

高新科技译丛

 Springer

Fundamentals of Spherical Array Processing

球形阵列信号处理原理

[以色列] Boaz Rafaely 著 万群 邹麟 殷吉昊 等译



国防工业出版社
National Defense Industry Press



装备科技译著出版基金

球形阵列信号处理原理

[以色列] Boaz Rafaely 著
万群 邹麟 殷吉昊 等译



国防工业出版社

·北京·

著作权合同登记 图字：军-2018-040 号

图书在版编目（CIP）数据

球形阵列信号处理原理/（以）博阿兹·拉菲利（Boaz Rafaely）著；
万群等译. —北京：国防工业出版社，2019.1
（高新科技译丛）

书名原文：Fundamentals of Spherical Array Processing

ISBN 978-7-118-11746-2

I. ①球… II. ①博… ②万… III. ①信号处理 IV. ①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 250975 号

Translation from the English language edition:

Fundamentals of Spherical Array Processing by Boaz Rafaely

Copyright © 2015 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

This edition has been translated and published under licence from Springer-Verlag GmbH.

Springer-Verlag GmbH takes no responsibility and shall not be made liable for the accuracy of the translation.

本书简体中文版由 Springer 授权国防工业出版社独家出版发行，版权所有，侵权必究。

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

三河市腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 11¼ 插页 4 字数 208 千字
2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 79.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：（010）88540777

发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755

发行业务：（010）88540717

谨以此著献给我的父母，Nitan 和 Rivka Rafaely!

前 言

麦克风阵列和与之相关的阵列处理技术在过去的数十年中，已经在许多应用领域得到了发展。这些应用涵盖了语音通信、音乐录音、室内声学分析、噪声控制、声学全息技术、防务与安全、娱乐和其他更多领域。在室内语音和音乐厅里的音乐中，声音往往会传输到整个密闭空间，由此产生了一个三维声场。能够有效测量和处理三维声场的麦克风阵列，通常需要在三维空间中的一个体积范围之内对麦克风进行布置。安装在一堵围墙上的平面阵列，业界几十年以来业已对其进行了长期的探究；在最近的一段时间里，球形阵列，比如麦克风安装在一个刚性球体上的阵列，已经被业界提出。这类阵列相对于经典的线性阵列、矩形阵列和圆形阵列，具有以下一些优势：

(1) 具有复杂旋转对称性的球形阵列，易于空间滤波或者波束形成，可以被设计用于对任意方向的目标源进行有效的增强或者削弱。

(2) 阵列处理和性能分析可以在球面谐波域上解析表示，对于球体而言正是其傅里叶域。该变换域有利于建构有效的算法，有利于对包含阵列及其周围声场的广阔的声场进行建模。

(3) 波束形成可以通过从波束方向图指向上，对波束方向图设计进行解耦而高效地实现，因此，对于阵列实现而言，提供了更多的简化手段和灵活性。

上述优势促使越来越多的研究者，近年来对球形麦克风阵列进行了纵深探索，研究了球形阵列的结构配置，研发了适用于球形阵列的算法，使这些阵列在广泛的应用领域中大显身手。这些日益活跃的科学活动，为本书作者提供了撰写此书的动力和灵感：本书的宗旨是以一种指南的方式，将球形阵列处理的基本原理呈献给广大的研究学者、研究生和关注该主题的工程技术人员。

本书开头两章为读者提供了必要的数学和物理背景，包括对球面傅里叶变换和球谐波域上平面波声场建构的介绍。第三章涵盖了空域采样理论，这对于通过选择麦克风的位置，用以对空间中的声压函数进行采样是有帮助的。接下来的一章，将各种各样的球形阵列结构配置呈现给读者，其中包含了基于一个刚性球体的普遍性结构配置。第五章引入了波束形成的概念与基本方程，包括了常见的设计方法，诸如“延迟-求和”和常规波束形成。紧随其后的一章中，

给出了波束方向图最优化设计方法，用以获得不同的设计目标，诸如最大鲁棒性、最大指向性或者最低旁瓣电平。最后一章介绍了更多先进的阵列处理算法，比如最小方差无失真响应算法。这些算法利用期望信号和噪声在球谐波域上独特的解析式，旨在衰减不期望的噪声成分的同时增强期望信号。

我本人对于球形阵列处理的兴趣，始于 2002 年对麻省理工学院“感官通信小组”为期 6 个月的访问，在此期间和 Julie Greenberg 共事，深切地享受了波士顿那让我兴奋的氛围。我想感谢 Julie 提供的这次机会，感谢她的热情款待和让我受益匪浅的讨论。在我访问波士顿期间，我接触了让我颇受启发的 Jens Meyer 和 Gary Elko 的关于球形阵列的著作。他们开拓性的工作播下了种子，那颗种子其后在我的实验室，即 Negev 的本·古里安声学实验室中茁壮成长。声学实验室中的研究，得到了大量研究生、博士后研究者和访问学者非常宝贵的支持协作。实验室轻松的氛围、强大的团队协作和无尽的讨论正是让我能够得以完成这本书的不竭动力。在此，我万分感谢声学实验室的研究者们：Jonathan Sheaffer 博士、Jonathan Rathsam 博士、Noam Shabtai 博士、Dror Lederman 博士、Yotam Peled 博士、Etan Fisher 博士、Vladimir Tournabin、Hai Morgenstern、David Alon、Koby Alhainya、Mickey Jeffet、Elad Cohen、Dima Lvov、Or Nadiri、Shahar Villeval、Tal Szpruch、Nejem Huliheh、Ilan Ben-Hagai、Tomer Peleg、Amir Avni、Morag Agmon、Maor Klieder、Dima Haykin、Itai Peer 和 Ilya Balmages。同时，还要特别感谢在来实验室访问的 Franz Zotter 博士，其对本书原稿提出了有用的意见，也要感谢 Debbie Kedar 能够迅捷和专业地对本书进行编辑和校对。最后，感谢我的家人 Vered、Asaf、Yonathan 和 Tal 为我提供了宽松家庭环境，使我最终完成了作品。

Boaz Rafaely 于贝尔·谢巴

2014 年 12 月

目 录

第一章 数学背景知识	1
1.1 球面函数	1
1.2 球谐函数	4
1.3 指数函数和勒让德函数	11
1.4 球傅里叶变换	16
1.5 一些有用的函数	19
1.6 函数的旋转	23
1.7 球卷积和球相关	27
第二章 声学背景	29
2.1 声波方程	29
2.2 球贝塞尔函数和球汉克尔函数	32
2.3 单色平面波	36
2.4 平面波合成	41
2.5 点源	42
2.6 刚性球体周围的声压	44
2.7 场的转换	49
第三章 球面采样	53
3.1 有限阶函数采样	53
3.2 等角采样	54
3.3 高斯采样	59
3.4 均匀和近似均匀采样	60
3.5 采样权值的数值计算	64
3.6 离散球傅里叶变换	66
3.7 空间混叠	67
第四章 球形阵列配置	73
4.1 单个开放球体	73
4.2 刚性球体	76
4.3 心形麦克风开放球体	79

4.4	双半径开放球体	81
4.5	误差稳健性和数值阵列设计	83
4.6	稳健度分析的设计范例	86
4.7	球壳配置	89
4.8	其他配置	91
第五章	球形阵列波束形成	93
5.1	波束形成方程	93
5.2	轴对称波束形成	98
5.3	方向性指数	100
5.4	白噪声增益	102
5.5	简单的轴对称波束形成器	106
5.6	波束形成范例	107
5.7	非轴对称波束方向图导向	112
第六章	最优波束方向图设计	115
6.1	最大方向性波束形成器	115
6.2	最大 WNG 波束形成器	120
6.3	范例: 与 WNG 相对的方向性	123
6.4	混合目标	124
6.5	最大前后比	128
6.6	道尔夫-切比雪夫波束方向图	131
6.7	多目标设计	137
第七章	噪声最小化波束形成	143
7.1	包含噪声的波束形成方程	143
7.2	最小方差无失真响应	147
7.3	范例: 具有传感器噪声和干扰的 MVDR	150
7.4	范例: 具有相关干扰的 MVDR	153
7.5	线性约束最小方差	156
7.6	范例: 具有波束方向图幅度约束的 LCMV	158
7.7	具有导数约束的 LCMV	162
7.8	范例: 具有导数约束的稳健性 LCMV	164
	缩略语与符号表	169
	参考文献	172
	术语对照表	175
	彩图	彩 1

第一章 数学背景知识

摘要: 本章给出了研究球形阵列处理所必需的数学背景知识。因为球形阵列在球面上典型的采样函数(如声压),因此,与一些球面上函数的实例一样,本章首先提出了球坐标系。球谐函数由于其构建了表征球面函数的一组基底,因此成为了本书的一个中心议题。接着本章定义并阐明了球谐函数,随后介绍了球面傅里叶变换,给出了希尔伯特空间里对球面函数的描述。本章最后以为球面函数定义的“旋转”“卷积”和“相关”等论题的说明作为结语。

1.1 球面函数

考虑标准笛卡儿坐标系中的坐标:

$$\mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

式中: \mathbb{R}^3 为实数的三维空间; \mathbf{x} 为一个向量的几何标记法表示形式。具有单位半径的球形表面以 S^2 来表示,它在笛卡儿坐标系中可以被定义为

$$S^2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1 \} \quad (1.2)$$

它表征了距离原点为单位长度的所有位置,这里用 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。 S^2 上的位置可以用俯仰角 θ 和方位角 ϕ 来表示,二者和径向距离(或者半径)一同定义了球坐标:

$$\mathbf{r} \equiv (r, \theta, \phi) \quad (1.3)$$

方位角 ϕ 通过测量从 x 轴向 y 轴方向旋转所掠过的角度得到,而俯仰角 θ 则通过测量从 z 轴向下转动而与之形成的夹角得到,如图 1.1 所示。

球坐标上的一个位置 $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ 可以通过式 (1.4) 映射到在笛卡儿坐标系中,以 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 所表示的同一位置,其映射关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.4)$$

球面函数,或者说定义在单位球面上的函数,在本书中是至关重要的。下面举一个球面函数的例子:

$$f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \cos(2\phi) \quad (1.5)$$

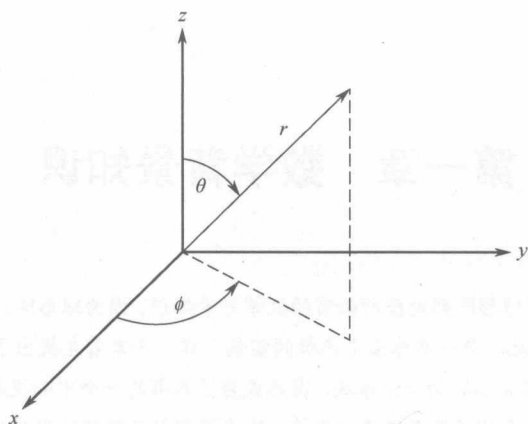


图 1.1 相对于笛卡儿坐标系所定义的球坐标系

这个函数可以通过各种方式形象地展示出来：如图 1.2 所示，可以采用一个单位球表面上的彩色图谱来展示；如图 1.3 所示，可以采用从一个单位球表面映射到 $\theta\phi$ 平面上的彩色等高线图谱来展现；如图 1.4 所示，还可以通过到原点的距离大小（球状图）来展示。在后面的图谱中，青（绿蓝）色阴影部分表示正值，而品红（紫红）色阴影部分表示负值。上述三幅图都展示了对于 θ 变量的一个最大值和两个零点，这是由于 $\sin^2 \theta$ 这一项中 θ 的取值范围是 $\theta \in [0, \pi]$ ；而对于 ϕ 变量，则有两个最大值、两个最小值和四个零点，这是因为 $\cos(2\phi)$ 这一项中 ϕ 的取值范围是 $\phi \in [0, 2\pi]$ 。

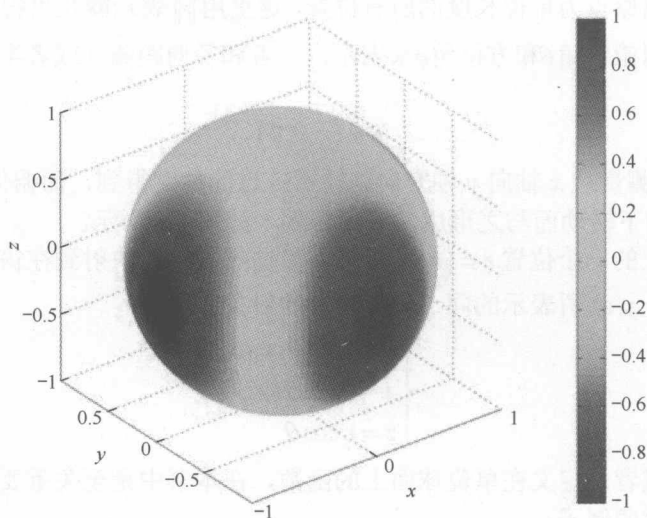


图 1.2 单位球表面上的函数 $f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \cos(2\phi)$ 的图像（见彩图）

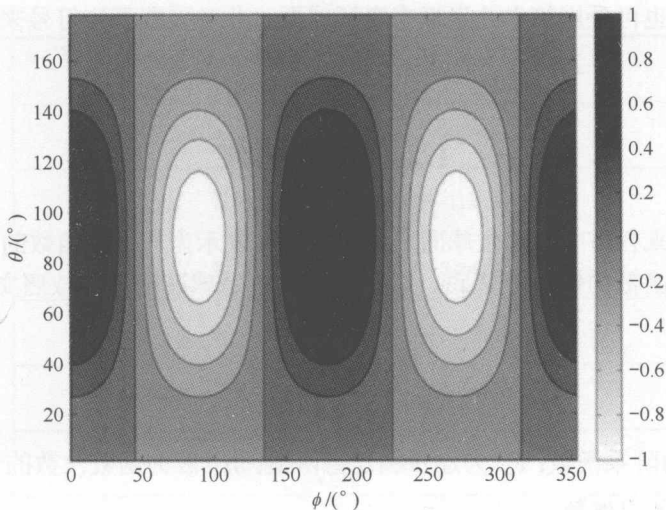


图 1.3 $\theta\phi$ 平面上的函数 $f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \cos(2\phi)$ 的图像

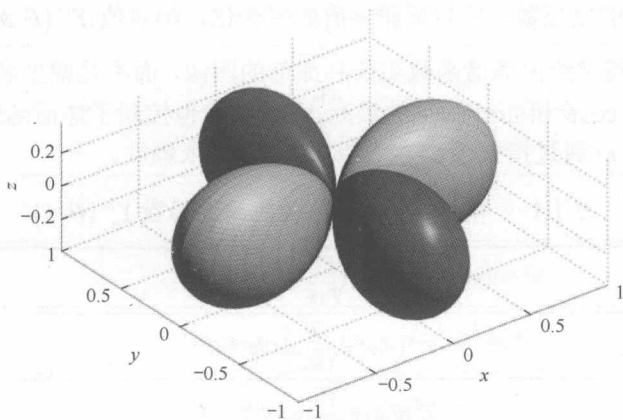


图 1.4 函数 $f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \cos(2\phi)$ 的球状图，依据用 $|f(\theta, \phi)|$ 表示的到原点的距离进行绘制，其中青（绿蓝）色的阴影部分表示 f 的正值，品红（紫红）色的阴影部分表示 f 的负值（见彩图）

本书不只采用了单一的一种标记符来表示单位球面上的函数。一种直接采用球坐标系中的角度来表示的常见标记符也会用于此书，即

$$f(\theta, \phi), (\theta, \phi) \in S^2 \quad (1.6)$$

有时候也希望采用一种更简洁的标记法，这种表示法将两个角度变量表示为一个单一的参数，如 $\mu \equiv \mu(\theta, \phi)$ ，函数可表示为

$$f(\theta, \phi), \mu \equiv \mu(\theta, \phi) \in S^2 \quad (1.7)$$

最后,也可采用笛卡儿坐标来表征球面,此时采取下列符号来加以表示:

$$f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \in S^2 \quad (1.8)$$

1.2 球谐函数

在接下来各节中,单位球面上的函数将被表示为一组基函数的加权和,同时构成了球函数的傅里叶基底。这些基函数正是球谐函数,按照文献[56]定义如下:

$$Y_n^m(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (1.9)$$

式中: $(\cdot)!$ 为阶乘函数; P_n^m 为连带勒让德函数; $m \in \mathbb{Z}$ 为函数次数的整数; $n \in \mathbb{N}$ 为函数阶数的自然数。

表 1.1 列出了阶数从 0 到 4 的球谐函数的表达式^[54]。注意到球谐函数里有一个取决于 ϕ 的复指数,所以无论 ϕ 值如何变化,绝对值 $|Y_n^m(\theta, \phi)|$ 都是恒定不变的。因此,通常给出球谐函数实部和虚部的图像,而不是幅度和相位的图像。阶数 n 决定了 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 两项的最高幂次,同时也控制了球谐函数对于 θ 的依赖性;而次数 m 通过指数项 $e^{im\phi}$ 决定了对于 ϕ 的依赖性。

表 1.1 阶数为 $n=0, \dots, 4$ 的球谐函数 $Y_n^m(\theta, \phi)$

$n=0$	$Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$n=1$	$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}$
	$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
$n=1$	$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$
	$Y_2^{-2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{-2i\phi}$
$n=2$	$Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{-i\phi}$
	$Y_2^0(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$
	$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$
	$Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$

(续表)

n = 3	$Y_3^{-3}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{-3i\phi}$
	$Y_3^{-2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$
	$Y_3^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta e^{-i\phi}$
	$Y_3^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
	$Y_3^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta e^{i\phi}$
	$Y_3^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
	$Y_3^3(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi}$
n = 4	$Y_4^{-4}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{315}{512\pi}} \sin^4 \theta e^{-4i\phi}$
	$Y_4^{-3}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{315}{64\pi}} \cos \theta \sin^3 \theta e^{-3i\phi}$
	$Y_4^{-2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{45}{128\pi}} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$
	$Y_4^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{45}{64\pi}} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta e^{-i\phi}$
	$Y_4^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{9}{256\pi}} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
	$Y_4^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{45}{64\pi}} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta e^{i\phi}$
	$Y_4^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{45}{128\pi}} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
	$Y_4^3(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{315}{64\pi}} \cos \theta \sin^3 \theta e^{3i\phi}$
$Y_4^4(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{315}{512\pi}} \sin^4 \theta e^{4i\phi}$	

图 1.5 展示了球谐函数实部 $\text{Re}\{Y_n^m(\theta, \phi)\}$ 和虚部 $\text{Im}\{Y_n^m(\theta, \phi)\}$ 的球状图像, 视角为 $(\theta, \phi) = (60^\circ, -127.5^\circ)$ 。图中各行展示了从 $n=0$ (顶行) 到 $n=4$ (底行) 的图像, 而图中各列展示了从 $m=-n$ (最左列) 到 $m=n$ (最右列) 的图像。给出了 $m < 0$ 时的 $\text{Im}\{Y_n^m(\theta, \phi)\}$ 和 $m > 0$ 时的 $\text{Re}\{Y_n^m(\theta, \phi)\}$, 实函数 $Y_n^0(\theta, \phi)$ 在正中的列上。为明晰起见, 表 1.2 明确地说明了图 1.5 中给出的函数。图 1.5 显示出 Y_0^0 在球面上是恒定不变的, 这与单极函数是类似的。阶数 $n=1$ 的球谐

函数的实部和虚部具有类似于偶极子的形状，而更高阶数的球谐函数随着 n 和 m 的增大，波瓣数量也随之增加，具有更为复杂的形状。

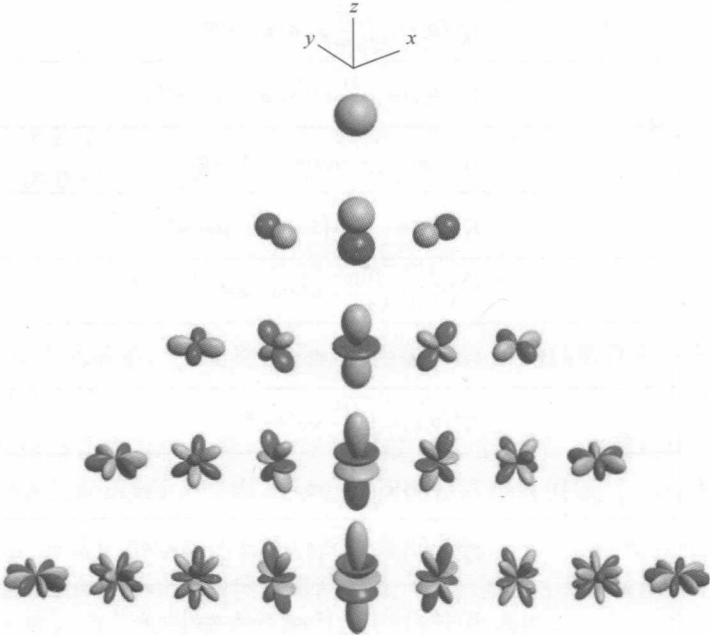


图 1.5 球谐函数的球状图，从 $n=0$ （顶行）到 $n=4$ （底行），实函数 $Y_n^0(\theta, \phi)$ 排在正中的列上。 $\text{Im}\{Y_n^m(\theta, \phi)\} (-n \leq m \leq -1)$ 排在左手边各列上， $\text{Re}\{Y_n^m(\theta, \phi)\} (1 \leq m \leq n)$ 排在右手边各列上。观察方向由图顶部给出的坐标轴的取向来指示。颜色表明了球谐函数的正负号，青（绿蓝）色阴影部分表示正值，而品红（紫红）色阴影部分表示负值（见彩图）

表 1.2 图 1.5 中函数图像的说明

Y_0^0
$\text{Im}\{Y_1^{-1}\} Y_1^0 \text{Re}\{Y_1^1\}$
$\text{Im}\{Y_2^{-2}\} \text{Im}\{Y_2^{-1}\} Y_2^0 \text{Re}\{Y_2^1\} \text{Re}\{Y_2^2\}$
$\text{Im}\{Y_3^{-3}\} \text{Im}\{Y_3^{-2}\} \text{Im}\{Y_3^{-1}\} Y_3^0 \text{Re}\{Y_3^1\} \text{Re}\{Y_3^2\} \text{Re}\{Y_3^3\}$
$\text{Im}\{Y_4^{-4}\} \text{Im}\{Y_4^{-3}\} \text{Im}\{Y_4^{-2}\} \text{Im}\{Y_4^{-1}\} Y_4^0 \text{Re}\{Y_4^1\} \text{Re}\{Y_4^2\} \text{Re}\{Y_4^3\} \text{Re}\{Y_4^4\}$

为了让球谐函数更加清楚地可视化，图 1.6 以和图 1.5 相似的方式展示了从 z 轴方向观察球谐函数的图像，也就是从上方俯视。在这种情况下，球谐函数实部和虚部的运转状态与方位角 ϕ 之间的关系清晰地展现出来。当 $m=0$ 时，无论 ϕ 如何变化，所有的球谐函数都是恒定不变的，而实部以 $\cos(m\phi)$ 的运转

状态呈现，虚部以 $\sin(m\phi)$ 的运转状态呈现。图 1.6 的左边部分（虚部， $m < 0$ ）是该图右边部分（实部， $m > 0$ ）旋转 $90^\circ/m$ 的结果。

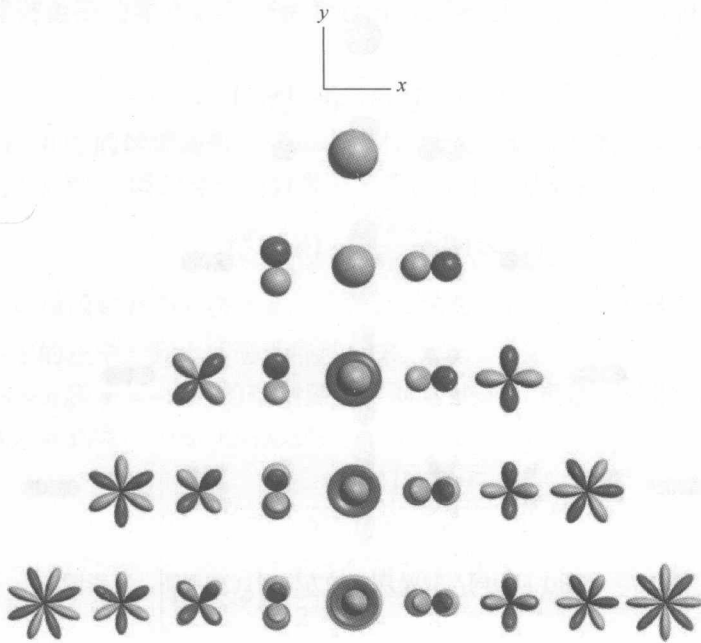


图 1.6 和图 1.5 相同，只是从 z 轴方向看（俯视图，见彩图）

图 1.7 和图 1.8 沿袭了与图 1.6 相同的方法，分别从 x 轴方向和 y 轴方向观察，更加清晰地展示了与 θ 的关系。由于含有 $\cos^n \theta$ 这一项，球谐函数 Y_n^0 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处有一个高位值。其他球谐函数的运转状态更加复杂。例如，球谐函数 Y_n^n 和 Y_n^{-n} 与 $\sin^n \theta$ 项相关，如图 1.7 和图 1.8 中的视角所示，产生了“平坦”状的函数。

下面将给出球谐函数的一些性质，从基本性质开始，发展到包含积分、求和等其他性质。

• **复共轭。** 由于含有复指数项 $e^{im\phi}$ ，因此球谐函数是复函数，而连带勒让德函数 $P_n^m(\cos\theta)$ 全为实数。球谐函数的复共轭采用的表示方式为

$$[Y_n^m(\theta, \phi)]^* = (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \phi) \quad (1.10)$$

式 (1.10) 可由负值 m 的连带勒让德函数表达式 (式 (1.31)) 推导而来。复共轭性质也限定了 $Y_n^m(\theta, \phi)$ 和 $Y_n^{-m}(\theta, \phi)$ 的关系，这两项是相同阶数、相反次数的球谐函数。

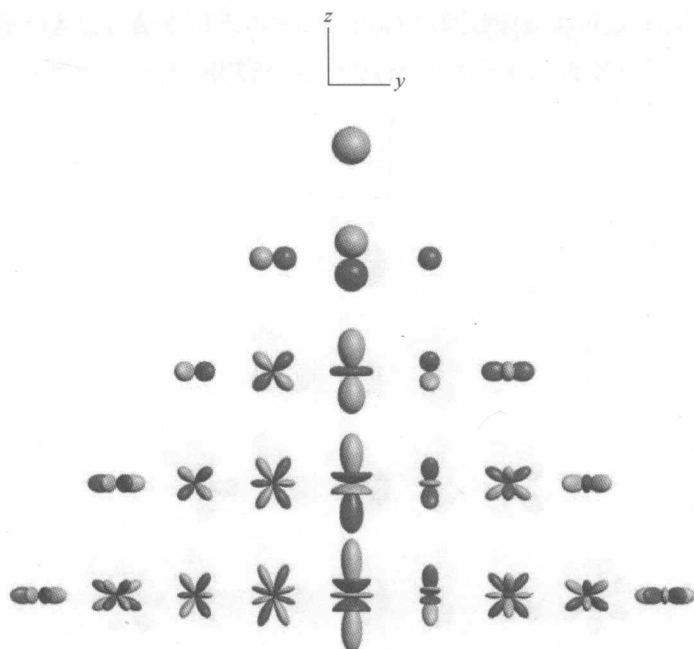


图 1.7 和图 1.5 相同，只是从 x 轴方向看（前视图，见彩图）

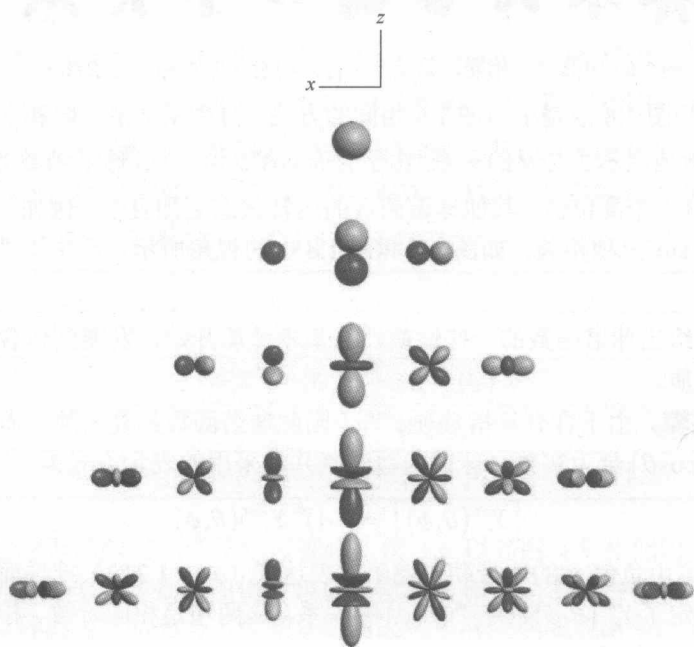


图 1.8 和图 1.5 相同，只是从 y 轴方向看（侧视图，见彩图）

- **次数值 m 的限制。** 根据定义，次数高于阶数的球谐函数值为零，即

$$Y_n^m(\theta, \phi) = 0, \quad \forall |m| > n \quad (1.11)$$

- **球谐函数的零点。** 球谐函数包含 $\sin^{|m|} \theta$ 项，界定了 $m \neq 0$ 时的函数零点，即

$$Y_n^m(0, \phi) = Y_n^m(\pi, \phi) = 0, \quad \forall m \neq 0 \quad (1.12)$$

- **$m = 0$ 时的球谐函数。** 当 $m = 0$ 时，连带勒让德函数退化为勒让德多项式（参见 1.3 节），因此球谐函数有一个简化了的表达式：

$$Y_n^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \theta) \quad (1.13)$$

这些球谐函数并不取决于 ϕ ，且关于 z 轴对称，这一点在图 1.7 和图 1.8 的球谐函数中的正中一列上明确地展现出来。

- **$m = n$ 和 $m = -n$ 时的球谐函数。** 对这些 m 的极值，球谐函数与 θ 具有正弦关系，且具有一个简化的形式：

$$\begin{cases} Y_n^{-n}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^{n+1} n!} \sqrt{\frac{(2n+1)!}{\pi}} \sin^n \theta e^{-in\phi} \\ Y_n^n(\theta, \phi) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1} n!} \sqrt{\frac{(2n+1)!}{\pi}} \sin^n \theta e^{in\phi} \end{cases} \quad (1.14)$$

- **随 θ 变化关于赤道 $\theta = \pi/2$ 具有镜面对称性。** 球谐函数具有关于 θ 的镜面对称性，这使得上半球的函数与下半球的函数相等，取决于符号因子：

$$Y_n^m(\pi - \theta, \phi) = (-1)^{n+m} Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.15)$$

这种对称性通过球谐函数的实部和虚部在图 1.7 和图 1.8 中进行了明确地展示，其中的符号用不同颜色表示。当 $n+m$ 为偶数时，函数关于赤道对称；当 $n+m$ 为奇数时，函数关于赤道反对称。

- **关于 ϕ 对称。** 由于含有指数函数，球谐函数关于 ϕ 镜面对称，这使得

$$Y_n^m(\theta, \phi + \pi) = (-1)^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.16)$$

这个性质在图 1.6 中进行了展示：当 m 为偶数时，球谐函数和由 ϕ 定义的圆周的另一边也与其对等；当 m 为奇数时，球谐函数和由 ϕ 定义的圆周的另一边异号（不同的颜色），沿着 ϕ 具有 180° 相移。

同样地，因为含有指数函数，另一个对称性体现在 ϕ 关于 x 轴对称：

$$Y_n^m(\theta, -\phi) = [Y_n^m(\theta, \phi)]^* \quad (1.17)$$

图 1.6 在该图的右边边各列上展示了球谐函数的实数部分，它们都关于 x 轴对称；而函数的虚部关于 x 轴反对称。