

STABILITY THEORY AND
DESIGN OF STRUCTURES

结构稳定

理论与设计

郭兵◎著



配套资源扫一扫

中国建筑工业出版社

结构稳定理论与设计

郭 兵 著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

结构稳定理论与设计/郭兵著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2019. 3
ISBN 978-7-112-23238-3

I. ①结… II. ①郭… III. ①结构稳定性-理论
②结构设计 IV. ①TU311. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 020840 号

本书全面论述了结构中的常见稳定问题, 以钢结构的稳定为主, 同时也涉及混凝土结构的稳定。全书共 9 章, 前 3 章为稳定理论基础知识, 包括稳定的概念及分类、构件的弯扭变形及平衡方程、稳定判别准则与分析方法; 后 6 章为常见构件、板件及结构的稳定, 各章首先阐述理想条件下的弹性稳定, 然后研究各类因素对稳定的影响, 最后介绍《钢结构设计标准》GB 50017—2017 等国内外技术标准对稳定设计的相关规定及背景知识。为了便于读者理解和应用, 各章还提供了大量的例题与习题。

本书除作为结构工程、工程力学、桥梁与隧道工程等专业的研究生教材外, 也可供相关专业领域从事教学、科研、设计、施工及管理的科技人员使用。

责任编辑: 武晓涛

责任校对: 李欣慰

结构稳定理论与设计

郭 兵 著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京海淀三里河路 9 号)

各地新华书店、建筑书店经销

北京佳捷真科技发展有限公司制版

廊坊市海涛印刷有限公司印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 26 $\frac{3}{4}$ 字数: 663 千字

2019 年 4 月第一版 2019 年 4 月第一次印刷

定价: 68.00 元 (含增值服务)

ISBN 978-7-112-23238-3

(33537)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

前 言

结构稳定理论是工程力学的一个重要分支，主要研究各类构件、板件及结构的稳定性，在建筑、交通、水利等工程结构中都会涉及稳定问题。结构中的强度问题相对简单，而稳定问题则要复杂得多，国内外因失稳而导致的重大工程事故很多，教训惨痛，但每一次重大事故都会极大地促进人们对稳定问题的反思与研究，不断推进稳定理论的发展。

经典弹性稳定理论始于 18 世纪中叶，形成于 20 世纪中叶，是当代稳定理论的重要基础。随着计算机技术的发展和数值方法的应用，弹塑性稳定理论得到了飞速发展，尤其是近几十年来，在发挥结构稳定潜力和完善稳定设计方面，新理论、新成果不断涌现，并被一些国家的技术标准采纳。技术标准的内容总是滞后于学科发展的，而且技术标准所涉及的内容也是有限的，对一些特殊情况下的稳定问题，仍然需要利用基本理论来进行具体分析，不能盲目套用。

本书基于笔者近些年给研究生授课的手稿，根据经典的弹性稳定理论并结合当代稳定理论研究的新成果，详细介绍了稳定问题的概念、分类和特点，系统归纳了稳定判别准则与分析方法，重点阐述了各类常见构件、板件及结构的弹性与弹塑性稳定原理、分析方法、现行技术标准的相关规定和背景知识，以期帮助读者了解各种情况下构件、板件及结构失稳的基本原理，掌握稳定的分析方法和设计要领，为读者进一步深入研究复杂稳定问题和探索新理论、新方法提供有益的帮助。

在本书的编写过程中，苏州科技大学的李启才教授、上海交通大学的宋振森教授、西安建筑科技大学的苏明周教授以及北京交通大学的陈爱国教授等先后提出了一些宝贵建议；本书的习题答案由研究生管海龙、褚昊、范珍辉等协助完成，作者在此一并深表谢意。

由于作者水平有限，错误和不足之处在所难免，希望广大读者提出批评和改进意见。

著者

2018 年 8 月于山东建筑大学

目 录

第 1 章 概论	1
1.1 引言	1
1.2 稳定问题的概念	4
1.3 失稳的类型	5
1.4 稳定分析时需要考虑的因素	10
1.5 稳定问题与强度问题的区别	17
思考与练习题	17
参考文献	18
第 2 章 薄壁构件的弯曲与扭转	19
2.1 概述	19
2.2 薄壁构件的截面特性及扇性坐标	20
2.3 薄壁构件的弹性弯扭变形	25
2.4 薄壁构件的弹性弯曲方程与应力	27
2.5 薄壁构件的截面剪心	32
2.6 薄壁构件的弹性扭转方程与应力	34
2.7 薄壁构件的极限强度与变形	41
思考与练习题	44
参考文献	45
第 3 章 稳定判别准则与分析方法	46
3.1 静力准则与静力法	46
3.2 能量准则与能量法	50
3.3 动力准则与动力法	63
3.4 稳定分析的近似方法	65
3.5 稳定分析的数值法	71
思考与练习题	79
参考文献	80
第 4 章 轴心受压构件的整体稳定	81
4.1 概述	81
4.2 轴压构件的弯曲屈曲	81
4.3 轴压构件的扭转屈曲	99

4.4	轴压构件的弯扭屈曲	108
4.5	整体结构中的压杆	117
4.6	轴压构件稳定理论在钢结构中的应用	123
4.7	轴压构件稳定理论在混凝土结构中的应用	131
	思考与练习题	133
	参考文献	134
第5章	受弯构件的整体稳定	136
5.1	概述	136
5.2	纯弯构件的弹性弯扭屈曲	137
5.3	不同荷载类型下简支梁的弹性弯扭屈曲	147
5.4	不同边界条件下受弯构件的弹性弯扭屈曲	161
5.5	薄壁构件的弹性畸变屈曲	166
5.6	单向受弯构件的弹塑性弯扭屈曲	167
5.7	受弯构件稳定理论在钢结构中的应用	171
	思考与练习题	180
	参考文献	182
第6章	压弯构件的整体稳定	184
6.1	概述	184
6.2	压弯构件的弹性变形与内力	185
6.3	压弯构件的等效弯矩系数	197
6.4	压弯构件的弹性转角位移方程	200
6.5	弯矩作用平面内的极限荷载	204
6.6	弯矩作用平面外的稳定与极限荷载	211
6.7	压弯构件稳定理论在钢结构中的应用	216
6.8	压弯构件稳定理论在混凝土结构中的应用	228
	思考与练习题	230
	参考文献	231
第7章	板的稳定及屈曲后强度	232
7.1	概述	232
7.2	板的小挠度理论	233
7.3	基于能量法的小挠度板弹性稳定分析	245
7.4	无缺陷小挠度板的弹塑性屈曲	253
7.5	板的大挠度理论及屈曲后强度	255
7.6	构件中板件局部屈曲的相关性	264
7.7	板屈曲理论在焊接和轧制钢构件中的应用	269
7.8	板屈曲理论在冷弯型钢构件中的应用	291

思考与练习题	294
参考文献	295
第 8 章 框架的稳定	297
8.1 概述	297
8.2 典型框架的弹性稳定	298
8.3 多层多跨框架的弹性稳定近似分析	312
8.4 框架失稳的本质及层刚度法	317
8.5 其他情况下框架柱计算长度系数	325
8.6 框架的弹塑性稳定与分析方法	336
8.7 框架稳定理论在钢结构中的应用	341
8.8 框架稳定理论在混凝土结构中的应用	345
思考与练习题	346
参考文献	348
第 9 章 拱的稳定	349
9.1 概述	349
9.2 拱在平面内的弹性屈曲	350
9.3 拱在平面外的弹性屈曲	367
9.4 拱的弹塑性屈曲	375
9.5 拱稳定理论在钢结构中的应用	380
思考与练习题	384
参考文献	384
附录	386
附录 A 泛函与变分	386
附录 B 冷弯型钢轴压构件的稳定系数	390
附录 C 焊接和轧制轴压钢构件的截面分类	391
附录 D 焊接和轧制轴压钢构件的稳定系数	393
附录 E 混凝土柱的计算长度和轴压稳定系数	396
附录 F 钢构件的截面塑性发展系数	398
附录 G 焊接和轧制钢梁的稳定系数	399
附录 H 冷弯型钢受弯构件的稳定系数	401
附录 I 焊接和轧制钢柱的计算长度系数	402
附录 J 冷弯型钢柱的计算长度系数	414
附录 K 钢结构的位移容许值	414
部分习题答案	416

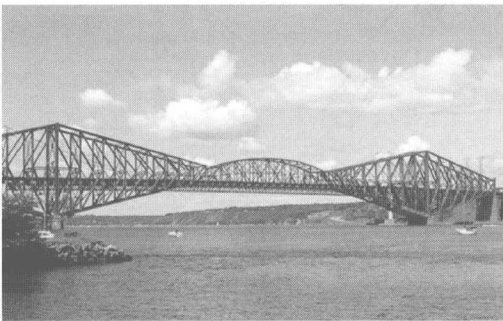
第 1 章 概 论

1.1 引 言

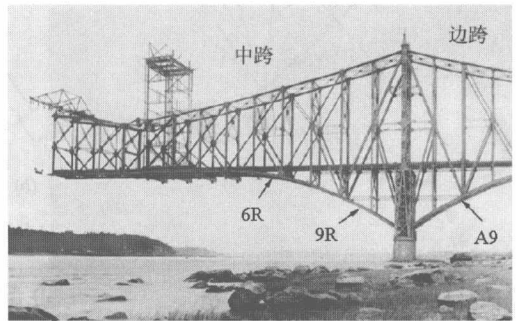
在建筑、交通、水利等工程结构中，无论是板件、构件还是整体结构，只要有受压部位，都会涉及稳定问题。与混凝土结构相比，钢结构因材料强度高，构件往往比较细长，组成构件的板件也比较纤薄，稳定问题尤为突出，在强度破坏之前容易发生整体失稳或局部失稳。

结构稳定性能是决定其承载能力的一个特别重要的因素，在近现代工程史上，由于人们对稳定问题认识不够，或者设计、施工、使用经验不足，或者对一些细节问题未予重视，导致发生失稳的事故案例很多，特别是那些盲目设计、野蛮施工的项目，更是失稳事故频发。

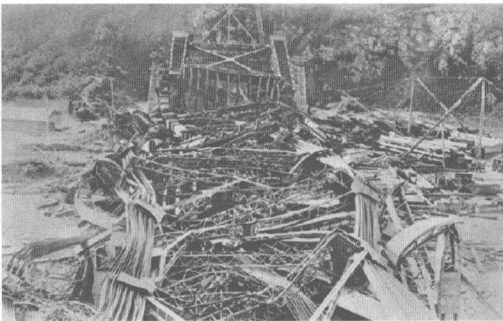
建于 20 世纪初的加拿大 Quebec 大桥在施工过程中曾发生过两次重大事故^[1]，该桥主体为三连跨桁架结构，见图 1.1 (a)，两个边跨均为 152.4m，中跨为 548.6m，是当时世



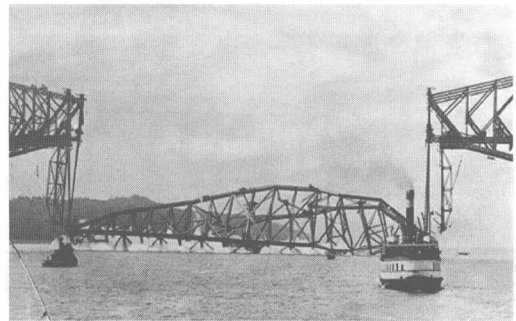
(a) 建成后的全貌



(b) 第一次事故发生前



(c) 第一次事故



(d) 第二次事故

图 1.1 加拿大 Quebec 大桥

界上跨度最大的桥。由于对桁架结构的稳定性能了解不够，加上管理混乱，1907年8月在安装中跨悬臂桁架时，边跨桁架下弦A9杆首先失稳，见图1.1(b)，紧接着中跨桁架下弦9R杆和6R杆也失稳，随后总重19000t的钢桥整体坍塌，见图1.1(c)，坍塌过程仅持续了15s，据目击者称“桥身就像是一根底部迅速融化的冰柱般坍塌下来”。当时共有86名工人在桥上作业，其中75人遇难。

1913年该桥重新设计、开工，不幸的是悲剧再次发生，1916年9月在吊装中跨桁架时，由于一个锚固支撑构件断裂，5200t的桁架再次坠入河中，见图1.1(d)，导致13名工人丧生。在经历十年和两次惨痛事故后，1917年Quebec大桥终于竣工通车。

1975年建成的美国Hartford体育馆屋盖网架，平面尺寸为91.4m×109.7m，采用四角锥网格，网格尺寸为9.144m×9.144m，网格杆件为四个角钢组成的十字形截面。因网格尺寸较大，为减小杆件计算长度，在上弦杆和腹杆之间设置了支撑，但采用偏心连接，见图1.2(a)、(b)，1978年1月该屋盖在一场雨雪中整体坍塌。事后展开的一系列调查与分析表明，导致事故的主要原因有两个^[2-4]：一是偏心设置的支撑不能有效减小压杆的计算长度；二是没有考虑十字形截面压杆的扭转失稳，见图1.2(c)。

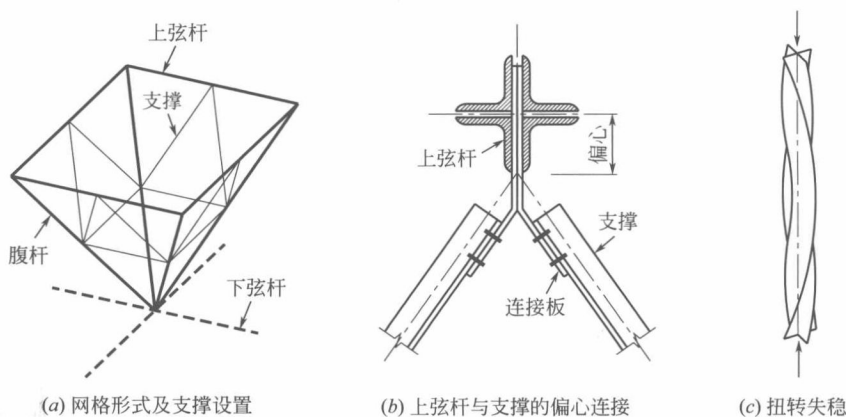


图 1.2 美国 Hartford 体育馆屋盖网架的网格及其压杆

苏联在1951~1957年期间发生的59起重大钢结构房屋事故中，17起是由失稳造成的^[5]。我国也未能例外，近些年因结构失稳而导致的工程事故时有发生^[6]，见图1.3~图1.10。



图 1.3 门式刚架结构整体失稳



图 1.4 钢框架结构整体失稳

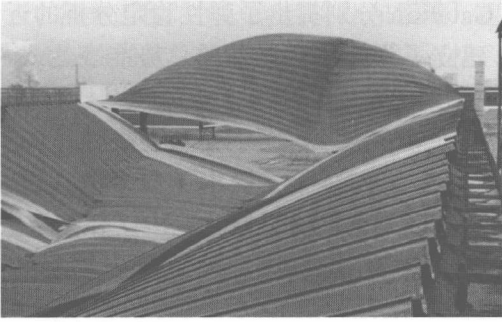


图 1.5 拱形屋盖结构整体失稳



图 1.6 管桁架结构整体失稳

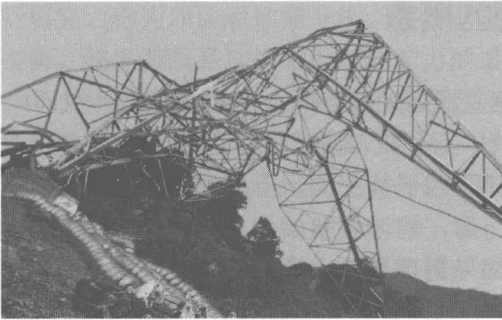


图 1.7 塔桅结构整体失稳

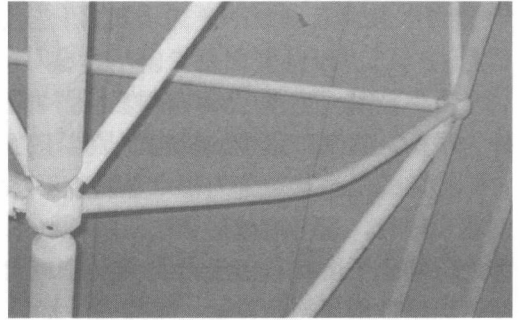


图 1.8 网架压杆弯曲失稳



图 1.9 简支钢梁弯扭失稳



图 1.10 钢管柱脚局部失稳

由此可见，各类结构都存在稳定问题，无法回避，一旦发生失稳，通常会带来严重后果，这就要求从业人员在工程的设计和施工过程中必须对稳定问题予以足够的重视。

稳定问题的研究始于 18 世纪中叶，受认识水平和计算手段的限制，直到 20 世纪中叶才形成经典弹性稳定理论。1744 年 Euler 指出，柱子存在稳定问题，用强度计算方法来分析稳定问题是不合适的，1759 年 Euler 给出了两端铰接弹性压杆的弯曲失稳临界荷载，也就是著名的 Euler 荷载。1885 年 Poincare 明确了分岔失稳的概念，1940 年 Vlasov^[7] 提出了极值点失稳的概念，并引入了跃越失稳理论。

早期稳定分析主要针对弹性构件，采用静力法通过平衡微分方程来求解临界荷载。1891 年 Bryan 将最小势能原理应用于平板的弹性稳定分析；1913 年 Timoshenko 将能量

守恒原理应用于弹性稳定分析，同一时期 Ritz 和 Galerkin 分别提出了弹性稳定分析的近似方法，使稳定分析得以简化；1952 年 Bleich^[8] 建立了弹性压弯构件的总势能表达式，进一步推动了弹性稳定理论的发展。

实际工程中构件发生失稳时，材料大多已进入弹塑性阶段，属于弹塑性失稳范畴。1885 年 Engesser 针对弹塑性失稳提出了切线模量理论，1889 年又提出了双模量理论；1934 年 Jezek 提出了压弯构件在弯矩作用平面内的弹塑性失稳近似解析法；1947 年 Shanley^[9] 提出了改进的双模量理论。随着计算机技术和数值方法的发展，20 世纪 70 年代有限元方法开始应用于结构的稳定分析^[10]，使得弹塑性稳定分析成为一个简单的问题，并有力推动了稳定理论的全面发展。

1.2 稳定问题的概念

由牛顿第一定律可知，当物体保持静止或匀速直线运动状态时处于平衡状态，也即内外力平衡。实际工程中的结构都是处于静止状态的，不存在匀速直线运动状态。

物体的平衡状态分为稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡三类。下面通过图 1.11 中的钢球来解释，三个钢球分别位于凹面、水平面和凸面，钢球在初始位置（图中实线位置）都处于静止平衡状态，反力 R 等于钢球自重 G ，如果钢球受到一个非常微小的侧向干扰，使钢球略微偏离初始位置，则撤去干扰后三个钢球的最终位置和状态将会有显著的区别。

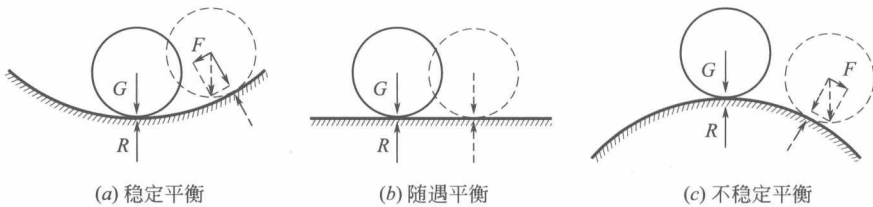


图 1.11 钢球平衡状态的类型及恢复力

图 1.11 (a) 中的钢球：撤除干扰后，恢复力 F (G 沿地面切线方向的分力) 指向原平衡位置，钢球能够返回到初始位置并保持平衡，说明钢球在初始位置的平衡状态是稳定的，称为稳定平衡。

图 1.11 (b) 中的钢球：撤除干扰后，无恢复力，钢球会停留在临近的新位置并保持平衡，说明钢球在初始位置的平衡状态是随遇的，称为随遇平衡，也称中性平衡。钢球在新位置仍然处于随遇平衡状态，受到干扰后又会移动到另外一个新位置并保持平衡。

图 1.11 (c) 中的钢球：撤除干扰后，恢复力 F 背离原平衡位置，钢球不会回到初始位置，越来越远，说明钢球在初始位置的平衡状态是不稳定的，称为不稳定平衡。如果地面一直是凸面，撤除干扰后的钢球加速滚动，除非钢球在滚动过程中边界条件发生了变化，比如遇到一个较大的凹面，钢球会停留在凹面并保持稳定平衡状态，但已属于另一个位置的平衡状态。

由此可见，物体的平衡状态与所处条件有关，如果条件发生了改变，平衡状态也可能发生改变。仍以图 1.11 (a) 中的钢球为例，假如所处地面因某种原因由凹面变为凸面，尽管钢球的位置没变且仍保持平衡，但已由稳定平衡状态变为不稳定平衡状态。

各类工程结构（包括构件和板件）也可以通过施加干扰使其产生位移或变形来进行平衡状态的判定，但值得注意的是，干扰只是判定平衡状态的手段，结构所处条件及自身性能等才是影响平衡状态的真正原因。各类结构在设计使用年限内，荷载条件是一直变化的，边界条件、材料性能等也可能发生变化，这些变化都可能引起结构平衡状态的变化。当结构因所处条件及自身性能等的改变由稳定平衡状态变为不稳定平衡状态，即丧失了稳定平衡时，称为失稳，也称屈曲。

随遇平衡实际上是从稳定平衡过渡到不稳定平衡的一种临界状态，当结构处于随遇平衡时所对应的荷载称为临界荷载或屈曲荷载。对于无缺陷的理想结构，临界荷载是结构失稳前的最大荷载，结构稳定分析的一个重要内容就是求解临界荷载。

由于在实际工程中各类微小的干扰无法避免，还需要对失稳后有干扰时的结构性能进行研究，称为屈曲后性能分析。有些结构失稳后受到干扰时，需要不断降低荷载才能维持平衡，临界荷载是这类结构承载能力的最大理论值；有些结构失稳后受到干扰时，会因条件的变化在新位置又处于稳定平衡状态，可以继续加载，这类结构的最终承载能力大于临界荷载，超出的部分称为屈曲后强度，这也说明失稳并不一定意味着承载能力丧失。

结构的平衡状态还可以用变形后的刚度来解释：如果刚度大于零，变形能够恢复，结构处于稳定平衡状态；如果刚度等于零时，变形不能恢复，也不会继续发展，结构处于随遇平衡状态，对应的荷载为临界荷载；如果刚度小于零，变形持续发展，结构处于不稳定平衡状态。

由于各类工程结构都涉及稳定问题，必须进行稳定分析。稳定分析是研究结构稳定性、进行结构稳定设计的基础性工作，主要包括：分析结构的平衡状态及失稳类型，研究各类因素对稳定性影响，求解结构的稳定承载力，分析结构的屈曲后性能及屈曲后强度等。

1.3 失稳的类型

结构失稳时的现象或状态是多种多样的，比如，根据屈曲变形的不同，失稳形式可分为弯曲屈曲（图 1.8）、扭转屈曲（图 1.2）和弯扭屈曲（图 1.9）三种；根据失稳发生的范围不同，可分为整体失稳和局部失稳两种，前者是指整个结构或构件发生失稳（图 1.3~图 1.9），后者是指组成构件的部分板件发生失稳（图 1.10）；根据失稳时的应力状态不同，可分为弹性屈曲和弹塑性屈曲两种。

上面各种失稳现象或状态都不能反映失稳的本质，从本质上而言，失稳可分为平衡分岔失稳、极值点失稳和跃越失稳三种类型^[1]，这也是本节要重点讲述的内容。

1.3.1 平衡分岔失稳

从前面知道，结构的平衡状态可以通过施加微小干扰来判断，如果撤除干扰后结构在临近的新位置仍保持平衡，则结构处于随遇平衡状态，对应的荷载为临界荷载。所谓临近位置，是指结构发生的变形相对于结构原始尺寸而言非常小，且不影响荷载的大小和方向，也称结构发生了小变形。如果变形相对于结构原始尺寸而言是非小量，则属于大变形，大变形能够反应结构的屈曲后性能。

【例题 1.1】 图 1.12 (a) 所示理想的弹簧铰悬臂刚压杆，杆件为绝对刚性，初始位于竖直状态，杆长为 l ，顶端作用有轴压荷载 P ，底端采用弹簧铰连接，其转动刚度（发生单位转角所需的力矩）为常数 r ，弹簧铰能够传递轴力和剪力，试求解该结构的临界荷载。

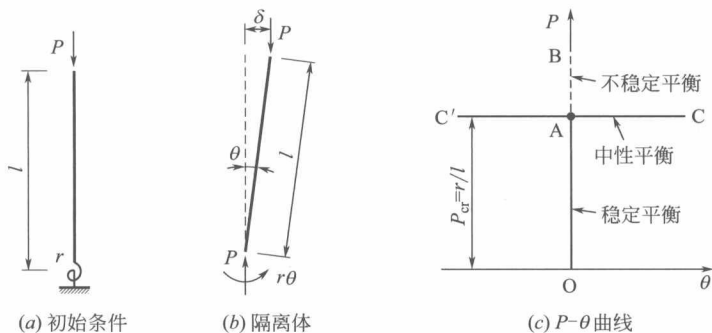


图 1.12 例题 1.1 图 (小变形)

【解】 首先假设杆件在侧向干扰下产生了小变形，见 1.12 (b) 中的侧移 δ ，且撤除干扰后杆件在倾斜位置仍处于平衡状态。

侧移 δ 与侧倾角 θ 之间的关系为 $\delta = l \sin \theta$ ， P 对构件底端产生的侧倾力矩为 $P\delta = Pl \sin \theta$ ，杆件转动 θ 时弹簧对构件底端产生的抵抗力矩为 $r\theta$ 。根据构件底端的力矩平衡，可得平衡方程：

$$Pl \sin \theta - r\theta = 0 \quad (1)$$

因是小变形，可取 $\sin \theta \approx \theta$ ，则 $Pl \sin \theta \approx Pl\theta$ ，上式变为：

$$(Pl - r)\theta = 0 \quad (2)$$

上式成立的条件是 $Pl - r = 0$ 或者 $\theta = 0$ ，显然 $\theta = 0$ 与杆件已发生倾斜不符，属于平凡解。因上述平衡方程是基于结构处于随遇状态时建立的，解得的荷载就是结构的临界荷载，记作 P_{cr} ，即

$$P_{cr} = r/l \quad (3)$$

式 (2) 中的 $P-\theta$ 关系见图 1.12 (c)，因干扰可能来自左侧，也可能来自右侧， θ 有正负之分，假设顺时针为正，逆时针为负。当 $\theta = 0$ 时， P 可取任意值， $P-\theta$ 关系为 OB 竖直线，既可以是 $P < r/l$ 的 OA 段，也可以是 $P > r/l$ 的 AB 段；当 $P = r/l$ 时， θ 可取任意值， $P-\theta$ 关系为 CC' 水平线，既可以是 $\theta > 0$ 的 AC 段，也可以是 $\theta < 0$ 的 AC' 段。上述 $P-\theta$ 关系是根据平衡条件推导得来的，显然各线段上任意一点都满足平衡方程，因此各线段也称为平衡路径。下面逐线段分析杆件的平衡状态：

OA 段：无干扰时杆件处于竖直平衡状态，有干扰时发生侧倾，由于 $P < r/l$ ，也即侧倾力矩 $Pl\theta$ 小于抵抗力矩 $r\theta$ ，撤除干扰后恢复力指向原位置，变形可恢复，说明 OA 段的平衡状态是稳定的。

AB 段：无干扰时杆件处于竖直平衡状态，有干扰时发生侧倾，由于 $P > r/l$ ，也即侧倾力矩 $Pl\theta$ 大于抵抗力矩 $r\theta$ ，撤除干扰后恢复力背离原位置，杆件倾斜不止，说明 AB 段的平衡状态是不稳定的。

AC 段和 AC' 段：无干扰时杆件处于竖直平衡状态 (A 点)，有干扰时会发生侧倾，

由于 $P = r/l$ ，也即侧倾力矩 $Pl\theta$ 等于抵抗力矩 $r\theta$ ，撤除干扰后无恢复力，杆件将停留在临近的倾斜位置并保持平衡，说明 AC 段和 AC' 段的平衡状态是随遇的。

曲线由 OA 段发展到 AB 段时，杆件由稳定平衡变为不稳定平衡，发生了失稳。A 点对应的荷载就是临界荷载 P_{cr} 。对于实际工程中的构件，由于微小的干扰无处不在，AB 段并不存在。

图 1.12 (c) 这种用来分析平衡状态的荷载位移曲线也称平衡状态曲线，因平衡路径在 A 点出现了分岔，这类失稳称为平衡分岔失稳或平衡分枝失稳，也称第一类稳定问题，A 点称为分岔点或分枝点。

上述结果是根据小变形理论得到的，除了理想的弹簧铰悬臂刚压杆外，理想的轴心受压构件、受弯构件、四边简支受压薄板、受压薄壁圆柱壳等，由小变形理论得到的平衡状态曲线的形式都与图 1.12 (c) 类似，属于平衡分岔失稳，只是坐标轴的参数有所区别。

如果图 1.12 中的变形与杆件尺寸属于同量级，称为大变形，比如 $\delta = l$ ，则 $\theta = \pi/2$ ，显然 $\sin\theta \neq \theta$ ，需采用大变形理论来分析，将会有不同的结果，相关内容将在第 3 章讲述。由于结构失稳后受到干扰时变形可以持续发展，属于大变形范畴，屈曲后性能需要采用大变形理论来分析。根据大变形理论，平衡分岔失稳可分为稳定分岔失稳、不稳定分岔失稳两类。

(1) 稳定分岔失稳

图 1.13 (a) 为理想的四边简支受压薄板，材料为弹性，板件初始平直，无缺陷，压力 P 沿板中面均匀分布且方向不变。板的平衡状态曲线见图 1.13 (b)， w 为板的挠度，OA 段处于稳定平衡状态，AB 段处于不稳定平衡状态，A 点对应的荷载为临界荷载。板件屈曲后，无干扰时在原位置保持平直 (AB 段)，有干扰时会发生波浪形凸曲变形，撤除干扰后变形继续发展，随着挠度的增加，板的两个侧边会对板产生显著的拉拽作用，限制了板挠度的快速发展，使得荷载可以继续增加，AB 曲线变为 AC 或 AC'，板件以凸曲状态保持稳定平衡，这类分岔失稳称为稳定分岔失稳。AC 及 AC' 为屈曲后性能曲线，最终承载力大于 P_{cr} ，具有屈曲后强度，可以利用，相关内容将在第 7 章讲述。

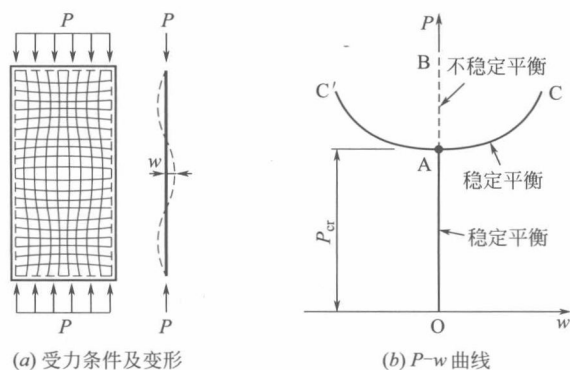


图 1.13 理想四边简支受压薄板的稳定分岔失稳 (大变形)

除了理想的四边简支受压薄板外，理想的弹簧铰悬臂刚压杆、弹性轴心受压构件等在大变形条件下也属于稳定分岔失稳，均具有屈曲后强度，相关内容将在后续章节讲述。

(2) 不稳定分岔失稳

图 1.14 (a) 为理想的受压薄壁圆柱壳，材料为弹性，壳体初始挺直，无缺陷，压力 P 均匀分布且方向不变。圆柱壳的平衡状态曲线见图 1.14 (b)， w 为壳壁挠度，OA 段处于稳定平衡状态，AB 段处于不稳定平衡状态，A 点对应的荷载为临界荷载。圆柱壳屈曲后，无干扰时壳壁在原位置保持挺直 (AB 段)，有干扰时壳壁产生凸曲变形，撤除干扰后变形继续发展，需要不断降低荷载才能维持平衡，AB 曲线变为 AC 或 AC'，壳体以凸曲状态保持不稳定平衡，这类分岔失稳称为不稳定分岔失稳。

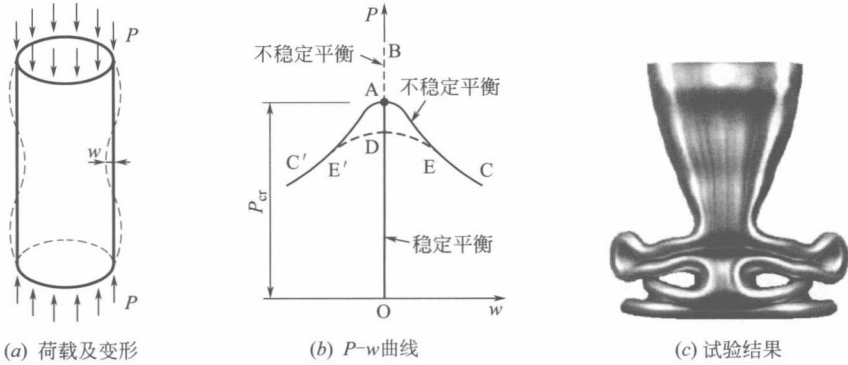


图 1.14 理想受压薄壁圆柱壳的不稳定分岔失稳 (大变形)

如果圆柱壳存在初始缺陷，比如壳体不挺直等，在达到 P_{cr} 之前，壳体会由稳定平衡直接跳跃到非临近的不稳定平衡^[12]，见图 1.14 (b) 中的 DEC 或 DE'C' 曲线，不经过分岔点 A，最大荷载低于 P_{cr} ，说明对缺陷很敏感，试验结果见图 1.14 (c)。设计这类结构时，如果无视缺陷的影响会导致严重后果。除了受压薄壁圆柱壳外，理想的受压薄壁方管、格构式缀条柱等都可能发生不稳定分岔失稳。

非对称结构的平衡状态曲线可能不对称，图 1.15 (a) 所示理想的 Γ 形刚架，梁柱刚接且长度均为 l ，荷载 P 作用在柱顶，刚架的平衡状态曲线见图 1.15 (b)， θ 为梁柱节点的转角，顺时针为正，逆时针为负，OA 段处于稳定平衡状态，AB 段处于不稳定平衡状态，A 点对应的荷载为临界荷载。刚架失稳后受到干扰时，梁柱会发生弯曲变形，撤除干扰后变形持续发展，如果 θ 为正值，见图 1.15 (c)，AB 曲线变为 AC，荷载可以继续增加，刚架以弯曲状态保持稳定平衡；如果 θ 为负值，AB 曲线变为 AC'，需要不断降低荷载才能维持平衡，属于不稳定平衡。分岔点两侧的稳定状态不同，曲线非对称。

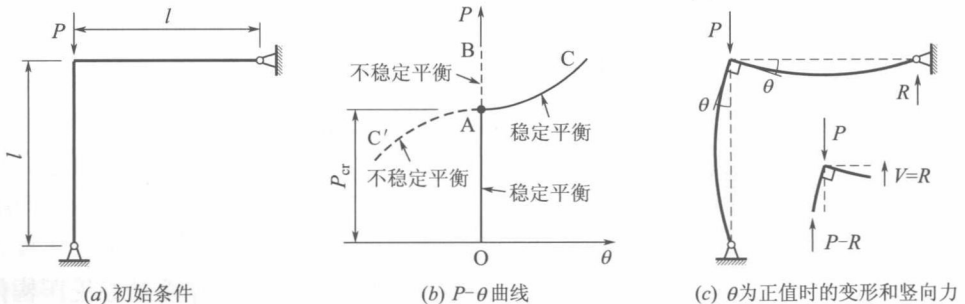


图 1.15 理想 Γ 形刚架的非对称分岔失稳 (大变形)

因梁柱间的夹角保持不变，梁柱同步转动，当 θ 为正值时，见图 1.15 (c)，梁右端产生向上的支反力 R ，梁的剪力 $V=R$ ，柱的轴力由 P 变为 $P-R$ ， P 可以增大；当 θ 为负值时，柱的轴力由 P 变为 $P+R$ ， P 需要减小。这类结构也属于缺陷敏感型， P 在柱顶偏左或偏右会导致完全不同的结果。

1.3.2 极值点失稳

前面的分析对象均为理想条件下的结构，比如加载前构件处于挺直状态，材料为刚性或弹性，荷载无偏心等，实际工程结构难以完全满足上述条件，结构失稳的性质会发生变化。

图 1.16 (a) 所示矩形截面轴心受压构件，材料为弹塑性，加载前构件有初弯曲，最大初始挠度 v_0 位于构件中央，显然一经加载就会产生弯矩并使构件挠度进一步增大，如果将变形后的总挠度记作 v ，见图 1.16 (b)，则中央截面的弯矩为 Pv ，该弯矩是由变形引起的附加弯矩，称为二阶效应。在轴力和附加弯矩共同作用下，截面左侧应力最大，当左侧边缘纤维发生屈服时，荷载达到弹性最大值，记作 P_e ；如果 P 继续增大，左侧一部分截面将进入塑性，构件已处于弹塑性状态。

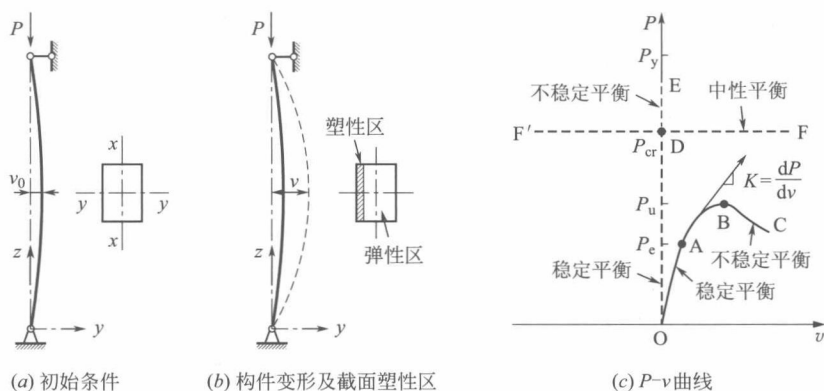


图 1.16 有初弯曲弹塑性轴压构件的极值点失稳（小变形）

构件的平衡状态曲线为图 1.16 (c) 中的 OABC 连续曲线，A 点以前构件为弹性，超过 A 点后进入弹塑性，构件的刚度 K 也即曲线斜率快速减小，变形加快，但在达到 B 点以前， $K>0$ ，构件以弯曲状态保持稳定平衡。超过 B 点后， $K<0$ ，构件以弯曲状态保持不稳定平衡。B 点的 $K=0$ ，是稳定平衡的极限，对应的荷载称为极限荷载，记作 P_u 。由于构件始终处于弯曲平衡状态，平衡路径唯一，没有出现平衡路径的分岔点，而且曲线出现了极值点，故称为极值点失稳，也称为第二类稳定问题。

如果该轴心受压构件的材料为弹性，构件初始挺直，无缺陷，则平衡状态曲线为图 1.16 (c) 中的虚线部分，OD 段以挺直状态保持稳定平衡，DE 段以挺直状态保持不稳定平衡，DF 和 DF' 段以弯曲状态保持随遇平衡，D 点对应的荷载为临界荷载 P_{cr} 。如果该构件的材料为弹塑性，构件非常短且无缺陷，则构件始终以挺直状态保持稳定平衡，不会失稳，荷载可以持续增加，直到构件全截面屈服，也即发生了强度破坏，对应的荷载记作 P_y ，显然 $P_y>P_{cr}>P_u$ ，相关内容将在第 4 章中讲述。

实际工程中的各类结构和构件不仅材料是弹塑性的，通常还会存在多种初始缺陷，这些因素都有可能发生极值点失稳，因此极值点失稳十分普遍。

1.3.3 跃越失稳

图 1.17 (a) 所示为理想的受压两铰扁圆拱，构件无缺陷，材料为弹性，作用有法向均布荷载 q ，由结构力学知道，拱的内力只有轴压力。拱的平衡状态曲线见图 1.17 (b)，加载后拱会因轴向压缩变形产生微小的挠度 w ，荷载不大时，轴压变形较小，拱在拱脚线的上方以受压状态保持稳定平衡 (OA 段)；随着 q 的增大，轴压变形增大，当轴压变形达到一定程度时，拱会突然跳跃至拱脚线的下方，以受拉状态保持稳定平衡 (CD 段)，荷载可以继续增加。由 A 点到 C 点虽然过程短暂，但变形较大，而且经历了 AB 段不稳定平衡状态，该类稳定问题称为跃越失稳，A 点对应的荷载为临界荷载 q_{cr} 。

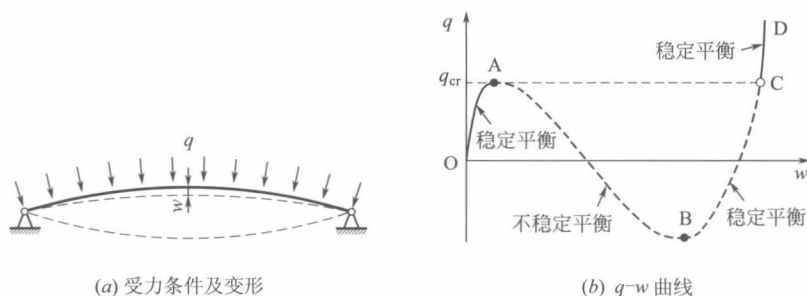


图 1.17 理想受压两铰扁圆拱的跃越失稳 (大变形)

除了两铰扁圆拱外，各类扁拱、扁平壳以及起坡平缓的刚架等都有可能发生跃越失稳，跃越失稳对缺陷也非常敏感，设计时应充分考虑，相关内容将在第 9 章中讲述。

从荷载位移曲线上可以看出，平衡分岔失稳、极值点失稳、跃越失稳在本质上是不同的，区分上述几种失稳类型非常重要，否则很难进行准确的稳定分析。

1.4 稳定分析时需要考虑的因素

稳定分析是针对已变形结构的平衡状态分析，只要是影响变形和平衡方程的因素都会对稳定产生影响。对于不同的结构，影响稳定的因素不一定相同，但进行稳定分析时必须考虑二阶效应、材料非线性、初始缺陷、边界条件、荷载类型等因素。

1.4.1 二阶效应

从前面知道，结构位置或形状 (简称位形) 的变化会产生附加内力、附加变形等效应，这些效应通称为二阶效应。二阶效应分为 $P-\delta$ 效应和 $P-\Delta$ 效应两种，见图 1.18， $P-\delta$ 效应由构件的侧向变形 δ 产生，也称构件的二阶效应； $P-\Delta$ 效应由结构的侧移 Δ 产生，也称结构的二阶效应或重力二阶效应。

对于图 1.18 (a) 所示轴心受压构件，挺直时只有轴压力和压缩变形，一旦发生了侧向变形， z 坐标处截面内力除了轴压力外，还有变形引起的附加弯矩 M 和附加剪力 V ，由于各截面的侧移 δ 不同，内力值也不同。附加内力还会使 δ 进一步增大， P 与 δ 为非线性