

张德臣 孙艳平 韩二中 编著

圆锯片振动和稳定

的分析理论与方法



非
外
借



冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn

辽宁科技大学学术著作出版基金资助

圆锯片振动和稳定的 分析理论与方法

张德臣 孙艳平 韩二中 编著

北 京

冶 金 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书共为9章,详细地介绍了机械阻抗的基本概念,对单自由度振动系统和多自由度振动系统进行了导纳分析,分别对直径305mm、914mm、1260mm圆锯片振动进行了解析,研究了圆锯片开槽、夹层的减振降噪效果;进行了圆锯片的线性振动和非线性振动解析,阐述了直径305mm圆锯片的稳定性问题;首次采用非线性振动理论的组合谐波振动方法(主共振点附近的组合谐波振动、和差型组合谐波振动、超和差型组合谐波振动)对旋转薄圆锯片进行了组合谐波振动分析,并研究了开槽、夹层阻尼、褶皱对于薄圆锯片行波振动的影响。

本书可作为高等院校机械专业本科生和研究生的教材,也可供机械设计与制造、锯切机械设计和操作人员以及有关专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

圆锯片振动和稳定的分析理论与方法/张德臣,孙艳平,
韩二中编著. —北京:冶金工业出版社,2018.12

ISBN 978-7-5024-8027-1

I. ①圆… II. ①张… ②孙… ③韩… III. ①圆锯片—
振动分析—高等学校—教材 ②圆锯片—稳定分析—高等
学校—教材 IV. ①TG717

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第287431号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷39号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp.com.cn 电子信箱 yjgbs@cnmp.com.cn

责任编辑 曾 媛 美术编辑 郑小利 版式设计 孙跃红

责任校对 李 娜 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-8027-1

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2018年12月第1版,2018年12月第1次印刷

169mm×239mm;12.75印张;244千字;189页

59.00元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs.tmall.com

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

振动是机器的伴侣，圆锯片在工作时必然产生振动，并由此带来噪声污染，研究圆锯片的振动规律对其减振降噪具有重要意义。圆锯片振动分析是以振动理论为基础。以振动参数为目标，应用先进的分析方法研究圆锯片的动态特性，其理论研究方法和数值分析已在冶金机械行业中得到广泛应用。本书针对圆锯片锯切过程中存在的振动噪声问题，分析了圆锯片的振动和稳定机理，对于几种常见的圆锯片进行了线性振动分析，在国内首次采用非线性振动理论的组合谐波振动方法（主共振点附近的组合谐波振动、和差型组合谐波振动、超和差型组合谐波振动）对旋转薄圆锯片进行了组合谐波振动分析，研究了开槽、夹层阻尼、褶皱对于圆锯片行波振动的影响，阐明了开槽后圆锯片减振降噪的机理，确定了圆锯片的最佳设计方案，研究了多种工况下开槽和夹层阻尼对于圆锯片行波振动的影响，对于确定最佳开槽和夹层阻尼方案奠定了理论基础，研究了带褶皱（适张处理）圆锯片的行波振动，并计算了圆锯片的临界载荷。

本书共分9章，第1章论述了机械阻抗的基本概念，用复指数表示简谐振动，分析了机电相似问题，在简谐激励作用下定义了机械阻抗，分析了力—电流相似。

第2章进行了单自由度振动系统导纳分析，进行了位移导纳特性分析，从导纳（阻抗）曲线识别系统的固有动态特性，近似勾画导纳曲线。

第3章进行了多自由度振动系统导纳分析，分析了阻抗矩阵和导纳矩阵，接地约束系统的原点和跨点导纳特性，以及自由—自由系统的导纳特性，介绍了导纳函数的实模态展开式。

第4章介绍了圆锯片减振降噪的国内外研究现况,这些研究成果对于圆锯片的减振降噪有重要参考价值。

第5章采用有限元法进行了圆锯片的线性振动分析。分别计算了直径115mm、305mm圆锯片未开槽直径115mm圆锯片和7种开槽直径115mm圆锯片未开槽直径305mm圆锯片和5种开槽直径305mm圆锯片的固有频率和模态;分析了槽长、开槽数和开槽方案对于圆锯片固有频率和模态影响;研究了夹层阻尼以及齿距和齿数对于圆锯片固有频率和模态影响。以上分析对于圆锯片的开槽设计有重要的指导作用。

第6章介绍了未开槽和5种开槽方案直径914mm圆锯片的行波振动,分析了开槽后该圆锯片降低噪声19dB的机理,确定了最佳的开槽设计方案,研究了3种夹层阻尼情况下直径914mm圆锯片的行波振动;研究了开槽和有夹层阻尼直径914mm圆锯片的行波振动规律。以上分析对于圆锯片的最优化设计具有指导意义。

第7章对直径914mm圆锯片的非线性振动进行了介绍,分析了未开槽、开槽、夹层阻尼、开槽且夹层阻尼情况下的直径914mm圆锯片的组合谐波振动(包括主共振点附近的组合谐波振动、和差型组合谐波振动、超和差型组合谐波振动),对研究圆锯片的组合谐波振动规律具有重要意义。

第8章基于ANSYS软件的线性屈曲分析,计算了直径1260mm圆锯片的临界载荷,其对于圆锯片的稳定性分析具有重要价值。

第9章对带褶皱的直径180mm圆锯片的振动进行了计算,研究了褶皱对于圆锯片固有频率和模态的影响,为设计带褶皱圆锯片提供了理论指导。

本书由辽宁科技大学张德臣、孙艳平和东北大学韩二中编著,具体编写分工如下:张德臣教授全面指导本书的编写工作并编写4~9章,所指导的硕士研究生樊勇、孙传涛、王艳天和张科丙进行了圆锯片的振动理论研究和有限元模拟分析;孙艳平副教授编写1~3章,以及校对本书成稿;韩二中教授对本书的编写给予指导,为本书的顺利出版

奠定了基础。本书主要面向工科研究生及科研技术人员,故在写作过程中尽量保证基础理论完整性,避免复杂公式的推导,力求简单、精练、易懂。

感谢辽宁科技大学学校领导、发展规划处领导和机械学院领导的鼓励和支持,感谢辽宁科技大学学术著作出版基金资助。感谢辽宁科技大学硕士研究生樊勇、孙传涛、王艳天和张科丙为本书内容的研究所做的工作。

由于作者水平所限,不足之处在所难免,衷心希望读者批评指正。

作 者

2018 年 5 月

目 录

1 机械阻抗的概念	1
1.1 简谐振动的复指数表示	1
1.1.1 旋转矢量表示法	1
1.1.2 复数表示法	2
1.1.3 单位旋转因子	3
1.2 机电相似	4
1.2.1 串联谐振电路	4
1.2.2 力—电压相似	5
1.3 简谐激励作用下机械阻抗的定义	7
1.3.1 机械阻抗	7
1.3.2 机械导纳 (Mechanical Mobility)	9
1.3.3 原点阻抗 (导纳) 和传递阻抗 (导纳)	10
1.4 力—电流相似	11
1.4.1 问题的提出	11
1.4.2 机械系统中元件的阻抗和导纳	13
1.4.3 根据力—电流相似画机械网络	15
2 单自由度振动系统导纳分析	21
2.1 位移导纳特性分析	21
2.1.1 幅频和相频特性	21
2.1.2 实频和虚频特性	24
2.1.3 矢端图	25
2.2 从导纳 (阻抗) 曲线识别系统的固有动态特性	26
2.2.1 识别固有频率 ω_n 和共振频率 ω_R	26
2.2.2 识别阻尼比 ξ (阻尼系数 c)	29
2.3 近似勾画导纳曲线	32
2.3.1 元件的导纳特性曲线	32
2.3.2 骨架线法 (Skeleton)	36

3 多自由度振动系统导纳分析	41
3.1 阻抗矩阵和导纳矩阵	41
3.1.1 阻抗矩阵和导纳矩阵	41
3.1.2 阻抗矩阵、导纳矩阵中元素的物理解释	43
3.1.3 跨点导纳(阻抗)的互易定理	44
3.2 接地约束系统的原点、跨点导纳特性	44
3.2.1 共振频率及反共振频率	45
3.2.2 共振、反共振频率出现的次序	46
3.2.3 接地约束系统原点导纳特征的骨架线	47
3.2.4 速度导纳的骨架线	49
3.2.5 跨点导纳特性及其骨架线	49
3.3 自由—自由系统的导纳特性	51
3.3.1 原点导纳特性	51
3.3.2 骨架线	52
3.3.3 骨架线的用途	53
3.3.4 骨架线法的推广	55
3.4 导纳函数的实模态展开式	56
3.4.1 无阻尼振动系统的固有频率及振型	56
3.4.2 主振型的正交性	57
3.4.3 有阻尼系统导纳函数的实模态展开式	58
4 圆锯片减振降噪的国内外研究现状	61
4.1 圆锯片的应用现状	61
4.2 圆锯片减振降噪的国内外研究现状	62
4.2.1 圆锯片振动的研究	62
4.2.2 圆锯片开槽降噪的研究	62
4.2.3 圆锯片阻尼降噪的研究	63
4.3 圆锯片振动基础理论概述	64
4.3.1 圆锯片振动形式	64
4.3.2 圆锯片振动模态	65
4.3.3 圆锯片振动方程	66
5 圆锯片线性振动的分析	68
5.1 有限元法及模态分析	68

5.1.1 有限元法及 ANSYS 软件	68
5.1.2 基于 ANSYS 软件的模态分析	69
5.2 开槽圆锯片的有限元模态分析	69
5.2.1 开槽降噪的理论	69
5.2.2 开槽方案的设计	69
5.2.3 有限元模型建立	72
5.2.4 模态分析计算结果	73
5.3 结构参数对圆锯片振动特性的影响	75
5.3.1 不等齿距的减振机理	76
5.3.2 不等齿距的圆锯片模型	76
5.3.3 不等齿距圆锯片的模态分析	77
5.3.4 齿数的影响	80
5.3.5 不同类型径向槽的圆锯片模型	81
5.3.6 不同径向槽圆锯片的模态分析	84
5.4 径向槽数目和尺寸的影响	88
5.4.1 径向槽数目的影响	88
5.4.2 径向槽长度影响	90
5.4.3 径向槽宽度影响	91
5.4.4 夹层阻尼的影响	93
5.4.5 小结	94
6 圆锯片行波振动的研究	96
6.1 圆锯片的波动方程	96
6.2 马钢用 $\phi 1260\text{mm}$ 圆锯片的行波振动	96
6.2.1 有限元模型建立	96
6.2.2 模态分析结果	97
6.2.3 $\phi 1260\text{mm}$ 圆锯片的行波振动	98
6.3 木工用 $\phi 300\text{mm}$ 圆锯片的行波振动	99
6.3.1 有限元模型建立	100
6.3.2 模态分析结果	101
6.3.3 $\phi 300\text{mm}$ 圆锯片的行波振动	102
6.4 开槽圆锯片振动分析	102
6.4.1 圆锯片开槽方案设计	102
6.4.2 圆锯片模型建立	103
6.4.3 圆锯片有限元模态分析	104

6.5 开槽圆锯片行波振动分析	112
6.5.1 圆锯片行波振动基础理论	112
6.5.2 圆锯片行波振动计算	112
6.5.3 结果分析	114
6.5.4 小结	115
6.6 夹层圆锯片振动分析	116
6.6.1 夹层圆锯片模型的建立	116
6.6.2 内置多阻尼夹层圆锯片模型的建立	116
6.6.3 外置阻尼夹层圆锯片模型的建立	117
6.7 夹层圆锯片有限元模态分析	118
6.7.1 内置单阻尼夹层圆锯片有限元模态分析	118
6.7.2 内置多阻尼夹层圆锯片有限元模态分析	123
6.7.3 外置阻尼夹层圆锯片有限元模态分析	124
6.8 夹层圆锯片行波振动分析	125
6.8.1 内置单阻尼夹层圆锯片行波振动分析	125
6.8.2 内置多阻尼夹层圆锯片行波振动分析	130
6.8.3 外置阻尼夹层圆锯片行波振动分析	135
6.9 开槽夹层圆锯片振动分析	138
6.9.1 内置单阻尼开槽夹层圆锯片有限元模态分析	138
6.9.2 外置阻尼开槽夹层圆锯片有限元模态分析	144
6.10 开槽夹层圆锯片行波振动分析	146
6.10.1 内置单阻尼开槽夹层圆锯片行波振动分析	146
6.10.2 外置阻尼开槽夹层圆锯片行波振动分析	148
7 圆锯片非线性振动分析	150
7.1 在主共振点附近产生的组合谐波振动	150
7.1.1 运动方程式	150
7.1.2 推导模态方程式	152
7.1.3 圆锯片在主共振点附近产生的组合谐波振动	153
7.2 和差型组合谐波振动	156
7.2.1 和差型组合谐波振动理论	156
7.2.2 圆锯片的和差型组合谐波振动	157
7.3 超和差型组合谐波振动	160
7.3.1 超和差型组合谐波振动理论	160
7.3.2 圆锯片的超和差型组合谐波振动	160

7.4 小结	163
8 圆锯片的屈曲分析	164
8.1 圆锯片屈曲分析理论	164
8.1.1 圆锯片切削力	164
8.1.2 圆锯片屈曲微分方程	164
8.1.3 屈曲分析的类型	165
8.2 圆锯片的屈曲分析	166
8.2.1 圆锯片的特征值屈曲分析	166
8.2.2 圆锯片的非线性屈曲分析	166
8.3 开槽圆锯片的屈曲分析	168
8.3.1 开槽圆锯片的特征值屈曲分析	168
8.3.2 开槽圆锯片的非线性屈曲分析	168
8.4 开槽圆锯片稳定性提高的方法	170
8.5 小结	170
9 开槽带褶皱圆锯片振动特性分析	171
9.1 开槽圆锯片模态分析	171
9.1.1 开槽圆锯片的模型	171
9.1.2 开槽圆锯片有限元模态分析	171
9.2 带弧形(流线形)褶皱圆锯片的振动分析	174
9.2.1 弧形褶皱宽度的影响	174
9.2.2 弧形褶皱数量的影响	175
9.2.3 弧形褶皱厚度的影响	177
9.2.4 褶皱体积的影响	178
9.3 弧形褶皱且开槽圆锯片的振动分析	179
9.3.1 褶皱圆锯片的模态分析	179
9.3.2 有限元模态分析	180
9.3.3 带褶皱圆锯片行波振动理论	181
9.3.4 带褶皱圆锯片行波振动分析	182
参考文献	188

机械阻抗方法是根据机械振动系统和正弦交流电路之间具有相似关系,把研究电路的一些方法移置到机械振动系统中而逐渐形成的。它们的运动用类似的常微分方程描述。随着自动控制理论的发展,机械振动系统中的机械阻抗概念又扩大而成为传递函数,更加抽象。为了使读者了解机械阻抗概念的物理意义以及方法的发展过程,专门设置本章。同时,本章还介绍一些机—电相似的知识,对于研究机电相互转换理论,对设计研究这种系统也是有重要作用的。

线性机械振动系统,在简谐激振作用下,其振动响应是简谐的,响应的频率和激振的频率相同,响应的振幅和相位与系统的参数有关。在机械阻抗方法中,简谐函数用复数、复指数的形式表示,使公式推导简捷,概念清楚。

1.1 简谐振动的复指数表示

1.1.1 旋转矢量表示法

$$y = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-1)$$

式(1-1)表示沿 y 轴方向在 origin 附近的 m 点的运动。式中, A 为振幅; ω 为圆频率(rad/s); α 为初相位弧度数; $\omega t + \alpha$ 为对应任意时刻 t 的相位弧度数。利用半径为 A 、初相位为 α 、角速度为 ω 做匀速圆周运动的 P 点的运动,可以说明 m 点做简谐运动时的概念。显然 P 点在 y 轴上投影点的运动,就是 m 沿 y 轴的运动,如图1-1(a)所示。这时 ω 相当于匀角速度。

每秒振动(匀速转动)的次数: $f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{Hz})$

振动周期: $T = \frac{1}{f} \quad (\text{s})$

简谐运动的速度和加速度,通过对式(1-1)求时间 t 的导数,得

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = A\omega \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (1-2)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha + \pi) \quad (1-3)$$

P 点的运动也可用幅值为 A 、初始相位为 α 、任意相位角为 $\omega t + \alpha$ 的旋转矢量端点 P 的运动表示。同样, P 点的速度和加速度可以用旋转矢量 $A\omega$ 、 $A\omega^2$ 表示,

它们与矢量 A 的固有相位差为 $\pi/2$ 和 π 。于是式 (1-1) ~ 式 (1-3) 表示的 m 点的位移、速度和加速度可以看成三个以 ω 逆时针旋转的矢量在 y 轴的投影, 如图 1-1 (b) 所示。

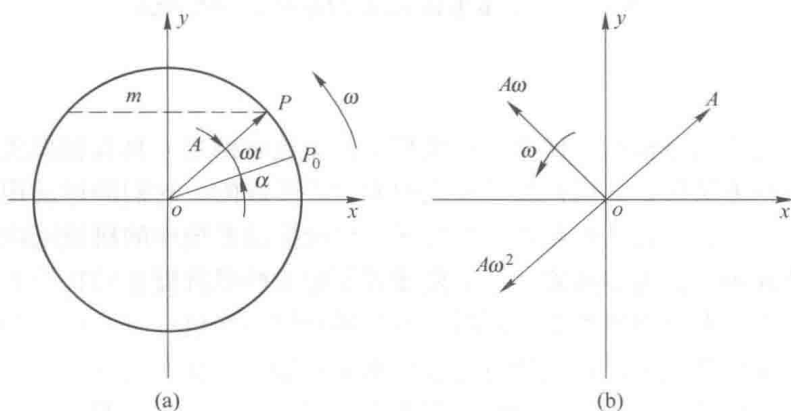


图 1-1 旋转矢量示意图

1.1.2 复数表示法

平面上的矢量可以用复数表示 (图 1-2)。取水平轴为实数轴, 取铅垂轴为虚数轴, 则复数:

$$z = x + iy \quad (1-4)$$

代表复数平面上一个点 A 的位置。 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位, 有时也用 j 表示。 x 与 y 分别为实部、虚部, 且均为实数, iy 是纯虚数。

平面上点 A 的位置, 用矢量 OA 表示, 矢量 OA 的模, 等于复数的模 $|z|$, 矢量的位置用幅角 φ 表示, 取逆时针为正。复数的模及幅角与复数的实部 x 和虚部 y 之间的关系为:

$$|OA| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$x = |z| \cos \varphi \quad y = |z| \sin \varphi \quad (1-5)$$

复数也可以用模及幅角来表示, 即

$$z = |z| \angle \varphi \quad (1-6)$$

由欧拉公式

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1-7)$$

$$\text{则} \quad z = |z| e^{i\varphi} = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi \quad (1-8)$$

用复指数表示简谐振动:

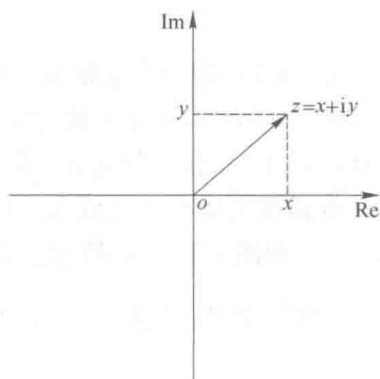


图 1-2 复数矢量示意图

复数的幅值等于振幅, 复数的幅角等于相角, 则有

$$|z| = A \quad \varphi = \omega t + \alpha \quad (1-9)$$

于是 $z = x + iy = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha)$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = A\sin(\omega t + \alpha) = \operatorname{Im}(z) \quad (1-10)$$

复数的实部和虚部均为简谐振动。式 (1-1) 表示的简谐振动是复数的虚部。

由欧拉公式

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i(\omega t + \alpha)} \\ &= Ae^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha} \\ &= (Ae^{i\alpha}) \cdot e^{i\omega t} \\ &= \tilde{A}e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1-11)$$

其中 $\tilde{A} = Ae^{i\alpha}$, $\tilde{A}$ 既表示旋转矢量的幅值, 又表示它的相位差, 称为复数振幅。这种表示法在研究若干个同频率振动的旋转矢量间的关系时, 比较方便。

1.1.3 单位旋转因子

根据复数乘法定理, 矢量在复平面内的转动, 可以看成与单位旋转因子的乘积。

定义: 模等于单位 1, 幅角等于 φ 的复数, 称为单位旋转因子。记为 $e^{i\varphi} = 1 \angle \varphi$ 。

任意复数与单位旋转因子的乘积, 等于将原来的复数逆时针旋转 φ 角度。如 $A = |a|e^{i\varphi_a}$ 与单位旋转因子 $e^{i\varphi}$ 之积:

$$A \cdot e^{i\varphi} = |a|e^{i\varphi_a} \cdot e^{i\varphi} = |a|e^{i(\varphi_a + \varphi)}$$

当 φ 为特殊角度 $\varphi = \pi/2, -\pi/2, \pi$ 时, 由欧拉公式 (1-7) 得

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad (1-12)$$

式中, i 为逆时针旋转 $\pi/2$ 的旋转因子; $-i$ 为顺时针旋转 $\pi/2$ 的旋转因子; -1 为逆 (顺) 时针旋转 π 的旋转因子。

又 $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$, 相当于顺时针转 $\pi/2$ 的旋转因子。

简谐振动的位移、速度和加速度旋转矢量之间的关系为:

$$z = Ae^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-13)$$

$$\dot{z} = iA\omega e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-14)$$

$$\ddot{z} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-15)$$

$\dot{z}$ 比 z 超前 $\pi/2$, $\ddot{z}$ 比 z 超前 π 。

位移、速度和加速度旋转矢量之间的关系, 如图 1-3 所示。

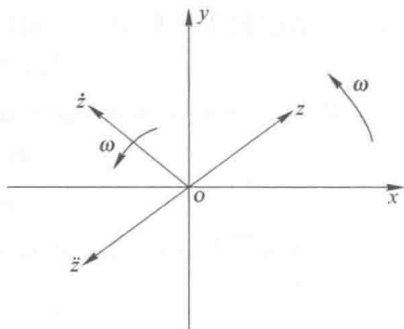


图 1-3 用旋转矢量表示的位移、速度、加速度示意图

1.2 机电相似

1.2.1 串联谐振电路

串联谐振电路由已知的电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成, 如图 1-4 所示。两端有简谐激励电压 $u = |u_m| \sin(\omega t + \varphi_u)$ 的作用, 试求回路中的稳态回路电流和回路阻抗。

由于线性系统稳态响应的频率和激励频率相同, 回路稳态电流为

$$i = |I_m| \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (1-16)$$

根据基尔霍夫电压定律: 电路的任一闭合回路中, 在每一瞬时各元件上电压差的代数和为零, 即

$$\sum u_i = 0 \quad (1-17)$$

$$u = u_R + u_L + u_C$$

式中, u_R 、 u_L 、 u_C 分别为电阻、电感和电容两端的电位差, 下面分别求出这些值。把电压、电流及其导数和积分的简谐量用复指数表示:

$$u = |u_m| e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad (1-18)$$

$$i = |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= |I_m| \omega \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |I_m| \omega e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})} e^{j\omega t} \\ &= j |I_m| \omega e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t i dt &= \int_0^t |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1-21)$$

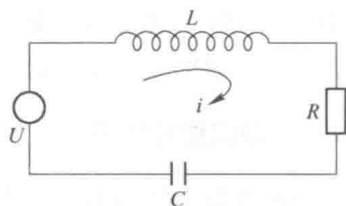


图 1-4 串联谐振电路图

在电阻、电感和电容两端的电位差分别为：

$$u_R = R \cdot i = R |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-22)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-23)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{j\omega C} |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-24)$$

u_R 与电流同相位, u_L 超前电流 90° , u_C 则落后电流 90° 。代入式 (1-17) 中, 两端消去 $e^{j\omega t}$ 得:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u \quad (1-25)$$

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] |I_m| e^{j\varphi_i} = |u_m| e^{j\varphi_u} \quad (1-26)$$

$$Z(\omega) = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] = \frac{|u_m| e^{j\varphi_u}}{|I_m| e^{j\varphi_i}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{I}} \quad (1-27)$$

称 $Z(\omega)$ 为复阻抗。当回路参数已知时, 是 ω 的函数。 $\tilde{u} = u_m \angle \varphi_u$, $\tilde{I} = I_m \angle \varphi_i$ 为激励电压及响应电流的复振幅。即复阻抗 Z 为电路端电压的复振幅与电路中电流复振幅之比。简言之, 为输入电压 (复量) 与输出电流 (复量) 之比。电流可表示为:

$$|I_m| \angle \varphi_i = \frac{|u_m| \angle \varphi_u}{|Z_m| \angle \varphi_z} \quad (1-28)$$

复阻抗可以写成模及幅角的形式:

$$|Z_m| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1-29)$$

$$\varphi_z = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (1-30)$$

用矢量图表示这些量之间的关系, 如图 1-5 所示, 图中表示元件的阻抗:

Z_R ——电阻的阻抗与电流同相, 数值等于 R ;

X_L ——电感的阻抗比电流超前 90° , 数值等于 ωL , 记为 $j\omega L$;

X_C ——电容的阻抗比电流落后 90° , 其数值等于 $1/(\omega C)$, 记为 $1/(j\omega C)$ 或 $-j/(\omega C)$ 。

1.2.2 力—电压相似

力—电压相似是机—电间的第一类相似, 是直接相似, 是以机械阻抗与电路阻抗间的模拟建立起的相似关系。

两个本质不同的物理系统, 能用同一个方程描述时, 表明这两个系统是相似

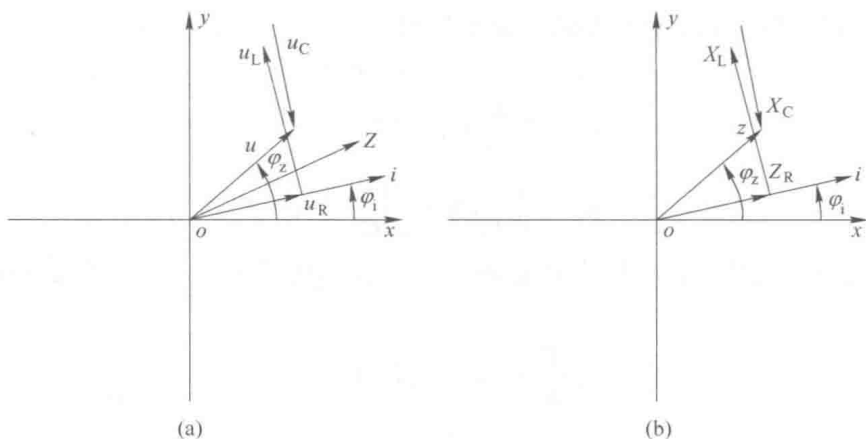


图 1-5 回路中各元件中的电压降 (a) 和阻抗 (b) 的矢量关系图

系统。利用相似关系，非电系统可以化为相似的电路系统研究，这样有不少优点：将复杂的系统化为便于分析的电路图，用电路中已有的理论，如网络理论、阻抗理论等，来分析这个实际系统，从而预知某个系统的特性。同时，还可以用实际电路模拟原有物理系统，通过实验掌握电路的特性，从而预知原物理系统的特性。这种模拟电路更换元件方便，经常用来研究参数变化对系统的影响。

如图 1-6 所示，建立弹簧质点阻尼振子的运动方程。由达朗贝尔原理：任意时刻虚加于质点上的惯性力与作用于质点上的激励力 f 、弹簧力 f_k 和阻尼力 f_c 满足平衡方程，即

$$\sum f_i = 0$$

$$f_m + f_c + f_k + f = 0 \quad (1-31)$$

式中 f_m ——质点的惯性力， $f_m = -m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ；

f_c ——阻尼器对质点的阻尼力， $f_c = -c\dot{x}$ ；

f_k ——作用给质点的弹簧力， $f_k = -kx = -k \int_0^t \dot{x} dt$ ；

f ——作用于质点的简谐激励力， $f = |F|e^{j\omega t}$ 。

将这些力代入式 (1-31) 中，得到：

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} + c\dot{x} + K \int_0^t \dot{x} dt = f \quad (1-32)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int_0^t i dt = u \quad (1-33)$$

因为

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \quad \int_0^t \dot{x} dt = x$$

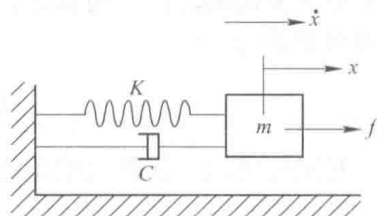


图 1-6 弹簧质点阻尼振子运动示意图