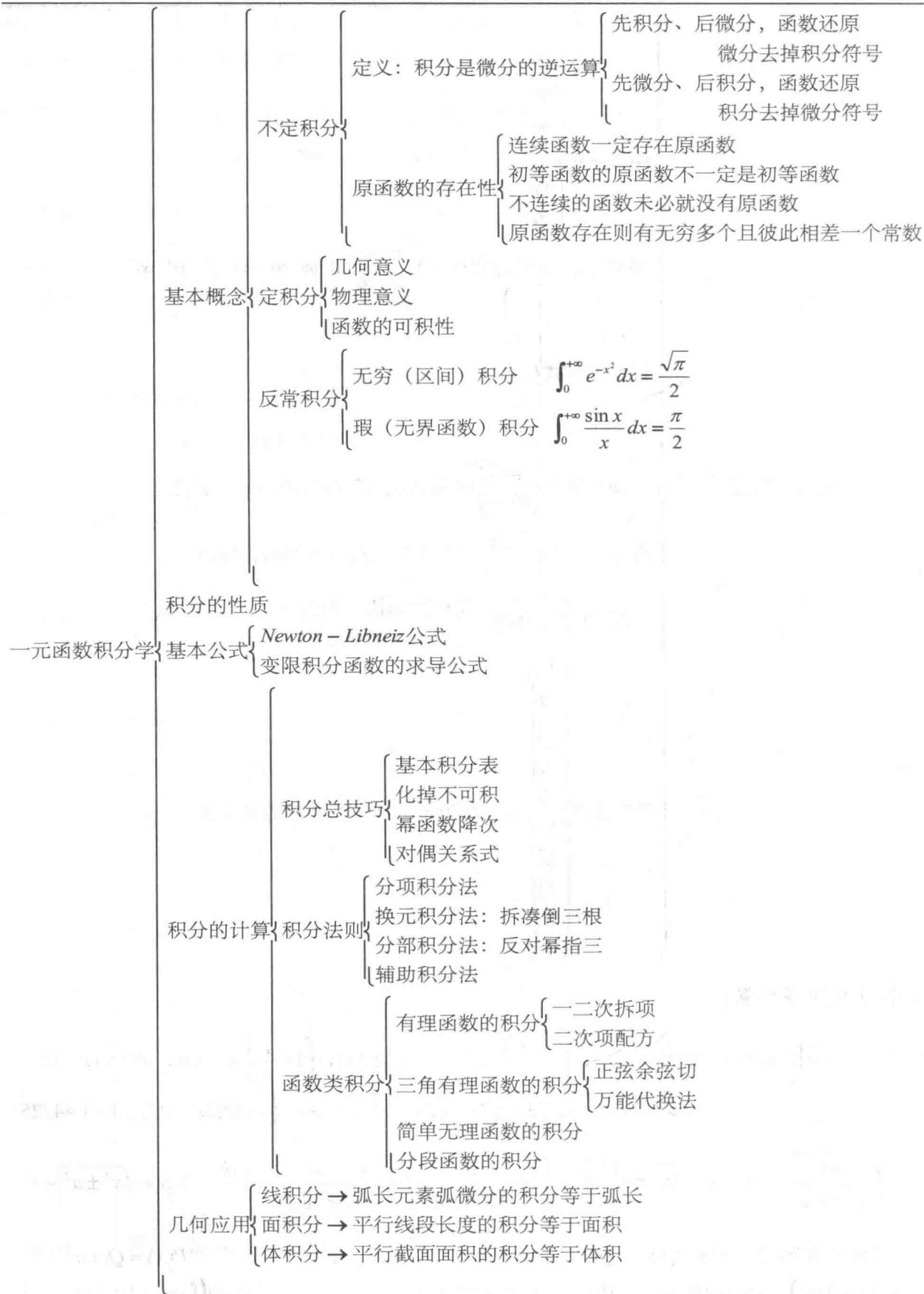
凸凹与拐点 { 上凸 } 拐点就是上凸与下凹的分界点  
{ 下凹 }

方程根(零点)的讨论 { 根的扫描、隔离  
根的逐步逼近

函数作图 { 原  
端  
间  
分  
零  
极  
拐  
对  
轴  
渐 } 增减极值渐近线、凹凸拐点曲率圆

### 三个经典问题巧解:

1. 求数列  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的最大项, 由熟知的结论:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ , 知当  $n \geq 3$  时,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$ ,  $n^{n+1} > (n+1)^n$ ,  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ , 即  $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} (= \sqrt{2}) > \sqrt[5]{5} > \dots > 1$ ,  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的最大项为  $\sqrt[3]{3} \approx 1.44225$
2. 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ , 设  $u = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ ,  $du = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) dx$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
3. 一阶线性微分方程:  $y' + P(x)y = Q(x)$ , 两边同乘  $e^{\int P(x)dx}$ , 得  $y'e^{\int P(x)dx} + ye^{\int P(x)dx}P(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$   
即  $(ye^{\int P(x)dx})' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ ,  $ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$ , 求出  $y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$





含有未知函数及其导数的方程称为微分方程；微分方程的阶；特解与通解；

可分离变量微分方程  $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

齐次(可化为齐次)微分方程  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

一阶线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x) \rightarrow$  Bernulli方程  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

可降阶高阶微分方程  $y^{(n)} = f(x)$ 、 $y'' = f(x, y')$ 、 $y'' = f(y, y')$

二阶常系数线性微分方程  $\begin{cases} \text{二阶常系数齐次线性微分方程} \\ \text{二阶常系数非齐次线性微分方程} \end{cases}$

微分方程

	导数公式	微分公式	基本积分公式
1	$(C)' = 0$	$d(C) = 0$	$\int 0 dx = C$
2	$(k \cdot x)' = 1$	$d(k \cdot x) = k \cdot dx$	$\int k dx = kx + C$
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx$ 微分后幂函数降次	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ (积分后相反) ( $n \neq -1, x > 0$ )
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$ $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$ ( $x \neq 0$ ) $(\ln x )' = \begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} & x > 0 \\ (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} & x < 0 \end{cases}$
5	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$d(a^x) = a^x \ln a \cdot dx$ $d(e^x) = e^x dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8	$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
9	$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
10	$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$d(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$
11	$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$d(\csc x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
14	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$
15	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$	

扩展积分公式	
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right  + C \quad (a > 0)$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln a^2 \pm x^2  + C \quad (a > 0)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C \quad (a > 0)$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$
$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2-x^2)^3} + C \quad (a > 0)$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$	$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C \quad (a > 0)$
$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \arctan \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C$	$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} + a \ln\left \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2} - a}{x}\right  + C$
$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\ln\left \frac{1+\cos x}{\sin x}\right  + C$	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left \frac{1+\sin x}{\cos x}\right  + C$
$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$	$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \tan \frac{x}{2} + C$
$\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x  + C$	$\int \cot x \cdot dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x  + C$

导数运算法则	微分运算法则	不定积分运算法则
1 $(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
2 $(ku)' = ku'$	$d(ku) = k du$	$\int k u dx = k \int u dx$
3 $\{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$	$d\{f[\varphi(x)]\} = f'[\varphi(x)]\varphi'(x) dx$	<p><b>第一换元法 (凑微分法)</b></p> $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)$ $\underline{u = \varphi(x)} \quad \int f(u) du = F[\varphi(x)] + C$ <p><b>第二换元法</b></p> $\int f(x) dx \quad \underline{x = \varphi(t)} \quad \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$ $= F(t) = F[\varphi^{-1}(x)] + C$
4 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d(u \cdot v) = v du + u dv$ $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$	<p><b>分部积分法</b></p> $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ <p>微前微后两相乘, 交换位置作积分</p>

不定积分中换元、分步的 3 条准则 以及 几种常用的变量代换		
化掉不可积的函数记号	$\sqrt{a^2+x^2} = a \sec t$	$x = a \tan t \quad dx = a \sec^2 t dt$
	$\sqrt{x^2-a^2} = a \tan t$	$x = \frac{a}{\cos t} \quad dx = a \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$
	$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t$	$x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt$
幂函数降次	$\sqrt{x} = t \quad x = t^2 \quad dx = 2t dt$	$x = \frac{1}{t} \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$
造成对偶	$d \sin x = \cos x dx$	$d \cos x = -\sin x dx \quad de^x = e^x dx \quad de^{-x} = -e^{-x} dx$

## 定积分的概念

定积分  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  的几何意义就是以曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  轴为边的曲边梯形的面积.

## 定积分的几条性质

$$(1) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \quad (2) \int_a^a f(x)dx = 0 \quad (3) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$(4) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (5) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad \text{特别地} \quad \int_a^b kdx = k(b-a)$$

$$(6) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$(7) f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^0 f(x)dx, \quad f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

$$(8) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \text{特别地} \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in [a, b]$$

$$(9) f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

微积分基本定理:  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

积分变上限函数:  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^b f(t)dt = -f(x),$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^b f(t)dt = -f(\psi(x))\psi'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

换元积分法:  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dx \quad \text{换元必换限、凑微分不变}$

分步积分法:  $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v \cdot du \quad \text{偶倍奇为零、边积边代限}$

无穷限积分:  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x)dx$

## 长度的累加得到面积

以曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  轴为边的曲边梯形的面积就是  $\int_a^b f(x)dx$

以曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $y=g(x)$  为边的曲边梯形的面积就是

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

以曲线  $x=\varphi(y)$ , 直线  $y=c$ 、 $y=d$  及  $y$  轴为边的曲边梯形的面积就是  $\int_c^d \varphi(y)dy$

以曲线  $x=\varphi(y)$ , 直线  $y=c$ 、 $y=d$  及  $x=\psi(y)$  为边的曲边梯形的面积就是

$$\int_c^d \varphi(y)dy - \int_c^d \psi(y)dy = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))dy$$

## 面积的累加得到体积

以曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  轴为边的曲边梯形绕  $x$  轴旋转所得到的旋转体的体积就是  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ , 曲边梯形绕  $y$  轴旋转所得到的旋转体的体积就是  $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$

以曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $y=g(x)$  为边的曲边梯形绕  $x$  轴旋转所得到的旋转体的体积就是  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx - \pi \int_a^b g^2(x)dx = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$

以曲线  $x=\varphi(y)$ , 直线  $y=c$ 、 $y=d$  及  $y$  轴为边的曲边梯形绕  $y$  轴旋转所得到的旋转体的体积就是  $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$



以曲线  $x=\varphi(y)$ , 直线  $y=c$ 、 $y=d$  及  $x=\psi(y)$  为边的曲边梯形绕  $y$  轴旋转所得到的旋转体的体积就是  $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy - \pi \int_c^d \psi^2(y) dy = \pi \int_c^d (\varphi^2(y) - \psi^2(y)) dy$

二阶常系数齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = 0$  的通解

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 $r_1, r_2$	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1, r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的特解

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型的特解 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ 其中 $m$ 是与 $P_m(x)$ 同次 ( $m$ 次) 的多项式 而 $k$ 按 $\lambda$ 不是特征方程的根、是特征方程的单根、是特征方程的二重根依次取值为 $k = 0, 1, 2$	$f(x) = e^{\lambda x} (P_l^{(1)}(x) \cos \omega x + P_m^{(2)}(x) \sin \omega x)$ 型特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} (R_n^{(1)}(x) \cos \omega x + R_n^{(2)}(x) \sin \omega x)$ 其中 $R_n^{(1)}(x), R_n^{(2)}(x)$ 是 $n = \max\{l, m\}$ 次多项式 而 $k$ 按 $\lambda + \omega i$ 不是特征方程的根、是特征方程的单根依次取值为 $k = 0, 1$
---	--

极限存在的  $6 \times 4$  种形式

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $ x  > X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $ x  > X$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $ x  > X$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $ x  > X$ 时, 有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x > X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x > X$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x > X$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x > X$ 时, 有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x < -X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x < -X$ 时, 有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x < -X$ 时, 有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使得当 $x < -X$ 时, 有 $f(x) < -M$