高数叔高等数学入门

高数叔线性代数入门

潘秀娟　李东旭◎主编

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图文并茂，语言幽默，视频讲解，简单易学，

让学习成为一种时尚！

石油工業出版社

高数叔高等数学入门

高数叔线性代数入门

潘秀娟　李东旭◎主编

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

石油工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高数叔线性代数入门 / 潘秀娟，李东旭主编. —北京：石油工业出版社，2019.5

（高数叔高等数学入门）

ISBN 978-7-5183-3167-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①潘… ②李 Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第035477号

高数叔线性代数入门

潘秀娟 李东旭 主编

出版发行：石油工业出版社

（北京安定门外安华里2区1号 100011）

网　址：http://www.petropub.com

编 辑 部：(010) 64523610

图书营销中心：(010) 64523731 64523633

经　销：全国新华书店

印　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2019年 5 月第1版　2019年 5 月第1次印刷

710×1000 毫米　开本：1/16　印张：11.75

字数：160千字

定 价：38.00 元

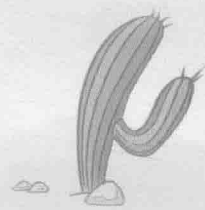
（如发现印装质量问题，我社图书营销中心负责调换）

按照惯例应该有个序

但高数叔不按惯例讲

数学也可以不抽象

知识就该有普适的样



我们一起

让学习成为一种时尚

如果你准备好了

请开启

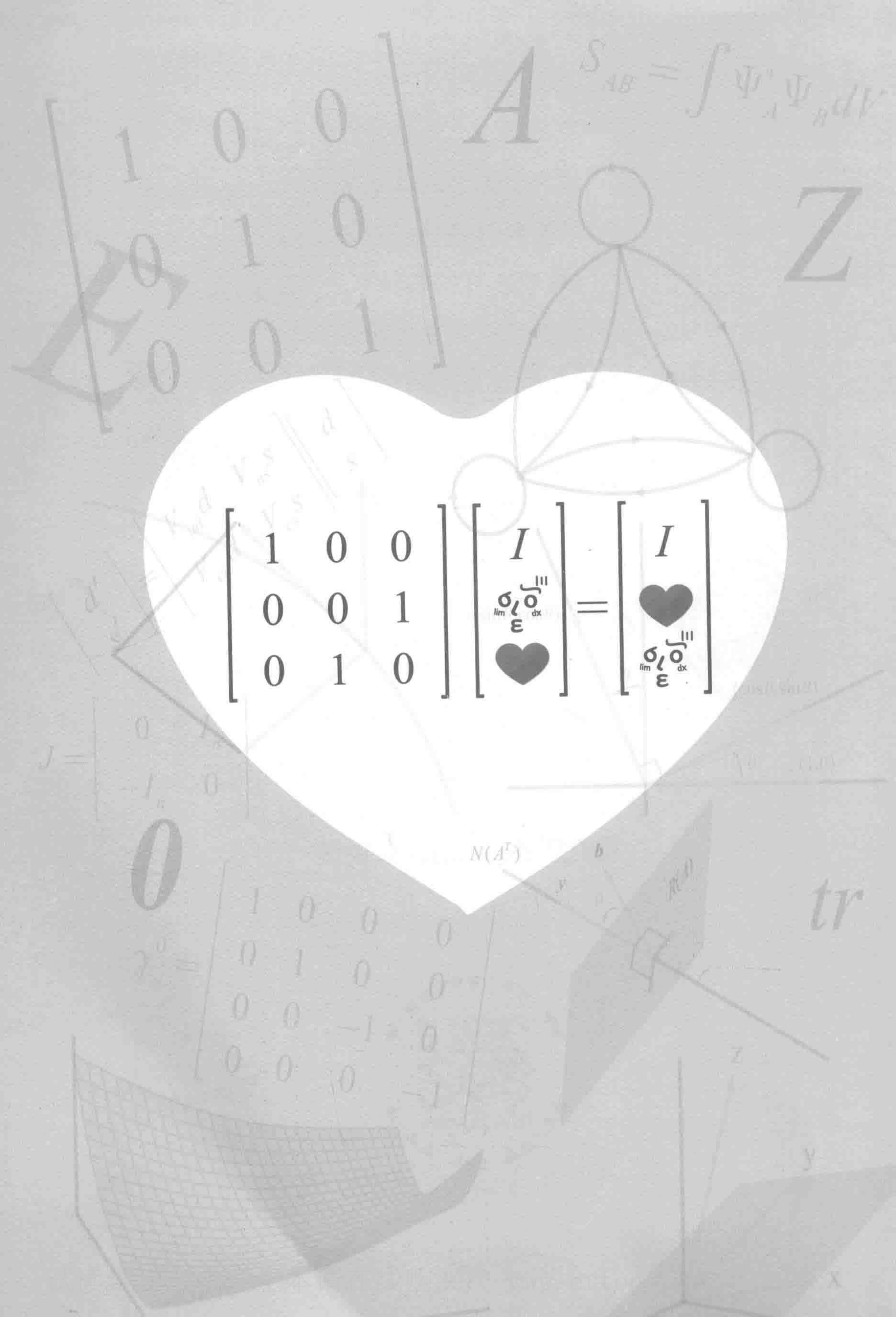
这段

神奇之旅

我们不生产分数

我们只是知识点的解说员

本书讲解视频



目录
Contents

引子

Preface

本书将带领我们走入线性代数的旅程. 线性代数起源于人们对于空间的探索，早期的数学家们在尝试用数学方法研究二维和三维直角坐标系，用数字表示空间中有方向、有长度的线段时，产生了这一门学科. 现代的线性代数早已经超出了大众对于空间的认知，扩展到了任意或无限维度空间. 线性代数学科的蓬勃发展也为工程、物理、自然科学、计算机科学、经济学和社会科学的进步提供了支持.

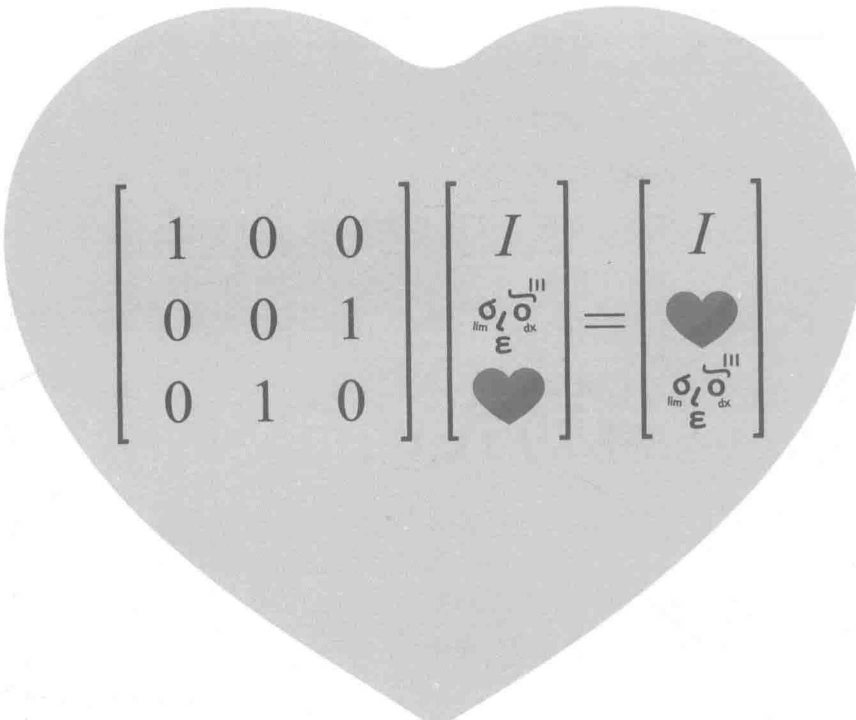
本书在向所有为了线性代数学科发展做出杰出贡献的前辈们致敬的同时，积极使用了现代印刷技术所提供的优势，运用色块思维导图的形式，尽笔者所能，为对线性代数科目感兴趣或正在学习的读者们，提供一个知识点渐进叠加并色彩丰富的学习方式. 希望可以达到由浅入深，循序渐进，易于理解的目的.

本书适用于有一定代数基础的读者. 其中为了方便阐述定理定律，使用了一些数学符号，如下表所示.

符　号	意　义
$\forall$	对任意的
$\exists$	存在
s.t.	使得，subject to 的缩写
Th.	定理，theory 的缩写
def.	定义，definition 的缩写
O	零矩阵（字母 O）
$\boldsymbol{0}$	零向量（粗斜体的零）
$\sim$	等价　A~B
$\simeq$	合同　A≃B
$\because$	因为
$\therefore$	所以
D	行列式
c	*column*　列
r	*row*　行
r_i+kr_j	将第 j 行元素的 k 倍对应加到第 i 行
c_i+kc_j	将第 j 列元素的 k 倍对应加到第 i 列
E_n	n 阶单位矩阵
τ	逆序数
M_{ij}	余子式
A_{ij}	代数余子式
A^*	伴随矩阵
diag	对角阵
$Ax=\boldsymbol{0}$	齐次线性方程组
$Ax=\boldsymbol{b}$	非齐次线性方程组
tr	trace 的缩写，迹，方阵的主对角线上元素之和

第一回

行列式的定义


1 0 0
0 0 1
0 1 0
I
=
I

对于线性代数的探索，我们从行列式开始．行列式是线性代数的一个基本概念，作为一个基本数学工具在许多领域有着广泛的应用．本回的主要内容是给出一般的n阶行列式的定义．

一、概念

定义1　对于n个不同的元素，可以规定各元素之间有一个标准次序（例如n个不同的自然数，可规定**由小到大**为标准次序），在这n个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称有一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**，记为τ．

例如：在排列325146中，从第一个数3开始，后面2、1都比它小，因此对于3来说，排列中存在2个逆序，然后考察第二个数字2，后面1比它小，因此对于2排列中存在1个逆序，依此类推，对于5、1、4、6排列中存在的逆序数分别是2、0、0、0，即

$$\begin{array}{cccccc}3&2&5&1&4&6\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&2&0&0&0\end{array}\rightarrow \text{每一个数对应的逆序数}$$

从而有：$\tau(315146) = 2+1+2+0+0+0=5$.

下面我们以归纳的方式给出行列式的定义.

1. 一阶行列式

$$|a_{11}| \overset{def}{=} a_{11} \quad 共1!项$$

2. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{def}{=} a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \quad 共2!项$$

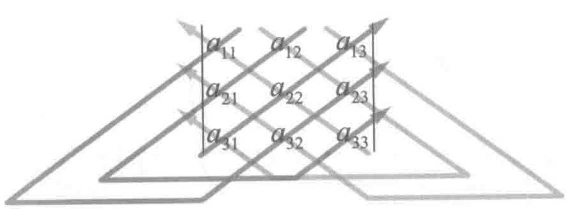
$a_{11}a_{22}$的连线称为二阶行列式的主对角线，$a_{21}a_{12}$的连线称为二阶行列式的副（次）对角线，那么二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积. 该运算规则称为**二阶行列式的对角线**法则.

3. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\overset{def}{=} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad 共3!项$$

三阶行列式对角线法则图示：



其中每一条蓝线上的三个元素的乘积带正号，每一条红线上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的对角线法则.

定义2 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{def}{=} \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \cdots \cdot a_{np_n} \text{ 共n!项}$$

其中 $t=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 可记为$|A|$、$|a_{ij}|$或$det(A)$、$det(a_{ij})$.

总结:

1 行列式是一个数；

2 二阶、三阶行列式的计算可以通过对角线法实现；

3 n阶行列式计算的核心：

取项：每一项来自行列式中不同行不同列元素的乘积，共有$n!$ 种取法.

定号：每一项的符号由各元素的行标和列标构成排列的逆序数共同决定.

求和：将所有取出的$n!$ 项求代数和.

二、计算

例 1 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-(-1)\times1=6+1=7.$

例 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times2\times3+2\times5\times4+4\times3\times2-4\times2\times4-1\times2\times5-3\times2\times3$$

$$= 6+40+24-32-10-18$$

$$= 10.$$

例 3　4阶行列式 $|a_{ij}|(i,j=1,2,3,4)$ 中副对角线元素之积 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的符号为______.

解：$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 是从4阶行列式 $|a_{ij}|$ 中按行标准次序取出的一项，按照定义它的符号由列标构成的排列的逆序数决定，即

$$(1)^t = (-1)^{\tau(4321)} = (-1)^{3+2+1} = 1.$$

故有：$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的符号为正号.

例 4　函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为______.

解：按照行列式的定义，只要找到所有包含 x^3 的那些项就可以解决问题，即

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

不难发现，仅有这一种取法：$(-1)^t a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

它的系数为：$(-1)^t=(-1)^{\tau(2134)}=(-1)^1=-1$.

例 5　计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解：按照定义，D_n 应为来自不同行不同列的$n!$项求代数和，经观察会发现：这$n!$项中仅有一项$a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{(n-1)n}a_{n1}$是非零的，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其余的$n!-1$ 种取法，每一项都会取到0，因此，

$$D_n=(-1)^t\cdot 1\cdot 2\cdots n,$$

其中$t=\tau(23\cdots n1)=1+1+\cdots+1=n-1$，从而有：$D_n=(-1)^{n-1}n!$