"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

实变函数与泛函分析基础

第四版

程其襄　张奠宙　胡善文　薛以锋　编

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

实变函数与泛函分析基础

第四版

程其襄　张奠宙　胡善文　薛以锋　编

高等教育出版社·北京

内容提要

第四版在保持第三版的基本内容的基础上，根据最新教学情况反馈和数学研究的进展，做了部分重要的修改。全书共十一章：实变函数部分包括集合、点集、测度论、可测函数、积分论、微分与不定积分；泛函分析则主要涉及赋范空间、有界线性算子、泛函、内积空间、泛函延拓、一致有界性以及线性算子的谱分析理论等内容。

第四版继续保持简明易懂的风格，力图摆脱纯形式推演的论述方式，尽量将枯燥的数学学术形态呈现为学生易于接受的方式。同时，适当补充了数字资源（以图标 示意）。

本书可作为高等学校数学类专业学生的教学用书，也可作为自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实变函数与泛函分析基础 / 程其襄等编. --4 版. --北京：高等教育出版社，2019.6

ISBN 978-7-04-050810-9

Ⅰ.①实… Ⅱ.①程… Ⅲ.①实变函数-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 234780 号

项目策划　李艳馥　李　蕊　兰莹莹

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　李　蕊　　特约编辑　高　旭　　封面设计　王凌波

版式设计　徐艳妮　　插图绘制　于　博　　责任校对　张　薇　　责任印制　田　甜

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	人卫印务（北京）有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	15	版　　次	1983 年 12 月第 1 版
字　　数	320 千字		2019 年 6 月第 4 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2019 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	30.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　50810-00

实变函数与泛函分析基础

第四版

程其襄　张奠宙　胡善文　薛以锋　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1250042，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

实变函数论简史　　泛函分析简史　　第一版前言

http://abook.hep.com.cn/1250042

第四版前言

2017 年我们着手进行第四版的修订。实变函数部分，在坚持主要研究 $\mathbf{R}^n$ 中勒贝格测度的同时，又介绍一般的测度空间的概念。在介绍黎曼-斯蒂尔切斯积分和勒贝格-斯蒂尔切斯测度时，重点强调由规范增函数诱导博雷尔测度空间，从而具有一般测度空间的所有性质。第六章还给出一些概率测度的例子。这些改动有助于沟通测度论与概率论之间的密切联系。泛函分析部分，全面介绍有限秩算子、全连续算子和弗雷德霍姆算子及指标的概念，希望弥补前三版这部分内容的缺憾。同时，适当补充数字资源（以图标 示意）。

本书初版的主持者程其襄先生已于 2000 年仙逝，先后参与写作的魏国强、王漱石也不幸故去。为了使本书的作者后继有人，这一版的修订工作由胡善文、薛以锋两位教授承担。他们都是华东师范大学算子代数研究团队的核心成员。

对于本书存在的缺陷和问题，非常欢迎读者批评指出，我们将努力改正。

张奠宙

2018 年 6 月

于华东师范大学数学科学学院

第三版前言

第二版前言

目录

第一篇 实变函数

第一章 集合 …… 5
§1 集合的表示 …… 5
§2 集合的运算 …… 6
§3 对等与基数 …… 12
§4 可数集合 …… 14
§5 不可数集合 …… 17
第一章习题 …… 20
第二章 点集 …… 22
§1 度量空间,n 维欧氏空间 …… 22
§2 聚点,内点,界点 …… 24
§3 开集,闭集,完备集 …… 27
§4 直线上的开集、闭集及完备集的构造 …… 30
§5 康托尔三分集 …… 31
第二章习题 …… 35
第三章 测度论 …… 37
§1 外测度 …… 39
§2 可测集 …… 41
§3 可测集类 …… 46
*§4 不可测集 …… 50
第三章习题 …… 51
第四章 可测函数 …… 53
§1 可测函数及其性质 …… 53
§2 叶戈罗夫定理 …… 58
§3 可测函数的构造 …… 60
§4 依测度收敛 …… 62
第四章习题 …… 65
第五章 积分论 …… 67
§1 黎曼积分的局限性,勒贝格积分简介 …… 67
§2 非负简单函数的勒贝格积分 …… 69
§3 非负可测函数的勒贝格积分 …… 70
§4 一般可测函数的勒贝格积分 …… 75

§5 黎曼积分和勒贝格积分 …… 84
§6 勒贝格积分的几何意义,富比尼定理 …… 87
第五章习题 …… 93
第六章 微分与不定积分 …… 96
*§1 维塔利定理 …… 97
§2 单调函数的可微性 …… 98
§3 有界变差函数 …… 103
§4 不定积分 …… 108
§5 斯蒂尔切斯积分 …… 112
§6 *L-S* 测度与积分 …… 115
第六章习题 …… 118

第二篇 泛函分析

第七章 度量空间和赋范线性空间 …… 123
§1 度量空间的进一步例子 …… 123
§2 度量空间中的极限,稠密集,可分空间 …… 125
§3 连续映射 …… 128
§4 柯西点列和完备度量空间 …… 129
§5 度量空间的完备化 …… 132
§6 压缩映射原理及其应用 …… 135
§7 线性空间 …… 138
§8 赋范线性空间和巴拿赫空间 …… 140
第七章习题 …… 146
第八章 有界线性算子和连续线性泛函 …… 149
§1 有界线性算子和连续线性泛函 …… 149
§2 有界线性算子空间和共轭空间 …… 154
§3 有限秩算子 …… 158
第八章习题 …… 161
第九章 内积空间和希尔伯特空间 …… 163
§1 内积空间的基本概念 …… 163
§2 投影定理 …… 166
§3 希尔伯特空间中的规范正交系 …… 169
§4 希尔伯特空间上的连续线性泛函 …… 175
§5 自伴算子、酉算子和正规算子 …… 177
第九章习题 …… 180
第十章 巴拿赫空间中的基本定理 …… 183
§1 泛函延拓定理 …… 184
§2 $C[a,b]$的共轭空间 …… 188
§3 共轭算子 …… 190
§4 纲定理和一致有界性定理 …… 191
§5 强收敛、弱收敛和一致收敛 …… 195
§6 逆算子定理 …… 197
§7 闭图像定理 …… 199

第十章习题 …… 201
第十一章　线性算子的谱 …… 203
§1　谱的概念 …… 203
§2　有界线性算子谱的基本性质 …… 206
§3　紧集和全连续算子 …… 207
§4　全连续算子的谱论 …… 210
§5　费雷德霍姆算子与指标 …… 215
第十一章习题 …… 220

附录一　内测度，L 测度的另一定义 …… 223
附录二　半序集和佐恩引理 …… 225
参考书目 …… 228

第一篇
实变函数

常常听说“实变函数很难学”.确实,在 20 世纪 50 年代,一位数学系的老师能够讲授实变函数论,往往就能使学生们刮目相看.可是,半个多世纪过去了,大学数学系的学生成倍、甚至几十倍地增加,大家都会学一些实变函数,实变函数也就不神秘了.时至今日,甚至一些工程师也需要知道一点“勒贝格积分”,把平方可积函数空间当作一种常识.

实变函数论是 19 世纪末 20 世纪初,主要由法国数学家勒贝格(Lebesgue)创立的.它是普通微积分学的继续,其目的是想克服牛顿和莱布尼茨所建立的微积分学存在的缺点,使得微分和积分的运算更加对称、更加完美.

我们以前学过的微积分,有一个明显的不足:黎曼(Riemann)意义下可积的函数类太少.例如,定义在[0,1]上的狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$(有理数点上取值 1,无理数点上取值 0),看上去非常简单,但是它不可积(黎曼意义下).于是数学家们想到,这大概是黎曼积分的定义有问题了,应该引进一种新的积分才是.这就是勒贝格研究实变函数的出发点.

那么黎曼积分究竟有什么缺陷呢?让我们细细咀嚼一下黎曼积分的定义.对一个由 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形来说,要求它的面积,总是用内填外包法:首先将定义区间分割为小区间;然后以小区间 Δ_i 的长度为底、函数在 Δ_i 上的下确界 m_i 为高的那些矩形内填,并且以相同的底、函数在 Δ_i 上的上确界 M_i 为高的那些矩形外包;如果在每个小区间内函数值的差别很小(连续函数就是这样,小区间上函数的上下确界 M_i 和 m_i 差别不大),那么当把区间分得很细的时候,能使这种差别的总和很小,那么内填、外包的矩形面积之差可以无限小,彼此都趋于一个定值 L,这就得到了定积分

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\sum\limits_i m_i\Delta x_i \arrow[dr] & \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d] \leqslant & \sum\limits_i M_i\Delta x_i. \arrow[dl] \\
 & L &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

回过头来看看狄利克雷函数 $D(x)$,不管把[0,1]区间划分成多么小的 n 个区间,每个小区间里都有无理数和有理数,$D(x)$ 的函数值分别取值 0 和 1,它们彼此之差处处都是 1.(*)式的左端恒为 0,右端恒为 1,不会趋于相同的值,于是在黎曼意义下就是“不可积”的了.

如上所述,用黎曼积分求曲边梯形的面积,是用以 Δx_i 为底边的那些矩形进行“内填外包”的.那么,我们能不能换个思路,变为用 Δy_i 为底边的矩形去内填外包呢?记得苏轼咏庐山诗有“横看成岭侧成峰”的意境,恰好可以形容这一思想.勒贝格自己也曾经这样比喻说:假如我们要数一堆硬币,你可以一叠叠地竖着数,也可以一层层横着数(如图 0.1).这就是说,求曲边梯形面积时不要去分定义域[0,1],而是分值域,把函数值相差不多的那些点集放在一起考虑,用横放着的小矩形面积之和加以逼近,这样岂不是柳暗花明又一村了吗?(如图 0.2)仍以 $D(x)$ 为例,它只取两个函数值 0 和 1,取 0 的是[0,1]中的无理数集 I,取 1 的是[0,1]中的有理数集 Q.假定 I 的“长度”是 $m(I)=1$,Q 的长度 $m(Q)$ 是 0,不管把 y 轴上的[0,1]区间分得如何细,因为 $D(x)$ 只有两个值,它和[0,1]构成的曲边梯形“面积”始终是

$$1\cdot m(Q)+0\cdot m(I).$$

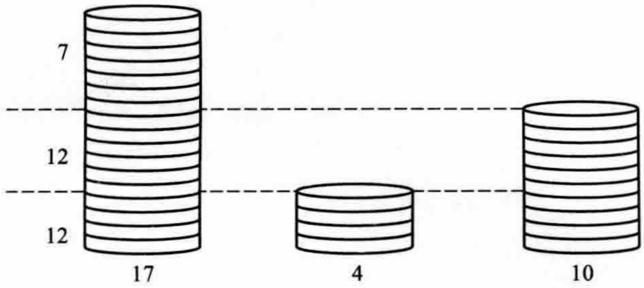

图 0.1　横着数、竖着数都是 31

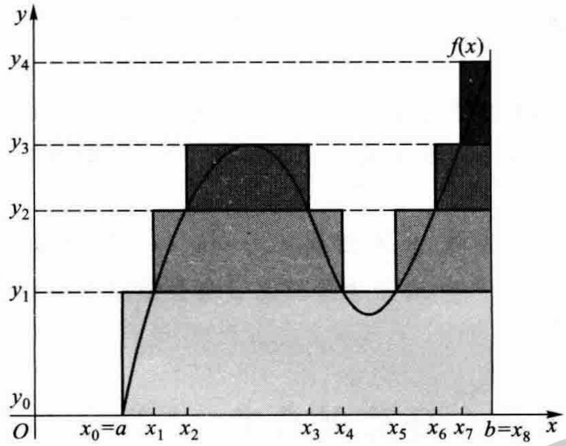

图 0.2　勒贝格积分示意图

上图是由 $y=f(x)$，$y=0$，$x=a$，$x=b$ 围成的曲边梯形面积，可以用横向分割方式形成的矩形面积近似地加以表示：

$(b-a)(y_1-y_0)+[(x_4-x_1)+(b-x_5)](y_2-y_1)+$

$[(x_3-x_2)+(b-x_6)](y_3-y_2)+(b-x_7)(y_4-y_3)$.

这样，问题就归结为如何来确定 $m(Q)$ 和 $m(I)$ 了.众所周知，在微积分课程里，Q，I 之类的集合是没有“长度”的.这要求我们重新制定一套理论.按照勒贝格创立的测度论，$m(Q)=0$，$m(I)=1$，于是$D(x)$的勒贝格积分该是 0，问题迎刃而解！

本书的内容就顺着勒贝格的思路走，先讨论集合，再讨论集合的“长度”，即测度.然后定义新的积分，并找出和某种微分的关系.实变函数的理论，就这样顺理成章地展开了.亲爱的读者，只要你把握住了这条思路，你就不会觉得实变函数的概念像是“帽子里突然跑出了一只兔子”，而是合情合理、明白可亲的一门学问了.

第一章 集合

早在中学里我们就已接触过集合的概念，以及集合的并、交、补的运算，因此本章的前两节具有复习性质.不过，无限多个集合的并与交，是以前没有接触过的.它在本书中常常要用到，是学习实变函数论时的一项基本功.

康托尔(Cantor)在19世纪创立了"集合论"，对无限集合也以大小、多少来分.例如他断言：全体实数比全体有理数"多".这是数学向无限王国挺进的重要里程碑，也是实变函数论的出发点.

实变函数论建立在实数理论和集合论的基础之上，对于实数的性质，我们假定读者已经学过，所以本书只是介绍集合论方面的基本知识.

§1 集合的表示

集合是数学中所谓原始概念之一，不能用别的概念加以定义.就目前来说，我们只要求掌握以下朴素的说法：

"在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素."

顺便说明一下，一个集合的各个元素必须是彼此互异的；哪些事物是给定集合的元素必须是明确的.下面举出几个集合的例子.

例1 4,7,8,3四个自然数构成的集合.

例2 全体自然数.

例3 0与1之间的实数全体.

例4 平面上的向量全体.

例5 $[0,1]$上的所有实函数全体.

例6 A,B,C三个字母构成的集合.

"全体高个子"并不构成一个集合.因为一个人究竟算不算"高个子"并没有明确的界限，有时难以判断他是否属于这个集合.

1. 集合的表示

一个具体集合A可以通过列举其元素$a,b,c,\cdots$来定义，可记为

$$A=\{a,b,c,\cdots\},$$

也可以通过该集合中的各元素必须且只需满足的条件p来定义，并记为

$$A=\{x:x \text{ 满足条件 } p\}.$$

如例 1 可表示为$\{4,7,8,3\}$,例 3 可表示为$\{x:x\in(0,1)\}$.

设 A 是一个集合,x 是 A 的元素,我们称 x 属于 A,记为$x\in A$.x 不是 A 的元素,称 x 不属于 A,记为 $x\notin A$ 或 $x\overline{\in} A$.

为表达方便起见,$\varnothing$表示不含任何元素的空集,例如

$$\{x:\sin x>1\}=\varnothing.$$

习惯上,$\mathbf{N}$ 表示自然数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集,$\mathbf{Q}$ 表示有理数集,$\mathbf{R}$ 表示实数集.

设$f(x)$是定义在 E 上的函数,记$f(E)=\{f(x):x\in E\}$,称之为 f 的值域.若 D 是 $\mathbf{R}$ 中的集合,则$f^{-1}(D)=\{x:x\in E,f(x)\in D\}$,称之为 D 的原像,在不致混淆时,$\{x:x\in E,$ $f(x)$满足条件 $p\}$可简写成$\{x:f(x)$满足条件 $p\}$.

2. 集合包含关系

若集合 A 和 B 满足关系:对任意 $x\in A$,可得到 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.若 $A\subset B$ 但 A 并不与 B 相同,则称 A 是 B 的真子集.

例 7　若$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上定义,且在$[a,b]$上有上界 M,即对任意 $x\in[a,b]$有 $f(x)\leqslant M$.用集合语言表示为:$[a,b]\subset\{x:f(x)\leqslant M\}$.

用集合语言描述函数性质,是实变函数中的常用方法,请再看下例.

例 8　若$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上连续,任意取定 $x_0\in\mathbf{R}$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,即

$$f((x_0-\delta,x_0+\delta))\subset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon).$$

3. 集合相等

若集合 A 和 B 满足关系:$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 和 B 相等,记为 $A=B$.

例 9　设$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上定义,且在 $\mathbf{R}$ 上有上界 M,则

$$\mathbf{R}=\{x:f(x)\leqslant M\}=\{x:f(x)\leqslant M+1\}.$$

例 10　若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则由连续函数的性质,$f([a,b])=[m,M]$,其中

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\},\quad M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

§2　集合的运算

从给定的一些集合出发,我们可以通过所谓“集合的运算”作出一些新的集合,其中最常用的运算有“并”“交”“减法”三种.实变函数中大量使用“无限并”和“无限交”的运算.

1. 集合的并集

设 A,B 是任意两个集合.设 C 由一切或属于 A 或属于 B 的元素所组成,则我们称 C 为 A 与 B 的并集或和集,简称为并或和,记为 $C=A\cup B$.它可表示为

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

图 1.1 是 $A\cup B$ 的示意图.

并集的概念可以推广到任意多个集合的情形. 设有一族集合 $\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，其中 α 是在固定指标集 Λ 中变化的指标；则由一切 A_α $(\alpha\in\Lambda)$ 的所有元素组成的集合称为这族集合的并集或和集，记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，它可表示为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x:\text{存在某个 }\alpha\in\Lambda,\text{使 }x\in A_\alpha\}.$$

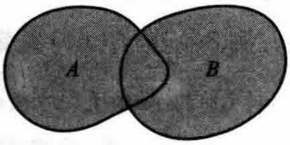

图 1.1

注意，按照集合的定义，重复出现在两个被并集合中的元素在作并运算时只能算一次.

习惯上，当 $\Lambda=\{1,2,\cdots,k\}$ 为有限集时，$A=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 写成 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n$，而 $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ 写成 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 E 上的函数，则对任意 $c\in\mathbf{R}$，

$$\{x:\max\{f(x),g(x)\}>c\}=\{x:f(x)>c\}\cup\{x:g(x)>c\}.$$

例 2 $(a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\dfrac{1}{n},b-\dfrac{1}{n}\right]$.

例 3 若记 $\mathbf{Q}_n=\left\{\dfrac{m}{n}:m\in\mathbf{Z}\right\}$，$n=1,2,\cdots$，则 $\mathbf{Q}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{Q}_n$.

例 4 若 $\{I_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一族开区间，而 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$，则存在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset\Lambda$，使得 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_{\alpha_i}$（有限覆盖定理）.

例 5 若 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数，则 $\{x:f(x)>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x:f(x)>\dfrac{1}{n}\right\}$.

2. 集合的交集

设 A,B 是任意两个集合. 由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C，称为 A 和 B 的交集或积集，简称为交或积，记为 $C=A\cap B$. 它可以表示为

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$

如图 1.2 所示.

交的概念也可以推广到任意多个集合的情形. 设 $\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是任意集族，其中 α 是指标，Λ 是指标集；则由一切同时属于每个 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的元素所组成的集，称为该集族的交或积，记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，它可以表示为

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x:\text{对任意 }\alpha\in\Lambda\text{ 有 }x\in A_\alpha\}.$$

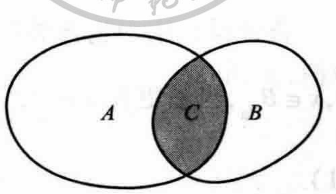

图 1.2

若 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\varnothing$，说明所有 A_α 没有公共元素.

习惯上，当 $\Lambda=\{1,2,\cdots,k\}$ 为有限集时，$A=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 写成 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{k}A_n$，而 $A=\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ 写成 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 6 若 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数，则 $\{x:a<f(x)\leqslant b\}=\{x:f(x)>a\}\cap\{x:f(x)\leqslant b\}$.

例 7 若 $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在唯一 $a\in\mathbf{R}$，

使得 $a\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，即 $\{a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$（区间套定理）.

例 8　若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数，则对任意 $c\in\mathbf{R}$，

(1) $\{x:\sup f_n(x)\leqslant c\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)\leqslant c\}$；

(2) $\{x:\sup f_n(x)>c\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)>c\}$.

证明　我们只证明(1)，(2)的证明类似，请读者自证.

若 $x\in\{x:\sup f_n(x)\leqslant c\}$，则对任意 n，$f_n(x)\leqslant\sup\{f_n(x)\}\leqslant c$，即 $x\in\{x:f_n(x)\leqslant c\}$. 由 n 的任意性，$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)\leqslant c\}$；反之，若 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)\leqslant c\}$，则对任意 n，$f_n(x)\leqslant c$，因此 c 是 $\{f_n(x)\}$ 的一个上界，于是 $\sup\{f_n(x)\}\leqslant c$，即 $x\in\{x:\sup f_n(x)\leqslant c\}$.
□

关于集合的并和交显然有下面的事实.

定理 1　(1) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；　（交换律）

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；　（结合律）

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$；　（分配律）

(4) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

证明　我们只证 $A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$.

先设 $x\in A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)$，则 $x\in A$ 且有 $\alpha_0\in\Lambda$，使 $x\in B_{\alpha_0}$. 于是

$$x\in A\cap B_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha),$$

这证明了

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha).$$

再证反过来的包含关系. 设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$，则有 $\alpha_0\in\Lambda$，使 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$，此即 $x\in A$，$x\in B_{\alpha_0}$，当然更有 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$. 因此 $x\in A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)$. 于是

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right).$$

综合起来，便得等式成立.
□

这表明，集合运算的分配律，在“无限并”的情况下依然成立.

3. 集合的差集和补集

若 A 和 B 是集合，称 $A\backslash B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$ 为 A 和 B 的差集. 图 1.3 是 $A\backslash B$ 的示意图.

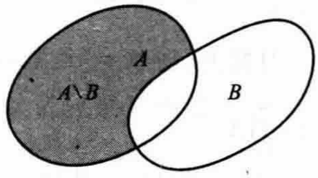

图 1.3

当我们讨论的集合都是某一个大集合 S（称为全集）的子集时，我们称 $S\backslash A$ 为 A 的补集，并记 $S\backslash A=A^c$. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，$\mathbf{R}^n\backslash A$ 写成 A^c.

当全集确定时，显然 $A\backslash B=A\cap B^c$，因此研究差集运算可通过研究余集运算来实现.

例 9　$\mathbf{Q}^c=\{x:x$ 是无理数$\}$.

例 10　若 $f(x)$ 定义在集合 E 上，$S=E$，则

$$\{x:f(x)>a\}^c=\{x:f(x)\leqslant a\}.$$

在集合论中处理差集或余集运算式时常用以下公式.

定理 2（德摩根（De Morgan）公式）　**若 $\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一族集合，则**

(1) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$;

(2) $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$.

证明　(1)的证明.设 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c$，则 $x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，因此对任意 $\alpha\in\Lambda$，$x\notin A_\alpha$，即对任意 $\alpha\in\Lambda$，$x\in A_\alpha^c$，从而 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$.反之，设$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$，则对任意 $\alpha\in\Lambda$，$x\in A_\alpha^c$，即对任意 $\alpha\in\Lambda$，$x\notin A_\alpha$，则$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，从而 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c$.综合可得$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$. □

(2)的证明留给读者.

例 11　设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列.若 $x\in E$，则 $\{f_n(x)\}$ 有界的充要条件是存在 $M>0$，使得对任意 n，$|f_n(x)|\leqslant M$. **注意到与“存在”相对应的是并集运算，与“任意”相对应的是交集运算**，从而

$$\{x:\{f_n(x)\}\text{ 有界}\}=\bigcup_{M\in\mathbf{R}^+}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|\leqslant M\}.$$

用德摩根公式，有

$$\begin{aligned}\{x:\{f_n(x)\}\text{ 无界}\}&=\left(\bigcup_{M\in\mathbf{R}^+}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|\leqslant M\}\right)^c\\&=\bigcap_{M\in\mathbf{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|>M\},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R}^+$ 为正实数集.

数学分析中的很多定义、命题涉及“任意”和“存在”这两个逻辑量词，它们的否定说法是把“任意”改为“存在”，而把“存在”改为“任意”.在集合论中，德摩根公式很好地反映了数学分析中这种论述的合理性.

请读者注意：我们怎样把描写函数列性质的 ε-N 语言，转换为集合语言.

例 12　设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列，若 x 是使 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 0 的点，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得对任意$n\geqslant N$，$|f_n(x)|<\varepsilon$，即

$$\{x:\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\}=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbf{R}^+}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}.\tag{1}$$

若用分步分析，更容易理解，即

$$x\in\{x:\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\}$$

$$\Leftrightarrow\text{对任意 }\varepsilon>0,\text{存在 }N,\text{对任意 }n\geqslant N,\ |f_n(x)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\text{对任意 }\varepsilon>0,\text{存在 }N,\ x\in\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}$$

$$\Leftrightarrow\text{对任意 }\varepsilon>0,\ x\in\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\varepsilon\in\mathbf{R}^+}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}.$$

用德摩根公式