大学数学系列教材

线性代数

第四版

华中科技大学数学与统计学院

高等教育出版社

大学数学教材系列

线性代数

第四版

华中科技大学数学与统计学院
刘先忠　杨　明

高等教育出版社·北京

内容提要

本书继承了华中科技大学数学与统计学院编写的《线性代数》教材前三版的体系与框架，根据教学实践，并考虑到不同层次学生、不同学时课程的实际需要，结合科技的进步和教学的发展修订而成。

全书共七章，内容包括行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换，书末附有部分习题答案。本次修订在第三版的基础上，增加、调整和修改了部分章节的内容，并补充了每节练习与思考，增加了与教材内容相配套的线性代数数学实验。

本书逻辑严谨、概念准确；论述清晰、表述简洁；题目丰富、实用性强，可作为高等学校理工科各专业线性代数课程的教材，也可供科技工作者或其他读者自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/华中科技大学数学与统计学院编. --4版. --北京：高等教育出版社，2019. 1

ISBN 978-7-04-051169-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①华… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 010271 号

策划编辑 张彦云 责任编辑 张彦云 封面设计 李小璐 版式设计 马敬茹
插图绘制 于 博 责任校对 马鑫蕊 责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	河北鹏盛贤印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	15. 25	版　次	1999 年 8 月第 1 版
字　数	270 千字		2019 年 1 月第 4 版
购书热线	010-58581118	印　次	2019 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	28. 10 元

物 料 号 51169-00

线性代数

第四版

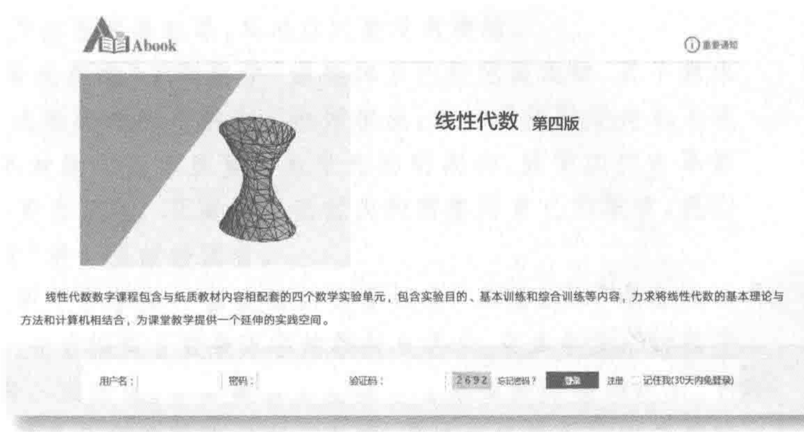
华中科技大学
数学与统计学院

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/12245712，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入“我的课程”。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/12245712

第二版序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中，“工程数学”一直是具有重要地位的课程系列。当前，革新之风正吹遍高等教育界，课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨，在此形势下，工程数学课程经受了严峻的考验，作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课，其地位丝毫没有动摇。

然而，这绝不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺，更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为。恰好相反，面对现代科学技术飞速发展的形势，面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待，数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫！正是意识到时代的需要与自己的职责，我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者。

华中科技大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法，先后编写了百余万字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼，逐步趋于完善。应该说，本套教材正是这一长期探索过程的产物，它凝结了华中科技大学数学系几代教师的心血。当然，具体执笔的教师对教材的最终成型做出了决定性的贡献。

本套教材分《线性代数》《概率论与数理统计》《计算方法》《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版。编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求，在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要，注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力；在表述上力求清晰易读，便于教学与自学。本套教材配备了较丰富的例题与习题，它们大多源于教师在自身教学中的积累，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义。书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考。本套教材可供高等学校理工科各专业（非数学）使用。

本套教材的编写自始至终得到华中科技大学教务处及数学系的支持，也得到华中科技大学数学系全体教师的协助与鼓励。高等教育出版社的大力支持使本套教材得以顺利出版。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2003 年 5 月于武汉

第四版前言

本书第四版保持了第三版的基本内容框架,并在其基础上,根据教学实践和应用中存在的问题和反馈意见做了全面的修订,内容符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。

修订的主要内容如下:

1. 在第一章增加了 Laplace 定理及其相关内容;

2. 在第三章修改了向量与矩阵的相关内容,强调了矩阵方法在向量研究中的应用;

3. 在第四章增加了 2×2 型与 3×3 型线性方程组的解的概念的几何图形直观,修订了 Gauss 消元法,在线性方程组的求解方法中突出了向量方法和矩阵方法的应用;

4. 第五章从特征值和特征向量问题切入,修改了相关内容的引入与展开;增加了一节以系统地给出对称矩阵相似对角化的相关内容;

5. 在第六章增加了二维和三维几何空间中的二次型及其化简问题的几何描述,以增强问题的几何直观背景和应用性;

6. 根据教学实践和线性代数应用的发展,调整、更新了部分例题和习题,完善了每节后的练习与思考。

在互联网平台和计算机等教学辅助设施迅速发展的背景之下,第四版增加了与本教材配套的线性代数数学实验作为线性代数课程学习和应用的辅助资源,内容包括“矩阵及其运算”“向量和线性方程组”“矩阵的特征值和特征向量”“二次型问题”等四个单元,旨在为具有计算机操作条件的读者提供实验方法指导,结合具有现代科技发展实际背景的应用问题,使读者学习、掌握使用常用的计算软件 MATLAB 求解线性代数问题的方法和技巧。读者可在与教材配套的数字课程网站学习此内容。

本书内容包括行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等七章。第一、二、六、七章的修订工作由刘先忠完成;第三、四、五章的修订工作由杨明完成。线性代数数学实验由杨明编写。

在本书的修订过程中，华中科技大学数学与统计学院的各位任课教师提供了宝贵意见，高等教育出版社给予了大力支持，在此一并表示感谢。

本书虽经多年的教学实践打磨，但不足之处在所难免，尚祈读者不吝指正。

编　者

2018 年 9 月于武汉

第三版前言

本书是在第二版的基础上稍作修订而成。第二版自2003年6月出版以来，反映较好，被广大兄弟院校选作教材。

第三版保持了第二版原有的结构与风格，以及内容处理上深入浅出、通俗易懂、难点分散等优点。这次修订对于个别文字表达还不够清楚的地方进行了修正，纠正了若干不妥的叙述。

这次修订，对紧密配合本书的《线性代数学习辅导与习题全解》暂未作修订，辅导书提供了大量典型的例题，是教材的延伸与拓宽，既可作为本课程的习题课参考书，又可作为学生在学习过程中的辅导书。

限于编者的水平，第三版中难免出现错漏，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2008年2月于华中科技大学

第二版前言

线性代数是高等院校理工科本、专科生的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，它在自然科学和工程技术各领域都有着重要的应用。本书是在《线性代数》(高等教育出版社 1999 年出版)的基础上，以教育部最新颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程基本要求》为依据，广泛听取校内外教师的意见后修订而成的。本书可作为各工程专业本科生的线性代数教材，学习前六章建议教学学时数为 40 学时左右。本书还可作为高等院校成人教育、继续教育等各类教育的教学用书。

上半世纪计算机技术的迅猛发展，拓宽了线性代数在各领域内的应用，MATLAB、MAPLE 等现代数学软件的应用普及使线性代数的各类计算方便快捷。与之相适应的教学发展使我们在有限的学时内，将重点放在基本理论工具的建立与应用上。因此，新版在内容的处理上，既注意到教材体系的完整性与合理性，又考虑到教学的效率和学生学习线性代数的实际情况，做了如下取舍：

· 对于行列式，采取归纳定义，只强调基本计算以利于用计算机处理行列式，提高教学效率。

· 重点建立矩阵、向量空间两大理论工具，以突出由线性代数课程给出的最重要的两类数学工具。

· 对于解线性方程组这一线性代数的主要问题，作为矩阵和向量理论的应用。

· 在线性空间的概念中，重点放在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的相应概念及背景建立上，为学习后续课程奠定基础。对于较为抽象的线性空间和线性变换的理论，根据需要作为选学内容。

本书分行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型和线性空间与线性变换共七章。第一、二、六、七章由刘先忠编写，第三、四、五章由杨明编写。

在本书编写过程中，得到了华中科技大学数学系及线性代数课程组的老师

们的极大关心与支持，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2003年4月于华中科技大学

第一版前言

线性代数是理工科本、专科生的一门重要基础课。它既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，这使得高等院校计算机、电信、自控等专业对线性代数内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求。本教材是根据教育部高等学校线性代数教学基本要求，结合编者长期从事线性代数和矩阵课程的教学与研究，并在近几年我校实行两个层次线性代数教学实践的基础上，为适应不同层次线性代数教学要求而编写的。

本书第一章至第五章不含“*”标志部分的内容及A组习题适用于理工科本科生36学时左右的教学，其内容符合教育部线性代数教学基本要求，属第一层次；全书内容和A、B组习题，适用于理工科本科生50学时左右的教学，属于对线性代数有更高要求的第二层次。

根据教学改革的需要和本科各专业对线性代数内容的不同要求，我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排。第一章至第三章介绍行列式、矩阵运算和求解线性方程组，这是线性代数的基本内容，学生应理解、掌握其基本概念、方法和理论。对第四章介绍的矩阵相似和第五章介绍的二次型，注意把它们作为前面内容的应用来处理，对Jordan标准形，我们避开它的理论问题，主要从实用的角度介绍化矩阵为Jordan标准形的方法。第六章线性空间与线性变换和打“*”标志部分是拓宽和加深的内容，将它们置于相应的章、节之末，以保持基本问题的连贯性，方便教学按不同的要求取舍。

本教材以线性方程组为主线，以行列式和矩阵为工具阐明线性代数的基本概念、理论和方法，强调矩阵基本方法的应用，适当加强了矩阵分块运算，特别是简单实用的矩阵列分块在证明问题中的应用，显示了矩阵方法的简洁与精巧性。考虑到线性代数课程概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，力求处理上深入浅出、通俗简单、难点分散。对重点定理和方法，提供较多的典型例题加以剖析，引导、帮助学生较好地理解、掌握和运

用。本书配有形式多样的习题,并附有答案,便于练习检验。

在本书编写过程中,得到华中理工大学数学系及教研室领导和老师们的极大关心与支持,余鄂西教授详细审阅全稿,提出了许多宝贵的建议,在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限,疏漏错误难免,敬请读者批评指正。

编　者

1999年4月于武汉

目　　录

第一章

行 列 式

行列式的理论起源于解线性方程组,它在数学的许多分支以及其他自然科学方面有着广泛的应用,它可以用来表达很多数学性质,从而可以用来解释并推断许多实际现象. 本章先介绍二阶、三阶行列式,然后归纳给出 n 阶行列式的定义,讨论其性质和计算方法,最后作为行列式的应用,介绍 Cramer(克拉默)法则.

§1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶、三阶行列式的定义

在许多实际问题中,人们常常会碰到求解线性方程组的问题. 我们在中学里已经学过如何解二元一次方程组与三元一次方程组.

设二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_j(j=1,2)$ 表示未知量,$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 表示未知量的系数,$b_i(i=1,2)$ 表示常数项. 用代入消元法从(1.1)式中消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,得

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同样地,从(1.1)式中消去 x_1,得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

引入记号:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**. 于是二元一次方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若用 D_j 表示把 D 中第 j 列换成(1.1)式右边的常数列所得到的行列式,则当 $D\neq 0$ 时,二元一次方程组(1.1)的唯一解可简单表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=1,2). \tag{1.3}$$

例 1 用二阶行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=5, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7, D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=21, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=7,$$

由 $D=7\neq 0$ 知方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=1.$$

设三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $x_j(j=1,2,3)$ 表示未知量,$a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 表示未知量的系数,$b_i(i=1,2,3)$ 表示常数项. 用代入消元法从(1.4)式中消去 x_2,x_3,得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32},\end{aligned}$$

同理可得仅含有 x_2,x_3 的等式,请读者自行写出.

引入记号:

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

称 D 为**三阶行列式**. 当 $D\neq 0$ 时,则三元一次方程组(1.4)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.6}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中第 j 列所得到的三阶行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

可见,引入二阶、三阶行列式的定义,可使二元、三元一次方程组的公式解便于记忆使用.

(1.5)式表明三阶行列式由 6 项构成,每项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积. 这 6 项可由图 1-1 所示方法得到. 此法称为对角线法则(也称 Sarrus(萨鲁斯)法则).

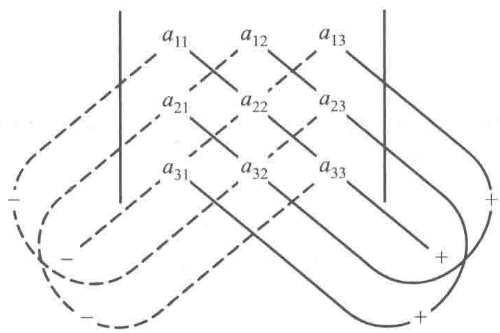


图 1-1

人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n($n\geqslant 4$ 的正整数)阶行列式,并利用 n 阶行列式这个工具来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,使它的解有便于记忆使用的形式. 问题是如何定义 n 阶行列式? 直接检验便可发现:四阶和四阶以上的行列式如果沿用“对角线法则”来定义,那么它们将失去二阶和三阶行列式的主要性质,也没有类似于二阶、三阶行列式的应用(二元、三元线性方程组的公式解),因此必须另想其他方法来定义. n 阶行列式可以用几种不同的方法来定义.

1.1.2 n 阶行列式的定义

正因为用行列式来表示二元和三元一次方程组的解有简单明了的优点,所以我们希望也能用它把一般的 n 元一次方程组(亦称为 n 元**线性方程组**)的解表示出来.