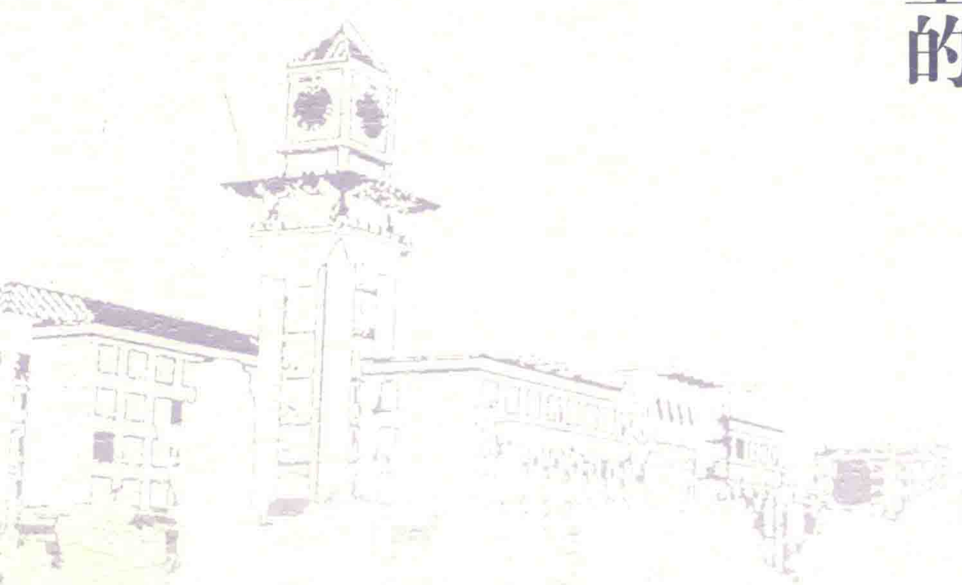
中南财经政法大学
青年学术文库

# 几类金融随机模型的数值方法

Computational Methods for Several Stochastic Models in Finance

周艳丽 ◎ 著



中国社会科学出版社

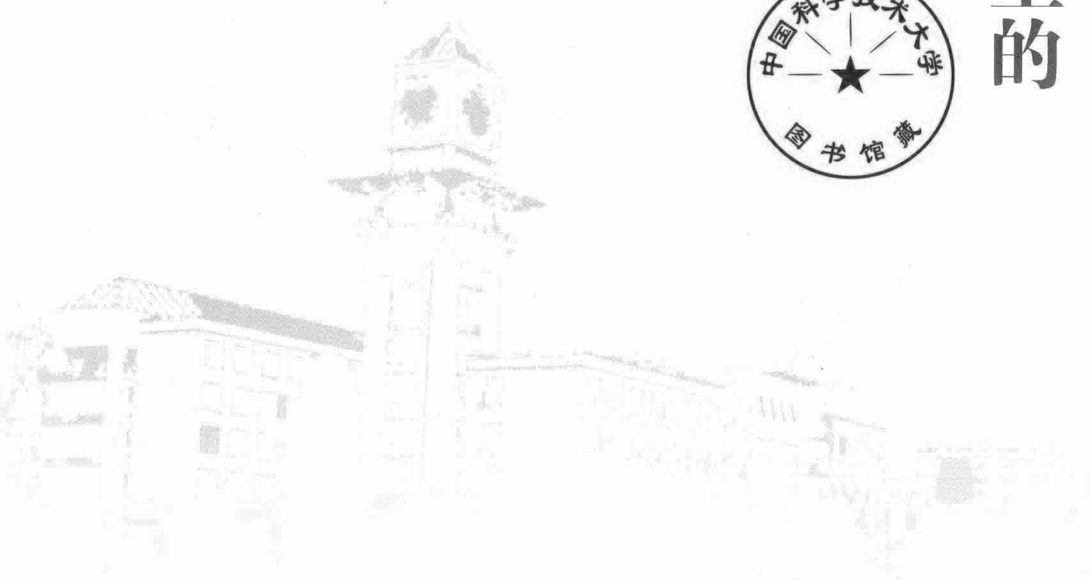
中南财经政法大学
青年学术文库

# 几类金融随机模型的数值方法

Computational Methods for Several Stochastic Models in Finance

周艳丽 ◎ 著





中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

几类金融随机模型的数值方法／周艳丽著．—北京：中国社会科学出版社，2019.2

（中南财经政法大学青年学术文库）

ISBN 978-7-5203-3877-6

Ⅰ.①几…　Ⅱ.①周…　Ⅲ.①金融学—数值方法　Ⅳ.①F830.49

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第287488号

出 版 人　赵剑英
责任编辑　徐沐熙
责任校对　郑　枫
责任印制　戴　宽

出　　版　中国社会科学出版社
社　　址　北京鼓楼西大街甲158号
邮　　编　100720
网　　址　http://www.csspw.cn
发 行 部　010-84083685
门 市 部　010-84029450
经　　销　新华书店及其他书店

印刷装订　北京君升印刷有限公司
版　　次　2019年2月第1版
印　　次　2019年2月第1次印刷

开　　本　710×1000　1/16
印　　张　7.75
插　　页　2
字　　数　84千字
定　　价　38.00元

# 前　言

如今，随机微分方程已广泛应用于金融数量计算中，如利率、资产定价以及衍生品定价。不同于确定性的常微分方程模型，随机微分方程的解是一系列连续时间上的随机过程而不是在给定初始条件下的一个特定解。对于求解随机微分方程数值解的方法通常是基于常微分方程的并考虑随机动力学支持技术进行扩展。

本书由三部分组成。第一部分的研究集中在构建一个高效的数值算法来求解在泊松随机测度和固定时间延迟下的跳扩散随机微分方程。提出了随机微分方程弱解的简化泰勒方法，并证明了带跳的随机延迟微分方程的相应收敛性定理。通过对金融数学中常用的一类线性随机延迟微分方程模型进行数值模拟，结果表明，该数值方法在一定精度的要求下是稳定的。

本书的第二部分着重于分数阶随机微分方程在期权定价中的应用。我们首先建立股价过程的分数阶随机微分方程，然后通过分数阶随机微分方程推导欧式看涨期权的定价公式。之后对我们所建立的分数阶期权定价公式与两个经典期权定价模型进行比较分析，蒙特卡洛模拟发现，分数阶微分方程下的定价结果要优于经典Black-Scholes方法和分数布朗运动方法。

第三部分的研究重点是金融随机模型的参数估计问题。首先，在贝叶斯统计推断和马尔可夫链蒙特卡洛方法基础上，采用重要性抽样技术以提高估计的稳健性，我们提出一个随机微分方程模型参数估计的有效算法。并且，还研究了不同样本下潜在变量的变化对参数估计值的影响。研究结果表明，该方法用于潜在变量变化的结果是稳健的。然后，我们针对刚性随机微分方程的参数估计设计了一种半隐式算法。这是基于隐式蒙特卡洛模拟并结合粒子群优化算法的一种数值方案。实证结果表明，当随机微分方程模型是适度刚性时，半隐式Milstein方法产生的估计结果比显式的Milstein方法的估计有更高的精确度。此外，粒子群算法可以产生更可靠的估计，与遗传算法相比它的执行成本更低。

本书是关于随机算法与金融数学模型相结合的探索性成果，研究过程中得到国家自然科学基金数学天元基金《带跳随机时滞微分方程解的高效快速算法设计及其在美式未定权益定价中的应用》（项目号：11526193），教育部人文社会科学青年基金项目《基于管理者异质信念的实物期权方法在企业价值评估中的应用研究》（项目号：17YJC630236）和中央高校基本科研项目青年教师创新项目《实物期权定价方法在企业投资决策中的应用研究》的资助。研究成果希望能给相关领域研究者和从业者带来一些启发。由于作者的知识水平和研究能力有限，书中难免存在不少谬误，恳请读者批评指正。

本书的出版得益于中南财经政法大学科研部出版基金资助和中国社会科学出版社编辑徐沐熙及其团队的辛苦工作，对此表示真挚的感谢。

# 目　　录

# 第一章

# 绪　论

## 第一节　研究背景

在过去的30年里，作为重要工具和关键方法的随机微分方程在诸多学科领域的使用在不断增强。例如在工程学中，随机微分方程用于过滤问题和控制理论；在物理学中，被用于研究各种物理现象的随机应激影响；在生物学中，随机微分方程用来模拟生殖和环境中随机变异对种群的影响。一个最大的应用创新是在新兴的金融数学领域，用随机微分方程给金融衍生产品定价以及进行风险对冲，如期货、期权、互换等。它在现代金融理论中起着非常重要的作用，已被广泛用于模拟关键的变量，如股票价格、短期利率、资产收益及其波动。特别是随着当下全球经济环境的波动加剧，急需要对市场的不确定性进行管理，以确保投资决策的有效性。

在数理金融中，动态系统的延迟意味着金融系统存在记忆性或惯性。例如，连续的价格变化（或收益）不是独立分布的，也就是所谓的低效率市场。随机延迟微分方程是一个捕捉记忆效应的有效工具。来自许多金融市场的调查显示，相当大比例的投资者使用过去的价格为指导，以作出投资决定，然而这种反馈交易策略可能会导致投机性资产泡沫和危机。由于标准的非延迟随机模型不考虑这种反馈行为，故有必要假定当前总需求是过去价格的函数。在这种情况下，价格变动就可以通过随机延迟微分方程来进行建模。

另外，记忆效应也可以用分数随机微分方程进行建模。如果存在一系列长期记忆（或偏随机游走）行为，则观测点之间具有持续的时间依赖。在过去的几十年中，分数布朗运动和分数随机微分方程在许多领域中都有应用和发展，如在经济学、工程学、生物学等领域中记忆效应大范围内存在，尤其在金融经济学中，随机模型中记忆效应项的存在能够解释很多金融资产收益的异象。举例来说，若投资回报率存在长期依赖性的话，那么最优消费（或储蓄）和资产组合投资决策可能对投资期限非常敏感。为了解释金融动态系统的长期记忆效应，分数随机微分方程是很好的建模替代选择。

近年来，随着这些复杂数学模型被开发使用，随机建模和随机仿真模拟已经成为深入研究金融问题的有力工具。由于只有一小部分随机模型有明确的解析解表达式，因此设计高效和有效的数值计算方法求解随机延迟微分方程显得十分迫切并具有重要意义。

模型的参数校准是金融数学领域又一重要的问题。鉴于随机微分方程在许多领域有着广泛的应用，任何能够提高随机微分方程模型的性能的改进都是有益的。在计量经济学中，最优参数估计通常是通过极大似然函数来获得的。然而，对于随机微分方程的参数估计，似然函数解析形式很难获得，因此在传统的计量模型中，用精确最大似然估计通常是行不通的。为此，需要进一步研究和开发针对随机模型的拟极大似然函数和设计可行高效的最优参数搜索程序。

## 第二节　研究文献评述

### 一　总体概述

在常微分方程中引入随机项称为随机微分方程（SDE），其解是一个随机过程。随机微分方程可理解为一个确定型微分方程受不可忽略的随机扰动影响。随机微分方程模型在许多领域，如经济、金融、化学、生物、微电子和控制理论等研究中起着非常重要的作用。特别是，随机微分方程是现代金融理论的关键工具之一，已被广泛用于研究关键金融变量的行为中，如股票价格、短期利率及其波动性等。

通过考虑时间延迟或事件驱动的不确定性，随机微分方程模型能够准确地描述现实世界许多现象。时间延迟意味着当一个行为发生后需要在一定的时间周期后才能被观察到动作产生的效

果，这一现象称为记忆效应，它存在于几乎任何学科的大多数系统中。例如，患者通常在被感染后的几天甚至几周才出现疾病症状。同样，化学反应中分子的运动，金融市场中资产价格的变动等都有时间延迟现象。因此，研究随机延迟微分方程对精确理解真实系统运行具有重要意义。另外，通过对事件驱动的不确定性的研究，如企业违约、运营失误、市场崩溃或政府宏观经济政策变动的发生越来越频繁，加大了金融市场的波动性，这些都不是能用纯粹连续时间随机过程来进行研究的。

另外，记忆效应可以通过使用分数随机微分方程建模来描述。长期记忆是指一系列长期滞后的相关结构，如果时间序列中存在长期记忆（或偏随机游走），则观测值之间存在持续的时间依赖（Greene和Fielitz[90]）。在过去的几十年中，分数布朗运动和分数随机微分方程在许多应用领域都被用来描述长期记忆，如金融学和经济学、工程学、生物学等。Greene和Fielitz揭示了股票收益具有长期记忆性，这对金融经济学的理论具有重要启示意义[91]。资产收益的波动率存在长期记忆性，这在新兴市场的未定权益定价中也有重要意义（由LeRoy[127]）。

随机微分方程在包括金融、物理、化学、工程、生物学、神经科学等领域发挥着重要作用，这些方程的运用通常取决于参数的选取，然而其参数往往是未知的。关于这些参数的信息是研究的关键，因此在实际应用中，对观测数据的利用是非常重要的。近年来，从观察采样数据获取随机微分方程的参数估计已经得到了金融计量经济学研究的大量关注[50, 74]。

## 二　随机微分方程的数值方法综述

金融和经济计量的动态规律常常可由随机微分方程来描述。带跳扩散的随机微分方程能捕获由事件驱动的不确定性的影响，从而获得金融和经济建模的关注，参见Merton[113]或Cont和Tankov[108]。另一个引起广泛兴趣的问题是具有记忆性的动力系统，实际中涉及记忆效应和时间延迟现象的确是普遍存在的。具体地讲，带时滞的随机微分方程在如物理、生物、经济、金融等许多领域发挥着重要作用。它们也一直是金融数学广泛研究的主题[84, 114, 129]。在这种情况下，为了更准确预测不远的将来必须知道整个动态系统的过去，还有现在的信息。一些数学研究已给出了一系列随机延迟微分方程的结果，并对这样的随机动态系统的稳定性和收敛行为进行了分析[51, 103, 116, 117, 138]。

由于很多经济和金融变量的动态过程往往可由随机微分方程来描述，因此这类动态系统的记忆性引起了学者广泛兴趣。在这样的情况下，为了准确地预测其将来发展，必须知道整个经济金融动态系统的过去状况，以及其存在的整个信息集合。已有一些数学著作系统讨论了一系列随机延迟微分方程的研究成果[64, 73, 98, 146, 153]，最著名的研究理论包括由Kolmanvskii和Myshkis[141]建立的延迟微分方程的相关成果，Mohammed [122, 123]、Mao[148, 149]、Mohammed和Schentzow[126]提出的延迟微分方程理论。另外，还有带马尔可夫切换和泊松跳跃的随机延迟微分方程，参见文

献[12, 68, 109]。

实际上，大多数随机延迟微分方程的解析解几乎不能获得。因此，研究和寻求离散时间近似方法求解随机延迟微分方程是非常必要的。离散时间近似值可以分为两类：强逼近和弱逼近[104]。在强逼近意义下，针对随机延迟微分方程，Kuchler和Platen[139]提出来显式和隐式数值逼近方法。Kuchler和Platen[140]对于随机延迟微分方程的弱数值方法也进行了系统的研究。尤其是蒙特卡洛模拟方法作为一种强大的模拟工具被用于随机微分方程的算法设计中[22, 27, 148]。

考虑弱近似值的主要动机是为了计算随机微分方程解的期望函数。在数理金融中，金融期权公平定价问题转化为求解随机微分方程解的期望函数，这也等价于确定一个随机微分方程弱解逼近方式，即用随机泛函微分方程描述随机系统的Lyapunov指数，参见Milstein和Tretyakov[57]。随机泛函微分方程的Lyapunov指数被Mohammed和Scheutzow[124, 125]进行了计算研究。无延迟弱逼近的随机微分方程的解已得到很好发展，详见Kloeden和Platen[104]，Milstein和Tretyakov[58]和Kohatsu-Higa[3]。关于延迟随机微分方程解的弱逼近数值方法，最早的研究工作详见Kuchler和Platen[140]。然而，他们提供的陈述并没有经过严格的论证。严格的分析最近是由Buckwar和Shardlow[40]提出，他们建立了一阶欧拉方案的弱收敛形式。另外，一类欧拉弱收敛形式的研究结果由Clement，Kohatsu-Higa和Lamberton[1]提出，其结果为发展带记忆随机系统的高阶弱收敛形式创造了机会。

金融数学中的鞅问题与随机微分方程的弱解密切相关。带跳随机微分方程弱解的存在性的研究工作总结在Zanzotto[101]和[102]中给出。另一种方法是利用拟微分算子研究随机微分方程的解[72, 145]。

含有记忆结构的时间序列已被广泛应用于生物、化学和物理系统中。同样，记忆效应也存在于金融系统中。大量的经济金融变量被研究证实受到记忆效应的影响，如国内生产总值（GDP）、利率、汇率、股票价格和期货价格等[18, 41, 48]。Garzareli等[2]通过条件概率方法和长期记忆程度证明了股票价格时间序列的记忆效应存在。在文献[25]中，作者报告了从几分钟至几天的时间窗口的数据分析结果，证实了波动率存在长期的相关性。

记忆效应由自相关函数来测量，并且，近年来Hurst指数作为有效度量工具，被引入来测量记忆效应[62]。Hurst指数通常用符号$H$表示（$0 < H < 1$）。当$0 < H < 0.5$时，时间序列具有负相关性，抗持久性行为，这被称为短期依赖性记忆；当$H = 0.5$，时间序列没有依赖；然而，在$0.5 < H < 1$的情况下，时间序列有正相关性和持久性行为，这是长期依赖性记忆。持久行为也被称为Joseph效应（见Mandelbrot和Wallis[16]）。Cajueiro与Tabak[36, 37]还发现在金融市场中存在大量记忆效应现象。

很多学者用分数布朗运动来描述金融变量的记忆特征。Mandelbrot和Van[17]首次发现了股票收益长期记忆效应的存在，并给出分数布朗运动的定义。此后，用分数布

朗运动描述金融市场中的记忆现象变得越来越流行。例如，Beben和lowski[87]，Huang与Yang[15]，Evertsz[24]，Lo[13]，和Wen等[47]都证明收益回报是长期（或短期）依赖市场的。在Black和Scholes[44]基于经典的随机微分方程理论发展了期权定价理论之后，大量文献研究了基于分数布朗运动的期权价格。例如，Necula[21]，Rostek[120]，Hu和Øksendal[152]等获得了在分数布朗运动下的Black-Scholes期权定价公式。Ren等[150]也考虑在$0.5 < H < 1$情况下的期权定价模型。在$0 < H < 0.5$的情况下，Wang 等[144]对期权定价公式进行了研究。Chen等[45]建立了在$0 < H < 1$下的Black-Scholes模型的混合分数阶形式，并给出了相应的伊藤公式。此外，Cheridito[96]研究了在混合分数布朗运动下，股票价格的随机过程可以转化成一个半鞅。

分数布朗运动由于其自相似性和长依赖性已成为许多应用领域尤其是金融数学领域的合适工具。对于$H \neq 0.5$，分数布朗运动既不是马尔可夫过程也不是半鞅，故不能用平常的随机微积分分析它。在为分数布朗运动建立了路径依赖的积分理论后（[128]和[82]），由$B_H(t)$驱动的存在市场套利的数学模型被构建[85]。因此，分数布朗运动不再被认为适合金融数学建模。后来基于Wick积的一类称为分数伊藤积分的新积分[151]被定义，并发现相应的伊藤型分数Black-Scholes市场是无套利的。在Hu和Øksendal的研究工作中[80]，他们推导了在$t = 0$时欧式期权的价格公式。Sethi和Lehoczky[130]研究发现Black-Scholes期权定价公式可以通过使用不同类型的随机积分推导出来。布朗运动伊藤积分的推导过程是众所周知的，然而，Stratonovich框架下