

CAMBRIDGE

压缩感知

理论与应用

Theory and Applications

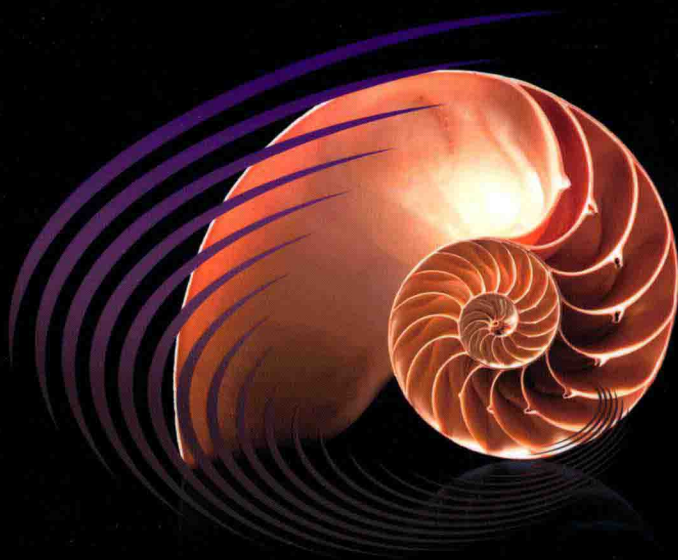
[以色列] 约琳娜·C.埃尔达 (Yonina C. Eldar)

等著

[德国] 吉塔·库图尼奥克 (Gitta Kutyniok)

梁栋 王海峰

等译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

压缩感知理论与应用

Compressed Sensing: Theory and Applications

[以色列] 约琳娜·C. 埃尔达 (Yonina C. Eldar) 等著
[德国] 吉塔·库图尼奥克 (Gitta Kutyniok)
梁栋 王海峰 胡隽 朱燕杰 彭玺 译



机械工业出版社

This is a translation of the following title published by Cambridge University Press:

Compressed Sensing: Theory and Applications/9781107005587

© Cambridge University Press 2012

This translation for the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press and China Machine Press 2019

This translation is authorized for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) only. Unauthorized export of this translation is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of Cambridge University Press and China Machine Press.

本书由 Cambridge University Press 授权机械工业出版社在中国境内（不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区）出版与发行。未经许可之出口，视为违反著作权法，将受法律之制裁。

北京市版权局著作权合同登记 图字：01-2013-1415 号。

图书在版编目 (CIP) 数据

压缩感知理论与应用/ (以) 约琳娜 C. 埃尔达 (Yonina C. Eldar) 等著; 梁栋等译. —北京: 机械工业出版社, 2019. 1

书名原文: Compressed Sensing: Theory and Applications

ISBN 978-7-111-61264-3

I. ①压… II. ①约…②梁… III. ①数字信号处理-研究 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 249829 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 阎洪庆 责任编辑: 阎洪庆

责任校对: 刘志文 封面设计: 马精明 责任印制: 孙 炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2019 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 240mm · 27 印张 · 671 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-61264-3

定价: 129.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88361066

机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: 010-68326294

机工官博: weibo.com/cmp1952

010-88379203

金书网: www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

教育服务网: www.cmpedu.com

压缩感知是一个令人振奋、发展迅速的领域，在电气工程、应用数学、统计学和计算机科学等领域引起了相当大的关注。自推出以来，已经取得了大量理论和实践方面的成果。本书首先重点介绍了最近的理论进展和一系列应用，并概述了许多目前的研究挑战。接着，在全面回顾了基本理论之后，介绍了该领域的许多前沿进展，包括先进的信号建模、模拟信号的亚奈奎斯特采样、硬件原型、随机矩阵的非渐近分析、自适应感知、贪婪算法、图模型的使用，以及形态上不同数据成分的分离。本书每一章都是由该领域国际知名的研究人员撰写的。

本书适合压缩感知相关领域的学术研究人员、工程技术人员阅读，也可作为相关专业高年级本科生和研究生的参考教材。

译者序

压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 是一种新兴的信息获取与处理理论, 最早是在 2006 年由 D. Donoho、E. Candes、J. Romberg 及陶哲轩等人提出。这一理论指出, 我们可以充分利用信号中的稀疏性先验信息, 在远低于奈奎斯特采样频率的情况下, 从采样样本中精确地重建原始信号。并且, 在满足一定的条件下, 重建原始信号是一个可计算的多项式时间问题。所以, 在压缩感知理论提出的十几年时间里, 其在信号处理及其相关领域引起广泛的关注, 迅速被应用于网络通信、雷达测量、图像处理、医学成像、生物传感等诸多的领域。

本书是由著名的剑桥大学出版社出版, 其作者都是压缩感知领域国际知名的学者, 他们在基于稀疏采集的压缩感知重建理论方面的造诣有目共睹。本书从最基本的压缩感知理论出发, 介绍了压缩感知重建框架的理论和相应算法, 同时还有相关定理及引理的证明, 然后给出压缩感知领域近年来出现的一些重要结论的综述。本书的特点有: ①采用图文并茂的方式详细介绍了压缩感知相关理论; ②内容前沿而且新颖, 书中内容都是最近的压缩感知研究成果; ③内容涉及面广, 书中的内容包含了一系列相关的重要研究领域。因此, 本书是压缩感知学术研究人员、工程技术人员不可多得的参考书, 也可以作为高年级本科生和研究生的压缩感知课程的教材。

参与本书翻译工作的有中国科学院深圳先进技术研究院梁栋、王海峰、朱燕杰、彭玺, 北京控制工程研究所胡隽。中国科学院深圳先进技术研究院丁玉琼、冯歌, 中国科学院大学研究生贾森、刘元元、丘志浪、程静、程慧涛、柯子文、王婉婷、陈艳霞等, 为本书的翻译工作提供了支持和协助, 在此深表谢意!

由于本书涉及的知识内容新颖, 因此许多术语尚无固定译法。由于时间仓促, 译者水平有限, 内容也难免有差错, 恳请读者批评指正。

梁栋 王海峰

2018 年 9 月于深圳大学城

原 书 前 言

压缩感知 (CS) 是一门发展迅猛的学科, 因其令人振奋的显著成效, 已经在电气工程、应用数学、统计学和计算机科学等领域获得高度关注。从压缩感知的概念在几年前首次提出到现在, 其已经在理论以及实践上硕果累累。各种学术会议、研讨会以及专题报告一直致力发展这一日益重要的研究领域。本书首次全面介绍了这一主题, 重点介绍了最近的理论进展和一系列的应用实例, 并概述了许多目前还未解决的研究难题。

压缩感知为同时感知和压缩有限维向量提供了一个依赖于线性降维的框架。令人惊讶的是, 它预测到所有具有稀疏表达的高维信号都可以通过有效算法, 从高度不完整的测量数据中恢复。具体而言, 就是假设 x 是一个长度为 n 的向量。在压缩感知理论中, 我们不直接测量 x , 而是通过使用一个大小为 $m \times n$ 的压缩感知矩阵 A , 获取形式 $y = Ax$ 的 $m < n$ 线性测量。理想情况下, 矩阵设计为能够尽可能地减少测量次数, 同时又能够从其测量向量 y 中恢复这一类信号。因此, 我们很愿意选择远小于 n 的 m 来测量。但这导致了矩阵 A 不满秩, 意味着它具有非空零空间, 同时意味着对于任意特定信号 x_0 , 将会有无数信号 x , 产生和 x_0 相同的测量 $y = Ax = Ax_0$ 。为了能够实现信号恢复, 我们就必须限制输入信号 x 为一类特殊的信号。

信号的稀疏性是压缩感知中最流行的信号结构。最简单的情形下, 稀疏性意味着 x 只有少量的非零值。更广泛地说, 当 x 以某种适当的方式表示是稀疏时, 就可以应用压缩感知思想。压缩感知核心理论有个惊人的结果: 如果 x (或 x 的合适表示) 是 k 稀疏的, 即它至多有 k 个非零元素, 那么它可以通过 $y = Ax$ 使用数量级为 $k \log(n)$ 的测量 m 来恢复信号。此外, 重建算法的复杂度可以是简单的多项式时间量级。并且可以证明这些算法对 x 的噪声和错误建模是鲁棒的。压缩感知的首批研究论文大多致力于分析压缩感知的矩阵 A 的理论保证, 以期实现稳定的恢复并开发出高效的算法。

信号的稀疏性这一基本发现为信号处理、图像恢复和压缩算法带来了全新的方法, 在本书中也列举了从压缩感知中受益的一些领域。有趣的是, 压缩感知的研究领域源自于近似理论、Banach 空间理论、凸优化、框架理论、数值线性代数、随机矩阵理论以及信号处理等众多领域。数学家、计算机科学家和工程师共同努力为压缩感知理论和应用做出了卓越的贡献。这包括各种高效感知矩阵、用于稀疏恢复的快速算法、稀疏概念扩展到更一般的信号结构 (包括低秩矩阵和模拟信号模型)、依赖压缩感知思想的亚奈奎斯特转换器的硬件设计, 以及雷达分析、人脸识别、图像处理和生物学成像的应用等。此外, 压缩感知还有望通过利用信号结构来提高分辨率。在这些设置中有效地利用可用的自由度, 可能会彻底改变许多应用, 如雷达和显微镜。现在的显微学、民用和军用监视、医学成像、雷达以及其他许多应用都依赖于有效的采样, 且分辨率有限。降低这些应用中的采样率并提高分辨率可以改善用户体验, 增加数据传输, 提高成像质量, 减少曝光时间。

本书是第一本提供压缩感知全面概述的专著。本书的潜在读者可能是应用数学、计算机科

学、电子工程或者相关研究领域的研究人员,也可能是寻求了解压缩感知的研究生。本书既可作为研究人员的最新参考资料,也可作为研究生的教科书。

本书包含 12 章,均由压缩感知领域的国际著名专家撰写,涵盖了多个主题。本书以对压缩感知的全面介绍开始,作为后面几章的背景,并设置了贯穿全书的符号。第 1 章不要求任何该领域的预备知识,而接下来的章节分为四部分:扩展信号模型(第 2~4 章),感知矩阵设计(第 5、6 章),恢复算法和性能保证(第 7~9 章),以及应用(第 10~12 章)。这些内容是独立的,涵盖了相关主题的最新研究成果,并且可以独立于其他内容进行阅读。下面给出每章的简要概述。

第 1 章全面介绍了压缩感知的基础知识。在简要的历史概述之后,本章首先讨论稀疏性和其他低维信号模型。然后,作者讨论如何从一组小规模测量中准确地恢复高维信号的中心问题,并为各种稀疏恢复算法提供了性能保证。本章最后讨论了稀疏恢复框架的一些扩展。

第 2 章超越了传统的稀疏建模,并解决了协作式结构化稀疏,为稀疏表示添加了稳定性和先验信息。在结构化稀疏建模中,将字典原子分组而不是将其视为单子,并且一次选择几个组进行信号编码。然后通过协作添加更多结构,其中允许遵循相同模型的多个信号在编码中协作。作者讨论了这些模型在图像恢复和盲源分离中的应用。

第 3 章将压缩感知泛化为模拟信号的降速采样。它介绍了 Xampling,这是一个用于低速采样和处理联合子空间信号的统一框架。整个过程倡导硬件导向的观点,解决实际制约因素,并举例说明亚奈奎斯特系统的硬件实现。在 Xampling 的统一框架内回顾了一些模拟压缩感知的应用,包括带有未知载波频率的多频带通信、超声成像和宽带雷达等。

第 4 章讨论了有限新息率(FRI)模拟信号(如来自离散测量的脉冲流)的降速采样过程。为了充分描述 FRI 信号,需要利用每单位时间只有少量参数的前提,用低于奈奎斯特的速率采样它们。作者提供了理论和算法的概述,以及在诸如超分辨率、雷达和超声等领域的多种应用。

第 5 章讨论了具有性能保证的随机压缩感知矩阵的构造。作者提供了随机矩阵理论中基本的非渐近方法和概念的概述。从几何功能分析到概率论的几个工具放在一起分析随机矩阵的极端奇异值,这使得随机矩阵可用于压缩感知中的感知。

第 6 章研究了使用在整个测量过程中收集的信息自适应聚焦感应的顺序测量方案的优点。这与基于非适应性测量假设的大多数稀疏恢复的理论和方法形成对比。具体而言,作者表明当测量值被加性噪声污染时,自适应感知可能更加强大。

第 7 章介绍了一个统一的高维几何框架用于分析稀疏恢复中 l_1 最小化的相变现象。该框架将研究 l_1 最小化的相变与计算高维凸几何中的 Grassmann 角度相联系。作者进一步展示了这种为相关恢复方法提供了明显相变的 Grassmann 角度框架的广泛应用。

第 8 章概述了几种贪婪算法并探讨了它们的理论性质。贪婪算法非常快且易于实现,并且通常具有与凸方法相似的理论性能保证。作者详细介绍了稀疏恢复的一些主要贪婪方法,并将这些方法扩展到更一般的信号结构。

第 9 章概述了近期在应用图模型和消息传递算法,以解决大规模正则化回归问题方面的工作。特别关注利用 l_1 惩罚的最小二乘法进行压缩感知重构。作者讨论了如何导出快速近似的消息传递算法来解决这个问题,并展示了如何通过分析这种算法来证明精确的高维极限结果的恢复

误差。

第 10 章讨论了在压缩领域直接进行学习的压缩学习。作者提供了严格的界限以证明测量域中的线性核 SVM 分类器有很大可能与数据域中最佳线性阈值分类器有接近的准确度。这一章还展示了应用于飞行上的著名压缩感知矩阵族的压缩学习。然后,作者展示了在纹理分析情景下的结果。

第 11 章概述了通过稀疏表示进行数据分离的方法。作者讨论了在由两种或以上形态/不同成分的组成中使用稀疏性。核心思想是选择由不同框架构成的过完备表示,每个框架都需提供每一个待提取成分的稀疏扩展,然后将成分之间的形态差异编码为允许使用压缩感知算法分离框架的非相干条件。

第 12 章将压缩感知应用于人脸识别的经典问题。作者考虑了在现实世界中干扰识别人脸的问题,如遮挡、姿态和光照的变化等,提出了一种方法,其主要思想是使用来自单个主题类别的少量训练图像来解释任何搜索图像。然后将这个核心思想推广到解决人脸识别时遇到的各种物理变化中。作者展示了由此方法产生的系统如何能够高精度地从数百个对象数据库中准确识别出对象。

原书作者名单

Zvika Ben - Haim (以色列理工学院)
Thomas Blumensath (英国牛津大学)
Robert Calderbank (美国杜克大学)
Alexey Castrodad (美国明尼苏达大学)
Mark A. Davenport (美国斯坦福大学)
Michael E. Davies (英国爱丁堡大学)
Pier Luigi Dragotti (英国帝国理工学院)
Marco F. Duarte (美国杜克大学)
Yonina C. Eldar (以色列理工学院)
Arvind Ganesh (美国伊利诺伊大学)
Babak Hassibi (美国加州理工学院)
Jarvis Haupt (美国明尼苏达大学)
Sina Jafarpour (美国普林斯顿大学)
Gitta Kutyniok (德国柏林理工大学)
Yi Ma (中国微软亚洲研究院)
Moshe Mishali (以色列理工学院)
Andrea Montanari (美国斯坦福大学)
Robert Nowak (美国威斯康星大学)
Ignacio Ramirez (美国明尼苏达大学)
Gabriel Rilling (英国爱丁堡大学)
Guillermo Sapiro (美国明尼苏达大学)
Pablo Sprechmann (美国明尼苏达大学)
Jose Antonio Uriguen (英国帝国理工学院)
Roman Vershynin (美国密歇根大学)
Andrew Wagner (美国伊利诺伊大学)
John Wright (中国微软亚洲研究院)
Weiyu Xu (美国康奈尔大学)
Allen Y. Yang (美国加州大学伯克利分校)
Guoshen Yu (美国明尼苏达大学)
Zihan Zhou (美国伊利诺伊大学)

目 录

译者序

原书前言

原书作者名单

第1章 压缩感知简介	1
1.1 引言	1
1.2 向量空间综述	3
1.2.1 赋范向量空间	3
1.2.2 基底和框架	4
1.3 低维信号模型	5
1.3.1 稀疏模型	6
1.3.2 子空间的有限集合	9
1.3.3 模拟信号模型的子空间集合	10
1.3.4 低秩矩阵模型	10
1.3.5 流形和参数模型	11
1.4 感知矩阵	11
1.4.1 零空间条件	12
1.4.2 约束等距性质 (RIP)	14
1.4.3 相干性	18
1.4.4 构造感知矩阵	19
1.5 基于 ℓ_1 最小化方法的信号重建	20
1.5.1 不含噪声的信号重建	21
1.5.2 含噪声的信号重建	22
1.5.3 情况 - 最优保证条件回顾	26
1.5.4 正多面体与相位变化	27
1.6 信号重建算法	28
1.7 多维测量向量	31
1.8 总结	33
附录 第1章的证明	33
A.1 定理1.4的证明	33
A.2 引理1.3的证明	34
A.3 引理1.6的证明	36
A.4 定理1.13的证明	37
参考文献	38

第2章 第二代稀疏建模：结构化和协作

信号分析	51
2.1 引言	51
2.2 图像复原和逆问题	52
2.2.1 传统稀疏模型	53
2.2.2 结构化稀疏模型	54
2.2.3 实验结果	57
2.3 用结构和协作模型鉴别和分离源	59
2.3.1 分组 Lasso	60
2.3.2 分层 Lasso	61
2.3.3 协作分层 Lasso	62
2.3.4 实验结果	63
2.4 总结	65
参考文献	66

第3章 Xampling：模拟信号的

压缩感知	69
3.1 引言	69
3.2 从子空间到联合空间	71
3.3 Xampling	73
3.3.1 子空间联合	73
3.3.2 架构	74
3.4 稀疏平移不变框架	76
3.4.1 平移不变子空间中的采样	76
3.4.2 SI 子空间的稀疏联合	77
3.4.3 无限测量模型和连续有限 测量模型	79
3.5 从理论到多频段采样的硬件	81
3.5.1 信号模型和稀疏 SI 公式	81
3.5.2 通过不均匀采样的模拟 压缩感知	82

3.5.3 建模实用的 ADC 器件	84	4.4.3 提高采样噪声鲁棒性的 FRI 技术	141
3.5.4 调制宽带转换器	85	4.5 仿真	143
3.5.5 硬件设计	86	4.5.1 无噪声环境下的采样和重建	143
3.5.6 亚奈奎斯特信号处理	90	4.5.2 噪声环境下的采样和重建	144
3.6 有限新息率信号	91	4.5.3 周期 FRI 信号与半 周期 FRI 信号	147
3.6.1 模拟信号模型	91	4.6 扩展和应用	149
3.6.2 压缩信号采集	92	4.6.1 采样分段正弦信号	149
3.6.3 恢复算法	94	4.6.2 信号压缩	151
3.7 新息信号序列	95	4.6.3 超分辨率成像	152
3.7.1 模拟信号模型	96	4.6.4 超声成像	152
3.7.2 压缩信号采集	96	4.6.5 多径介质识别	153
3.7.3 恢复算法	97	4.6.6 超分辨率雷达	154
3.7.4 应用	98	附录 Cramér - Rao 界限推导	155
3.8 联合建模与有限离散化	99	参考文献	159
3.8.1 随机解调器	99	第 5 章 随机矩阵的非渐近分析	162
3.8.2 有限模型灵敏度	100	5.1 引言	162
3.8.3 硬件复杂度	102	5.1.1 渐近和非渐近的体系	162
3.8.4 计算负载	105	5.1.2 高矩阵是近似等距同构的	163
3.8.5 模拟与离散 CS 雷达	106	5.1.3 模型和方法	163
3.9 讨论	107	5.1.4 应用	164
3.9.1 将 CS 扩展到模拟信号	108	5.1.5 相关资源	164
3.9.2 CS 是否是一个通用采样方案	109	5.2 预备知识	165
3.9.3 总结	110	5.2.1 矩阵及其奇异值	165
参考文献	111	5.2.2 网络	166
第 4 章 新息率采样：理论和应用	116	5.2.3 亚高斯随机变量	167
4.1 引言	116	5.2.4 亚指数随机变量	170
4.1.1 采样方案	117	5.2.5 各向同性随机向量	172
4.1.2 FRI 历史	118	5.2.6 独立随机矩阵的求和	174
4.1.3 本章概览	119	5.3 具有独立元素的随机矩阵	176
4.1.4 符号和约定	119	5.3.1 极限定理和高斯矩阵	176
4.2 有限新息率信号	120	5.3.2 具有独立元素的一般随机矩阵	178
4.2.1 FRI 信号定义	120	5.4 具有独立行的随机矩阵	178
4.2.2 FRI 信号例子	121	5.4.1 亚高斯行	179
4.3 无噪声环境中 FRI 信号的 采样与恢复	124	5.4.2 重尾行	181
4.3.1 使用 sinc 核进行采样	124	5.4.3 应用：估算协方差矩阵	185
4.3.2 使用加和的 sinc 核进行采样	126	5.4.4 应用：随机子矩阵和子框架	187
4.3.3 使用指数生成核进行采样	129	5.5 具有独立列的随机矩阵	189
4.3.4 多通道采样	131	5.5.1 亚高斯列	190
4.4 噪声对 FRI 恢复的影响	136		
4.4.1 连续时间噪声下的性能界限	137		
4.4.2 采样噪声下的性能界限	139		

5.5.2 重尾列	193	7.8 弱、部分和强鲁棒性	254
5.6 约束等距同构	196	7.9 ζ 界限的数值计算	257
5.6.1 亚高斯约束等距同构	197	7.10 加权 ℓ_1 最小化的恢复阈值	259
5.6.2 重尾约束等距同构	199	7.11 近似支撑恢复和迭代重加权 ℓ_1	262
5.7 注释	202	7.12 总结	262
参考文献	205	7.13 附录	263
第6章 自适应感知的稀疏重建	210	7.13.1 内角的推导	263
6.1 引言	210	7.13.2 外角的推导	264
6.1.1 去噪	210	7.13.3 引理7.7的证明	266
6.1.2 逆问题	212	7.13.4 引理7.8的证明	266
6.1.3 贝叶斯的角度	212	参考文献	267
6.1.4 结构稀疏性	213	第8章 压缩感知贪婪算法	270
6.2 贝叶斯自适应感知	214	8.1 贪婪算法, 凸集最优化的一个灵活 替代算法	270
6.2.1 使用一个简单生成模型进行 贝叶斯推理	216	8.2 贪婪追踪	270
6.2.2 使用多成分模型进行 贝叶斯推理	219	8.2.1 基本框架	271
6.2.3 量化性能	221	8.2.2 系数更新变型	273
6.3 准贝叶斯自适应感知	223	8.2.3 元素选择的几种变型	275
6.3.1 用非自适应测量去噪	223	8.2.4 计算	277
6.3.2 蒸馏感知	224	8.2.5 性能保证	278
6.3.3 压缩感知中的蒸馏法	229	8.2.6 经验比较	280
6.4 相关工作和进一步阅读的建议	233	8.3 阈值类算法	281
参考文献	233	8.3.1 迭代硬阈值	281
第7章 压缩感知的基本阈值方法: 一种 高维几何方法	236	8.3.2 压缩采样匹配追踪和 子空间追踪	286
7.1 引言	236	8.3.3 实验比较	288
7.1.1 ℓ_1 最小化鲁棒性的阈值边界	238	8.3.4 恢复证明	289
7.1.2 加权和迭代重加权 ℓ_1 最 小化阈值	239	8.4 由贪婪算法推广到结构化模型	291
7.1.3 与其他阈值边界的比较	240	8.4.1 子空间联合模型	291
7.1.4 高维几何的一些概念	241	8.4.2 采样并重建子空间联合信号	293
7.1.5 组织结构	242	8.4.3 性能保证	295
7.2 零空间特征	242	8.4.4 恢复条件何时成立	298
7.3 零空间特征的 Grassmann 角框架	245	8.4.5 实验比较	300
7.4 评估阈值界限 ζ	248	8.4.6 MMV 问题中的秩结构	300
7.5 内角指数的计算	250	8.5 总结	303
7.6 外角指数的计算	252	参考文献	304
7.7 $\rho_N(\delta, C)$ 的存在性与缩放	254	第9章 压缩感知中的图模型概念	308
		9.1 引言	308
		9.2 基本模型及其图结构	310
		9.3 标量情形	311

9.4 消息传递的推导	315	压缩学习中的作用	359
9.4.1 最小和算法	315	10.8.4 使用 Delsarte – Goethals 框架的平均 情况距离保真	362
9.4.2 通过二次近似简化最小和	316	10.9 主要平均情况压缩学习结果的 证明	370
9.5 近似消息传递	317	10.9.1 引理 10.5 的证明	370
9.5.1 AMP 算法及其性质	317	10.9.2 定理 10.6 的证明	372
9.5.2 AMP 算法的推导	319	10.10 总结	374
9.6 高维分析	320	参考文献	374
9.6.1 AMP 算法的一些数值实验	320	第 11 章 基于稀疏表示的数据分离	377
9.6.2 状态演变	322	11.1 引言	377
9.6.3 LASSO 的风险	325	11.1.1 形态学成分分析	378
9.6.4 去耦原理	327	11.1.2 分离算法	378
9.6.5 状态演变的启发式推导	328	11.1.3 分离结果	378
9.6.6 噪声敏感度相变	329	11.1.4 稀疏字典的设计	379
9.6.7 普适性	331	11.1.5 提纲	379
9.6.8 与其他分析方法的比较	332	11.2 分离估计	379
9.7 范化	333	11.2.1 数据分离估计与欠定问题的关系	380
9.7.1 结构化先验信息	334	11.2.2 一般性的分离估计	381
9.7.2 稀疏感知矩阵	336	11.2.3 创新观点: 聚集稀疏	383
9.7.3 矩阵的填充	337	11.2.4 与测不准原理的关系	387
9.7.4 广义回归	338	11.3 信号分离	388
参考文献	338	11.3.1 正弦和尖峰的分​​离	388
第 10 章 在压缩干草堆中找针	343	11.3.2 进一步研究	390
10.1 引言	343	11.4 图像分离	390
10.2 背景及符号	344	11.4.1 实证研究	391
10.2.1 符号	344	11.4.2 理论结果	393
10.2.2 集中不等式	345	参考文献	397
10.2.3 群论	345	第 12 章 人脸识别的稀疏表示	399
10.3 支持向量机	345	12.1 引言	399
10.4 近等距投影	347	12.2 问题公式表达: 基于稀疏 表示的分类	401
10.5 定理 10.3 的证明	348	12.3 降维	403
10.6 通过 Johnson – Lindenstrauss 特性的 距离保真	351	12.4 识别损坏的和遮挡的图像	404
10.7 通过随机投影矩阵的最坏 情况 JL 特性	355	12.5 人脸对准	405
10.7.1 Johnson – Lindenstrauss 和 随机感知	355	12.6 快速 l_1 最小化算法	409
10.7.2 实验结果	357	12.7 建立一个完整的人脸识别系统	412
10.8 通过显式投影矩阵的平均 情况 JL 特性	358	12.8 整个系统的评估	413
10.8.1 相干性的全局测量	358	12.9 总结和讨论	415
10.8.2 平均情况压缩学习	358	参考文献	416
10.8.3 两个基本的相干性测量及它们在			

第1章 压缩感知简介

Mark A. Davenport, Marco F. Duarte, Yonina C. Eldar, Gitta Kutyniok

压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 是一个令人振奋、快速成长的领域, 被广泛用于信号处理、统计学、计算机科学及更广泛的科学领域。自从其在几年前被初次提出以来, 成千上万的文章出现在这一领域, 而且举办了很多专门针对这一主题的学术会议、研讨会及特别会议。本章将回顾一些有关压缩感知的基础理论。本章可以作为新入门压缩感知领域的读者的一个综述或者已在这个领域的科研人员的一个参考。本章主要集中在有限维稀疏重构的理论和算法。在本书其余的章节, 我们将看到在本章中给出的基础知识被推广和拓展到很多方向, 包括在模拟信号和时间离散信号中描述结构信息的新模型、新感知矩阵的设计技术等, 也将看到更多漂亮的重建结果和新的重建算法, 以及基础理论及其扩展的新兴应用。

1.1 引言

我们正处于一场数字革命中, 这场数字革命推动了各种新型高保真高分辨感知系统的发展和应。这场革命的理论基础是 Kotelnikov、Nyquist、Shannon 和 Whittaker 等人在时间连续带限信号采样方面的开创性工作^[162,195,209,247]。他们的结论论证了当采样频率满足“奈奎斯特采样率”即感兴趣信号的最高频率的两倍时, 信号、图像、视频和其他数据可以从均匀间隔采样中准确恢复。基于这个发现, 很多信号处理已经从模拟转向了数字领域, 搭上了摩尔定律的浪潮。数字化使得感知和处理系统更加健壮、灵活、便宜, 而且与它的模拟部分比起来有更广泛的应用。

由于数字化的成功, 从感知系统中产生的数据已经由涓涓细流发展成了更大的洪流。不幸的是, 在许多重要和新兴的应用中, 奈奎斯特采样率太高, 以至于我们不得不采集太多的样本。相应地, 制造能够以这样的采样率获得样本的设备可能太昂贵甚至是无法实现的^[146,241]。所以, 尽管在计算能力上有了非凡的进步, 获取和处理图像、视频、医学成像、远程监控、光谱和基因组数据分析等应用领域的信号仍然是个巨大的挑战。

为了解决处理此类高维数据在逻辑及计算上的挑战, 我们通常采取压缩的方法。该方法的目的是找到信号一个最简洁的表示, 且该表示的失真能够接受的。信号压缩中一种最流行的技术是变换域编码。它依赖于能否找到感兴趣信号的稀疏或者可压缩表示的一个基或者框架^[31,77,106]。稀疏指的是当信号长度为 n 时, 可以表示为 $k \ll n$ 的非零系数; 压缩指的是信号可以被只有 k 个非零系数的信号很好地逼近。稀疏和压缩的信号都可以通过只保留该信号一些最大系数的值和位置被高保真地表示。这个过程被称为“稀疏近似”, 也就构成了利用信号的稀疏性和可压缩性进行变换编码机制的基础, 包括 JPEG、JPEG2000、MPEG 及 MP3 标准。

利用变换域编码的技术, 压缩感知已经成为信号采集和传感器设计的新框架, 它使得具有

稀疏和压缩表示特性的信号的采样和计算成本大大降低。奈奎斯特-香农采样定理指出,为了完美获取任意的带限信号,则需要特定的最小数量的样本,但当信号是已知的稀疏时,则可以显著降低所需要采样数量,从而降低数据存储。因此,在感知稀疏信号时,我们可以比传统方法得到更好的结果,比如在保证信号恢复质量的同时减少采样数量。压缩感知背后的基本理念是,我们倾向于找出直接从压缩格式中感知数据的方法,即使用一个更低的采样率,而不是先用一个高采样率采样然后压缩采样数据。Candes、Romberg、Tao 及 Donoho 等人在压缩感知领域做出了许多显著的工作,他们指出一个具有稀疏表示或者可压缩表示的有限维度信号可由少量线性的、非自适应的测量重建^[3,33,40-42,44,82]。这些测量方案的设计,以及测量方案在实际数据模型和采集系统的扩展,是压缩感知领域中的一个主要挑战。

尽管压缩感知近年才被广泛用于信号处理领域,但其最初源头可追溯到 18 世纪。早在 1795 年, Prony 等人给出了估计参数的一个算法:在噪声存在的条件下,通过一小部分的复指数采样获得参数^[201]。接下来的一个理论发展阶段是 20 世纪早期, Caratheodory 等人指出,任何 k 个正弦曲线的正线性组合都由其在 $t=0$ 处的值和在任何其他 $2k$ 个时间点的值唯一确定^[46,47]。当 k 很小且可能的频率范围很大时,这代表样本远远少于奈奎斯特样本的数量。在 20 世纪 90 年代,这项工作由 George、Gorodnitsky 和 Rao 等人推广,他们研究了生物磁成像和其他背景下的稀疏性^[134-136,202]。同时, Bresler、Feng 和 Venkatamani 提出了一种采样方案,用于在可能的频谱支持的限制下,获得由具有非零带宽的 k 个分量组成的某些类别的信号(与纯正弦波相反),尽管一般不保证精确恢复^[29,117,118,237]。在 21 世纪早期, Blu、Marziliano 和 Vetterli 等给出了一类参数化信号的采样方法,这些信号仅有 k 个参数,他们指出这些信号可以由从仅仅 $2k$ 个采样中采样和恢复^[239]。

另一个与部分观测量重建信号相关的问题就是傅里叶变换。Beurling 提出了针对这些观察值的外插值方法,来确定它们完整的傅里叶变换系数^[22]。若一个信号是由有限个脉冲组成,那么 Beurling 的方法可以从任意足够大的傅里叶变换系数重建出完整的傅里叶变换。他的方法——用来在所有信号中通过获得傅里叶观测值寻找最小的 ℓ_1 范数——为在压缩感知中使用的一些算法给出了合理的解释。

最近, Candes、Romberg、Tao^[33,40-42,44] 及 Donoho^[82] 等人指出若一个信号有稀疏表示,那么它可由一系列线性的、非自适应的观测量精确重建。这个结果表明通过比较少的观测量就可将信号稀疏感知表示,这也是压缩感知的名字由来。然而,注意到,压缩感知与其他经典的采样方式有三个重要的不同。第一,采样理论通常考虑无限长、连续的信号。压缩感知关注有限维向量,压缩感知是一种数学理论方法。第二,对比在特定的时间点采样信号,压缩感知则是通过信号间的内积或者更一般地通过检验函数来获得观测量。事实上这是现代采样理论的一个中心思想,类似于通过线性观测量来获得信号^[113,230]。纵观本书,我们将看到随机性在设计这些检验函数的过程中起着非常重要的作用。第三,两种框架在处理信号重建的方式不一样,即从压缩观测量中重建出原始的信号的方式不一样。奈奎斯特-香农采样框架下的信号重建是由 sinc 函数插值获得的——一个只需要简单插值和很少计算量的线性过程。而压缩感知的信号重建是一个典型的运用非线性方法的过程^①。关于这些技术的概述,见 1.6 节及参考文献 [226] 中的介绍。

① 值得注意的是,最近的研究表明,当采样机制是非线性时,非线性方法也可以应用于传统的采样环境中。

压缩感知对一些应用有着显著的影响。比如在医学影像方面^[178-180,227]，它在保持影像诊断质量的前提下大大加快了儿科的磁共振成像速度。另外，通过对压缩感知这一框架的广泛研究，其实际应用领域显著增加，包括子奈奎斯特采样系统^[125,126,186-188,219,224,225,228]、压缩图像结构^[99,184,205]及压缩感知网络^[7,72,141]等。

本书的目的是给出压缩感知领域近年出现的一些重要成果的综述。本书的大部分章节的许多成果和思想，都基于压缩感知的基本概念。由于本书更注重压缩感知的一些最新理论和成果，我们在本章中给出本书剩余部分中将会用到的一些压缩感知的基本理论。本章的目标是回顾一些压缩感知基本的技术。首先给出一些相关数学理论工具的回顾，然后回顾一些压缩感知中常用到的低维模型，最后重点给出在有限维空间的稀疏重建的理论和算法。为了更全面地实现我们的目的，我们不仅给出了一些基本介绍，也回顾了在压缩感知中的一些理论基础，以加深读者的理解，在本章附录中我们还给出了相关定理及引理的证明。

1.2 向量空间综述

信号处理的大部分历史，都是重点关注产生信号的物理系统的历史。大多数自然的或人工的系统均可表现为线性模型。自然地，设计信号模型就以完善这些线性模型为目标。这一观念已经被纳入现代信号处理系统，通过将信号模型看作是一些适当向量空间里的向量来体现。通过这种方式，我们一般都能获得到所想要的线性结构，也就是说，如果我们将两个信号相加，我们就可以获得一个具有新物理意义的信号。而且，向量空间允许我们使用三维空间 $\mathbf{R}^3$ 里的直观知识及工具，例如用长度、距离及角度来描述及对比我们感兴趣的信号。这些对于高维信号或者无穷空间情形都是很用的。本书假设读者对于向量空间已有一定的了解。我们马上要回顾一些在压缩感知理论中常用到的关于向量空间的重要概念。

1.2.1 赋范向量空间

纵观本书，我们将信号作为实值函数，这些函数的值域为连续或者离散，为有限或者无限，这些特性在后面的章节中将会根据需求具体定义。这里我们重点关心赋范向量空间，即向量空间被赋予了一个规范。

在有限空间离散域内，我们可以视信号为 n 维欧几里得空间里的向量，记为 $\mathbf{R}^n$ 。当处理 $\mathbf{R}^n$ 中的向量时，我们将常用到如下定义的范数 ℓ_p ，其中 $p \in [1, \infty]$ ：

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (1.1)$$

在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中还可考虑标准内积，记为

$$\langle x, z \rangle = z^T x = \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

ℓ_2 内积定义为

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

在一些文献中也常将范数 ℓ_p 推广到 $p < 1$ 的情形。此时，定义于式(1.1)中的“范数”将

不满足三角不等式,故实际上称之为拟范数。我们也常用到如下记号: $\|x\|_0 = |\text{supp}(x)|$, 这里 $\text{supp}(x) = \{i: x_i \neq 0\}$ 表示 x 的支集, 且 $|\text{supp}(x)|$ 表示 $\text{supp}(x)$ 的基数。注意到 $\|\cdot\|_0$ 连拟范数都不是, 但是可看出

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|x\|_p^p = |\text{supp}(x)|$$

(拟) 范数 ℓ_p 对于不同的 p 具有不同的性质。为了说明这一事实, 在图 1.1 中给出了单位球面, 即 $\{x: \|x\|_p = 1\}$ 的图。

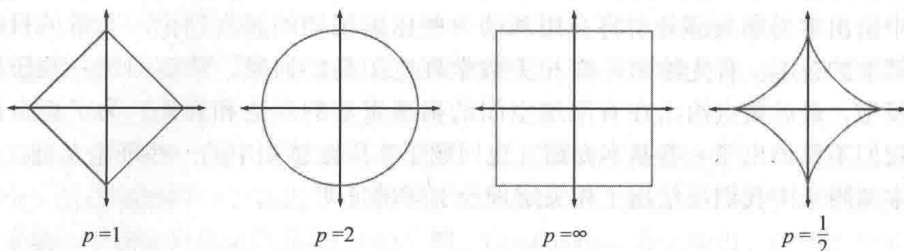


图 1.1 $\mathbb{R}^2$ 中的单位球面, 范数 $\ell_p (p=1, 2, \infty)$ 及拟范数 $\ell_p (p=\frac{1}{2})$

我们经常用范数来度量信号的强度或者误差大小。例如, 假如我们给定一个信号 $x \in \mathbb{R}^2$, 而且希望在一维仿射空间 A 中找到一个点来近似它。如果我们将近似误差以范数 ℓ_p 来度量的话, 那么我们的任务就是找到一个 $\hat{x} \in A$ 使得 $\|x - \hat{x}\|_p$ 最小化。 p 的选取将很大程度上影响近似误差的属性。图 1.2 中给出了一个例子。当使用范数 ℓ_p 时, 为了在 A 中找到最近似于 x 的一个点, 我们可以假设以 x 为中心开始生成一个 ℓ_p 球面直到它与 A 相交。这个相接点就是在范数 ℓ_p 意义下最接近于 x 的一个点 $\hat{x} \in A$ 。我们观察到更大的 p 使得两个系数间的误差扩散得更均匀, 而小的 p 使得这个误差扩散得均匀且倾向于更稀疏。这一观点也可扩展到更高维空间, 且在压缩感知理论发展中起了很大作用。

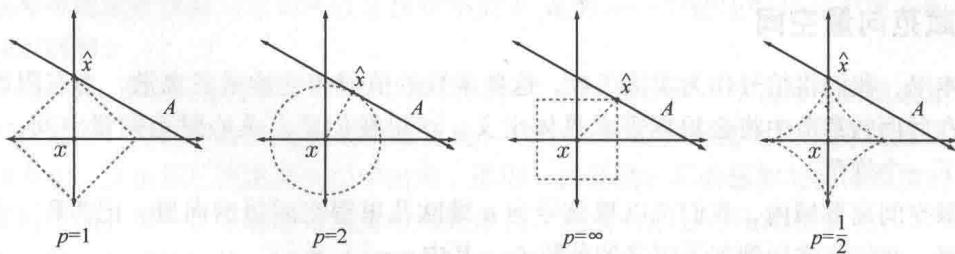


图 1.2 $\mathbb{R}^2$ 空间中一个点在一维子空间中的最好近似, 利用范数 $\ell_p (p=1, 2, \infty)$ 及拟范数 $\ell_p (p=\frac{1}{2})$ 来近似

1.2.2 基底和框架

集合 $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ 被称为是 $\mathbb{R}^n$ 的基底, 当这些向量可以扩张成为空间 $\mathbb{R}^n$ 且互相线性无关[⊖]。也就是说, 在空间中的每一个向量都可唯一表示为这些基底的线性组合。特别地, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 存

⊖ 在任意 n 维向量空间, 一个基底由 n 个向量构成。少于 n 个的向量将不能扩张成整个空间, 并需保证加入的向量是线性无关的。——原书注