考研数学真题复习系列

世纪 ONE 高教版

微博：http://t.sina.com.cn/1434473485（世纪高教张剑锋）

历年考研数学真题解析及复习思路

数学三

赠送本

（1987—2006）

考研数学答疑

考研数学命题研究组

世纪高教编辑部

藏书章

世纪高教官网下载：http://www.pchepmg.com

ISBN 978-7-5192-0665-9

9 787519 206659

世界图书出版公司

定价：46.80元

目　录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅳ、Ⅴ均为现在的数学三.

(试卷Ⅳ)

一、判断题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \mathrm{d}x = 0$.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散.

(4) 假设 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式,且 $D \neq 0$,但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一切 $r+1$ 阶子式均为 0.

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率均为零.

二、选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1) 下列函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0, \\ \cos x, & x > 0. \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0. \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $a < x_1 < x_2 < b$,则至少存在一点 ξ,使得

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b)$.

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b - x_1) \quad (x_1 < \xi < b)$.

(C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$.

(D) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - a) \quad (a < \xi < x_2)$.

(3) 下列广义积分收敛的是

(A) $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$.

(B) $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x$.

(C) $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x$.

(D) $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \mathrm{d}x$.

(4) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$,则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中

(A) 必有 r 个行向量线性无关.

(B) 任意 r 个行向量都线性无关.

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

(D) 任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示.

(5) 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB) = 0$,则

(A)A 和 B 不相容(互斥).　　(B)AB 是不可能事件.

(C)AB 未必是不可能事件.　　(D)$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

三、(计算下列各题,每小题 4 分,满分 16 分)

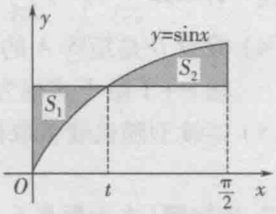
(1) 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) 设 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$,求 y'.

(3) 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$,求 dz.

(4) 求$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

四、(本题满分 10 分)



考虑函数 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 问:

(1)t 取何值时,右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

(2)t 取何值时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大?

五、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数,并指出收敛区间.

六、(本题满分 5 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$,其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和曲线 $y=x^3$ 围成的封闭区域.

七、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$,而市场对该商品的最大需求量为 1(万件). 求需求函数.

八、(本题满分 8 分)

解线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4,\\x_1+x_3-x_4=-3,\\3x_1+x_2+x_3=1,\\7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

十、(本题满分 6 分)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$的实特征值与对应的特征向量.

十一、(本题共 2 小题,每小题 4 分,满分 8 分)

(1) 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2, P\{X=2\}=0.3, P\{X=3\}=0.5$,试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

(2) 已知随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$ 的数学期望 $E(Z)$.

十二、(本题满分 8 分)

设两箱内装有同种零件,第一箱装 50 件,有 10 件一等品,第二箱装 30 件,有 18 件一等品,现从两箱中任挑一箱,然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回). 试求:(1) 先取出的零件是一等品的概率 p;(2) 在先取的是一等品的条件下,后取的零件仍是一等品的条件概率 q.

(试卷 V)

一、判断题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上严格单增,则对区间 (a,b) 内任何一点 x 有 $f'(x)>0$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,k 为常数,且 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|k\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ 的行列式,则 $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.

(5)【同试卷 Ⅳ　第一、(5) 题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】

(4)【同试卷 Ⅳ　第二、(4) 题】

(5) 对于任意二事件 A 和 B,有 $P(A-B)=$

(A) $P(A)-P(B)$.　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.　　(D) $P(A)-P(\overline{B})-P(A\overline{B})$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

三、计算下列各题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

(2)【同试卷 Ⅳ　第三、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第三、(3) 题】

(4) 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\,dx$.

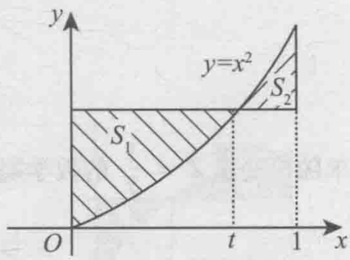
(5) 求不定积分 $\int \dfrac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

四、(本题满分 10 分)

考虑函数 $y=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1$. 问:

(1) t 取何值时,右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

(2) t 取何值时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大?



五、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第六题】

六、(本题满分 8 分)

设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$,而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$,其中 x 为产量(假定等于需求量),p 为价格,试求:

(1) 边际成本;

(2) 边际收益;

(3) 边际利润;

(4) 收益的价格弹性.

七、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第八题】

八、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第九题】

九、(本题满分 6 分)【同试卷 Ⅳ　第十题】

十、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2, P\{X=2\}=0.3, P\{X=3\}=0.5$,试写出 X 的分布函数 $F(x)$,并求 X 的数学期望与方差.

十一、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第十二题】

1988 年全国硕士研究生入学统一考试试题

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

(1) 设 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,\ -\infty < x < +\infty$，则：

①$f'(x) =$ ________；　②$f(x)$ 的单调性是________；

③$f(x)$ 的奇偶性是________；　④其图形的拐点是________；

⑤凹凸区间是________；　⑥水平渐近线是________.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

(4) 设 $P(A) = 0.4,\ P(A \cup B) = 0.7$，那么

①若 A 与 B 互不相容，则 $P(B) =$ ________；

②若 A 与 B 相互独立，则 $P(B) =$ ________.

二、判断题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在.

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0) = 0$.

(3) 等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$ 对任何实数 a 都成立.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩必小于 n.

(5) 若事件 A, B, C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$，则 $A = B$.

三、（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{x\ln x}$.

(2) 设 $u + e^u = xy$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(3) 求定积分 $\int_0^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x}{x} dx$.

四、(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

(2) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛,试证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

五、(本题满分 8 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数:

$$D=D(p)=\frac{a}{p^2},S=S(p)=bp,$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 为常数;价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k[D(p)-S(p)]\text{(}k\text{ 为正的常数)},$$

假设当 $t=0$ 时价格为 1,试求:

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 p_e;

(2) 价格函数 $p(t)$;

(3) 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$.

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y=x^2(x\geqslant0)$ 上某点 A 处作一切线,使之与曲线及 x 轴所围图形(如右图)的面积为$\frac{1}{12}$,试求:

(1) 切点 A 的坐标;

(2) 过切点 A 的切线方程;

(3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V.

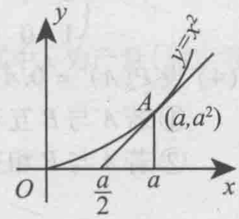


图 10 –

七、(本题满分 8 分)

已知线性方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3,\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2.\end{cases}$ 问 k_1 和 k_2 各取何值时,方程组无解?有唯一解?有无穷多解?在方程组有无穷多解的情况下,试求出一般解.

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant2)$ 线性无关.设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$.试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$,求行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$ 的值.

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售,每箱20只. 假设各箱含0,1,2只残次品的概率分别为0.8,0.1和0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯,在购买时,售货员随意取一箱,而顾客随机地查看4只:若无残次品,则买下该箱玻璃杯,否则退回. 试求:(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α;(2) 在顾客买下的一箱中,确实没残次品的概率 β.

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年统计资料表明,在索赔户中被盗索赔户占20%,以 X 表示在随意抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索陪的户数.

(1) 写出 X 的概率分布;

(2) 利用棣莫佛—拉普拉斯定理,求被盗的索赔户数不少于14户且不多于30户的概率的近似值.

[附表] $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间(1,2)上服从均匀分布,试求随机变量 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$.

(试卷 Ⅴ)

一、(本题满分 12 分)【同试卷 Ⅳ 第一题】

二、(本题满分 10 分)【同试卷 Ⅳ 第二题】

三、(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

(2) 已知 $u=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(3)【同试卷 Ⅳ 第三、(3) 题】 (4)【同试卷 Ⅳ 第三、(4) 题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b,使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 处处可导.

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形. 问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小?

六、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

八、(本题满分 6 分)

已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 给定,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵. 证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆,并求出其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

九、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第八题】

十、(本题满分 7 分)【同试卷 Ⅳ　第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设有十只同种电器元件,其中有两只废品. 装配仪器时,从这批元件中任取一只,如是废品,则扔掉重新任取一只. 试求在取到正品之前,已取出的废品只数的概率分布、数学期望和方差.

十二、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第十二题】

1989 年全国硕士研究生入学统一考试试题

(试卷 Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y = x + \sin^2 x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是__________.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是__________.

(3) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是__________.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $A =$ ______, $P\{|X| < \frac{\pi}{6}\} =$ __________.

(5) 设 X 为随机变量且 X 的数学期望 $E(X) = \mu$,方差 $D(X) = \sigma^2$,则由切比雪夫(Chebyshev)不等式,有 $P\{|X - \mu| \geqslant 3\sigma\} \leqslant$ __________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当 $x \to 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量.　　(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 更高阶的无穷小量.　　(D) $f(x)$ 是比 x 更低阶的无穷小量.

(2) 在下列等式中,正确的结果是

(A) $\int f'(x)\,dx = f(x)$.　　(B) $\int df(x) = f(x)$.

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$.　　(D) $d\int f(x)\,dx = f(x)$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}| = 0$,则

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列)的元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列)的元素全为 0.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n \times n$ 矩阵,则必有

(A) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.　　(B) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$.　　(D) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$.

(5) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\bar{A}$ 为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”. (B)“甲、乙两种产品均畅销”.
(C)“甲种产品滞销”. (D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

三、计算题(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

(2) 已知 $z=f(u,v)$, $u=x+y$, $v=xy$,且$f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场. 已知该商品的需求函数为 $p=p(x)=10\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$,且最大需求量为6,其中 x 表示需求量,p 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数;(2 分)

(2) 求使收益最大时的产量,最大收益和相应的价格;(4 分)

(3) 画出收益函数的图形. (3 分)

五、(本题满分 9 分)

已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

计算下列各题:

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;(4 分)

(2) $S_1=\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;(2 分)

(3) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (n=2,3,\cdots)$;(1 分)

(4) $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$. (2 分)

六、(本题满分 6 分)

假设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,在(a,b) 内可导,且$f'(x)\leqslant 0$. 记

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明在(a,b) 内,$F'(x)\leqslant 0$.

七、(本题满分 5 分)

已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,t)$. 问:

(1) 当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?(3 分)

(2) 当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?(1 分)

(3) 当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时,将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合. (2 分)

九、(本题满分 5 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;(2 分)

(2) 利用(1) 的结果,求矩阵 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵. (3 分)

十、(本题满分 7 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求:(1) $P\{X < Y\}$;(5 分)

(2) $E(XY)$. (2 分)

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布,现在对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第一、(1) 题】

(2) 某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q = aP^b$,其中 a 和 b 为常数,且 $a \neq 0$,则需求量对价格 P 的弹性是______.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = $______.

(4) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,其中 X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数为 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$,则 $D(Y) = $ ______.

(5)【同试卷 Ⅳ 第一、(4) 题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ 第二、(1) 题】 (2)【同试卷 Ⅳ 第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ 第二、(3) 题】

(4) 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r = n$. (B) $r < n$. (C) $r \geqslant n$. (D) $r > n$.

(5)【同试卷 Ⅳ　第二、(5) 题】

三、(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) 已知 $z = a^{\sqrt{x^2-y^2}}$,其中 $a>0, a\neq 1$,求 dz.

(3) 求不定积分 $\int \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

(4) 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$,其中 D 是 $x^2+y^2=1, x=0$ 和 $y=0$ 所围成的区域在第 Ⅰ 象限的部分.

四、(本题满分 6 分)

已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$,总成本函数为 $C=8x+x^2$,其中 x 表示产品的产量,求利润函数,边际收入函数,边际成本函数,以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

五、(本题满分 12 分)

已知函数 $y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$,试求其单调区间,极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线,并画出函数的图形.

六、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 6 分)

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1), \boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$ 的线性相关性.

八、(本题满分 5 分)【同试卷 Ⅳ　第九题】

九、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求:(1) X 的概率分布;

(2) $X+Y$ 的概率分布;

(3) $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

试求:在仪器使用的最初 200 小时内,至少有一只电子元件损坏的概率 α.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试试题

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

(2) 设函数$f(x)$有连续的导函数,$f(0)=0$且$f'(0)=b$,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处连续,则常数$A=$ ________.

(3) 曲线$y=x^2$与直线$y=x+2$所围成的平面图形的面积为________.

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\ x_2+x_3=a_2,\\ x_3+x_4=-a_3,\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$$

有解,则常数a_1,a_2,a_3,a_4应满足条件________.

(5) 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击,若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$,则该射手的命中率为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数$f(x)=x\tan x e^{\sin x}$,则$f(x)$是

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

(2) 设函数$f(x)$对任意的x均满足等式$f(1+x)=af(x)$,且有$f'(0)=b$,其中a,b为非零常数,则

(A) $f(x)$在$x=1$处不可导. (B) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=a$.

(C) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=b$. (D) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=ab$.

(3) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量均不能由其余$s-1$个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有一部分向量线性无关.

(4) 设A,B为两随机事件,且$B\subset A$,则下列式子正确的是

(A) $P(A+B)=P(A)$. (B) $P(AB)=P(A)$.

(C) $P(B\mid A)=P(B)$. (D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5) 设随机变量X和Y相互独立,其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

(A) $X = Y$.　　(B) $P\{X = Y\} = 0$.

(C) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X = Y\} = 1$.

三、计算题(本题共4小题,每小题5分,满分20分)

(1) 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1}dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}dxdy$,其中 D 是曲线 $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

(4) 求微分方程 $y' + y\cos x = (\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

四、(本题满分9分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式:

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为1.5万元,求相应的最优广告策略.

五、(本题满分6分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续,其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少,$f(0) = 0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$,其中常数 a,b 满足条件 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant a+b \leqslant c$.

六、(本题满分8分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) a,b 为何值时,方程组有解?

(2) 方程组有解时,求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时,求出方程组的全部解.

七、(本题满分5分)

已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,存在自然数 k,使得 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$. 试证明矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆,并写出其逆矩阵的表达式($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵).

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

九、(本题满分 4 分)

从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；

$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$；

$A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

十、(本题满分 5 分)

一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}-\mathrm{e}^{-0.5y}+\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否独立?

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

十一、(本题满分 7 分)

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表](表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

(试卷 V)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第一、(1) 题】　(2)【同试卷 Ⅳ　第一、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第一、(3) 题】　(4)【同试卷 Ⅳ　第一、(4) 题】

(5) 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X,Y 相互独立，设随机变量 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$______.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷 Ⅳ　第二、(1) 题】

(2)【同试卷 Ⅳ　第二、(2) 题】

(3)【同试卷 Ⅳ　第二、(3) 题】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com