

普通高等教育“九五”国家教委重点教材

非线性动力学

Nonlinear Dynamics

刘秉正 彭建华 编著

高等教育出版社



要點容內

普通高等教育“九五”国家教委重点教材

非线性动力学

Nonlinear Dynamics



刘秉正 彭建华 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“九五”国家教委重点教材。

本书比较全面地叙述了非线性动力学的基础知识和基础理论,特别着重介绍了近40年来发现与研究的非线性系统的混沌运动和对非线性系统特征的一些重要的刻画、分析及诊断方法。本书重视物理概念的阐述和理论联系实际,同时也注意介绍近10年来这方面的某些重要进展。本书的内容和叙述方式无论对理论工作者还是对这方面有兴趣的实际科研人员都是很有好处的,也便于刚开始涉猎本领域的初学者。

本书可作为理科高年级学生和研究生非线性动力学或混沌力学课程的教材使用,也可供广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学/刘秉正,彭建华编著. —北京:高等教育出版社,2004.1

ISBN 7-04-012952-3

I.非... II.①刘...②彭... III.非线性力学:动力学—高等学校—教材 IV.O322

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第089334号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	潮河印业有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004年1月第1版
印 张	37.25	印 次	2004年1月第1次印刷
字 数	700 000	定 价	45.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

序 言

非线性动力学的崛起,特别是其中的混沌运动的发现是20世纪后半叶自然科学的最重要成就之一。其影响所及,不仅使应用数学、力学和物理学获得巨大进展,也涉及几乎所有自然科学、工程技术和社会科学各领域,因此非线性动力学已成为跨许多专业之间的一门极重要的新学科。其实这也是很自然的事,因为自然现象和社会现象原本大都服从非线性规律,线性规律只是非线性规律的近似。

近年,许多高等院校在本科高年级学生和研究生中开设了非线性动力学或混沌动力学之类的课程,但是目前国内似乎还缺乏比较全面讲述非线性动力学内容方面的教科书。本书就是试图填补这方面的空白。为了适应理工科等各方面师生以及科研和工程技术人员了解非线性动力学的理论基础、开展这方面的研究工作和进行实际分析应用的需要,本书除了介绍非线性动力学的基础知识和基础理论外,还介绍了一些实例和近年的某些重要进展,特别着重介绍了近40年来发现的非线性系统的混沌运动和对非线性系统特征的一些重要的刻画、分析及诊断方法。如果将本书选作教材,教师可根据专业需要和课时数,灵活地选取内容。

本书比较重视物理概念的阐述和实例。但限于篇幅,在理论分析上有些地方就显得不够严密和深入,某些重要理论(如量子混沌等)、最新的分析方法和重要的实际应用(如神经网络、元胞自动机等)也很少涉及或没有涉及。我们相信,对这些问题有兴趣的读者可以自行找到有关文献加以解决。或者根据大家意见,以后再版时再做补充和修改。

本书第一、二、三、五章和§6.5由刘秉正执笔,其余由彭建华执笔。在编写过程中,得到陈菊芳老师、孟艳丽、商云晶、陈艳艳、程丽、陆卫兵、刘颖和高思莉诸研究生的帮助,在此深表感谢。

本书得到了教育部科技研究重点项目2000(00042)资助。

诚恳地欢迎读者对本书的不足之处批评指正。

编著者 东北师范大学 刘秉正

深圳大学 彭建华

2003年9月

目 录

第一章 基础知识和基础理论

§ 1.1 非线性系统	1
§ 1.2 非线性动力学方程解的一些形式	14
§ 1.3 解的稳定性和李雅普诺夫定理	22
§ 1.4 线性稳定性分析和奇点分类	31
§ 1.5 线性稳定性分析、罗斯-霍维兹判据和中心流形定理	43
§ 1.6 零斜线分析和多重定态	55
§ 1.7 极限环	64
§ 1.8 分岔现象简介	74
§ 1.9 突变理论简介	89
§ 1.10 周期扰动和摄动法	99
习题	112
参考文献	118

第二章 微分动力系统和混沌

§ 2.1 洛伦茨方程和混沌	120
§ 2.2 混沌	132
§ 2.3 奇怪吸引子	143
§ 2.4 延迟方程	151
§ 2.5 保守系统中的随机运动	161
§ 2.6 化学振荡	177
§ 2.7 几个非线性运动的简单实验	191
§ 2.8 非线性电路与混沌	198
习题	209
参考文献	210

第三章 离散映射

§ 3.1 逻辑斯谛映射	214
§ 3.2 普适规律	228
§ 3.3 符号动力学简介	244
§ 3.4 间歇混沌和混沌“危机”	258
§ 3.5 二维离散映射	268
§ 3.6 圆映射	283

从模型推得其他有意义的结果。因此,根据已有的关于系统的知识和实验事实,对模型进行修正,使其更符合实际,这是非线性系统理论的一个重要内容。

第一章 基础知识和基础理论

(广义的)动力学研究的是系统如何随时间变化。所谓系统,就是指由一些相互联系(或相互作用)的客体组成的集合。这些客体,既可以是自然科学中的一些物质,如气体、液体、固体、化合物、生物的各部分或其整体,也可以是各种社会事物和组织,如各种群体或财政经济结构以至生产力和知识等较抽象的事物。系统的性质或特征是用一些所谓状态变量(state variables)所表征的,如粒子的坐标和动量,热力学中的温度、压强和体积,化学反应中各化合物的浓度,以及社会现象中的人口和人口密度、生产力和生产资料,股票行情,等等。当这类状态变量随时间变化,也就是系统处于非平衡态时,此时的系统称为动力(或动态)系统(dynamical system)。动力学就是研究动力系统中状态变量如何随时间变化(即系统的运动)的一个学科。状态变化的规律既可能表示为连续形式的微分方程或微分积分方程,也可能用关于状态变量的离散方程表示。本章讨论用非线性微分方程表示的微分动力系统的一些基本规律^①,以后各章再陆续讨论离散方程和非线性系统中一些进一步的问题。

§ 1.1 非线性系统

首先讨论一下什么是非线性系统,并通过介绍一些具体实例以了解其存在的普遍性。

1. 非线性系统和非线性动力学

如前所述,动力学是研究动力系统的状态变量随时间变化规律的学科。状态变量随时间变化的定量表述是各种形式的(连续的或离散的)数学方程,这种表示状态随时间变化的方程称为动力学(动态)方程(dynamical equation)或运动

^① 还要指出,本章和第二章的微分方程都是只有时间作自变量,而未涉及系统的空间效应,即这类方程都是常微分方程。实际上,许多系统都具有空间效应,从而代替常微分方程,它们的动力学方程应该是偏微分方程。关于系统的空间效应,我们将只在第四章以及 § 2.6、§ 6.4 和 § 6.5 谈到,其中有的只是提到或略加介绍,有的也有具体介绍和分析讨论。本书的重点是用常微分方程表述的微分动力系统。

方程。

过去对动力系统的研究一般多限于线性系统,即其动力学方程都是线性的。也就是说,在方程中只有各状态变量及其各阶导数的线性(一次)项。这样做是因为线性方程易于求解,而且具有一些简单的特性,如当初始条件给定后,方程的解(代表系统的运动)便是确定的,而且解服从所谓叠加原理:方程不同的解的线性叠加仍是方程的解。然而实际的自然现象或社会现象毕竟是很复杂的,其动力学规律往往都须用非线性方程表示,即实际存在的客体大多数都是非线性系统。一个极明显的例子是各种实用振荡器都是非线性的(即它们都是进行所谓极限环型振荡,参考 § 1.2 和 § 1.7)。非线性方程除极少数外,大都不存在解析解,从而难于用一些经典方法了解其特性。事实上,早在 19 世纪末 20 世纪初,法国著名数学家和力学家庞加莱(H. Poincare)就已指出,某些非线性系统具有内禀的随机性(§ 1.2 和第二章)。随着 20 世纪六七十年代计算机科学技术的迅速发展,人们可以容易地求得一般非线性方程的数值解,这才使人们对非线性系统有了较深刻的了解,而且使非线性动力学在自然科学和社会科学的许多领域中得到广泛应用。

动力学方程的正确性要以客观实践的检验作基础。如力学中关于质点运动的牛顿第二定律、拉格朗日方程和哈密顿方程,电学中关于电阻(R)、电感(L)和电容(C)组成的 RLC 电路中电压(V)或电流(i)变化的方程等,都是经过大量实验验证而被确立的。这类动力学方程便成了定律或定理而为人们所深信不疑(当然,随着实验和观测的不断精确化,也可能发现这类动力学方程应作某些修正或限定其适用范围)。

但是在许多情形下,人们并不清楚系统包含哪些状态变量以及这些状态变量之间相互作用的规律。还有不少情形,人们只是观测到反映系统随时间变化时某个(或某些)变量变化的时间序列(time series),此变量甚至可能不是系统的状态变量而只是与状态变量有关的另外的变量。如人体心脏的搏动表明心脏是一复杂的振荡系统,但目前除了知道心肌细胞膜电位(细胞膜内外电位差)以及穿过细胞膜的几种离子流是其重要的状态变量外,对这些变量之间确切依赖关系以及心脏各部分和心脏与神经系统之间的相互作用,仍然是知焉而不详,从而至今仍无法写出十分准确的关于心脏活动的动力学方程。反之,人们可测出体表两点之间电位(差)变化,它们是心肌电位变化的反映,这就是所谓心电图(electrocardiogram,简称 ECG)。因此,ECG 反映了心脏工作时其状态变化的情况,但 ECG 却不是心脏的状态变量自身的变化。在这类不知系统状态变量相互作用的细致规律的情形下,人们仍希望借助于已有的知识,特别是某些变量随时间变化的规律来建立系统的动力学方程,这就是所谓的建模(model)。人们希望将这种模型方程的解与实际观测结果进行比较以验证模型的正确性,同时也希

望从模型推得其他有意义的结果。因此,根据已有的关于系统的知识和实验数据建立系统的动力学模型,也是研究动力系统的重要方法之一。

下面介绍一些具体的非线性动力系统(简称非线性系统)的例子,以便了解其存在的普遍性。

2. 弹性系统

人们熟知的弹性系统的胡克定律是其中弹性势能 U 与位移(形变) x 的二次幂成正比。即(为简单计,我们先讨论一维情形,并设振子的质量已约化为 1):

$$U(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad (1.1.1)$$

式中 x 表示离开平衡点的位移, ω 是常量。上式表示,系统的恢复力 f 与位移成正比(线性关系):

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\omega^2 x \quad (1.1.2)$$

由牛顿第二定律得 $m\ddot{x} = f = -\frac{dU}{dx}$ (变量上面的圆点表示其对时间 t 的导数,下同),即

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.1.3)$$

此运动方程只含有变量及其导数的一次项,因此是线性的(linear),即服从胡克定律的弹性系统是线性的。

但是,实际上许多弹性系统(包括工程上的各种构件和桁架)并不服从式(1.1.1)这样简单的规律。一般说来,一维弹性系统的势能取如下较普遍的形式:

$$U(x) = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{1}{3} \lambda x^3 + \frac{1}{4} \mu x^4 + \dots \quad (1.1.4)$$

式中 κ, λ 和 μ 都是常系数(常量)。从而系统的恢复力取如下形式:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \lambda x^2 - \mu x^3 + \dots \quad (1.1.5)$$

由这样的 U 和 f 得到的运动方程不仅含有位移及其导数的一次项,还含有它们的高次项。这种含有状态变量或其导数高次项的运动方程便是非线性的(non-linear)。

在势能 U 的多项式表示式(1.1.4)中取多少项才合适或正确,应根据具体问题和要求来定。例如人们发现,人的外耳与中耳之间的鼓膜振动具有非对称性:膜向外侧移动时,恢复力大一些。如果把鼓膜运动看作一维的(即只考虑膜中心部位沿垂直于膜面的运动),并用 x 表示此位移(设向外为正),则鼓膜振动

时所受的恢复力可近似地表为:

$$f = -\kappa x - \lambda x^2 \quad (1.1.6)$$

即其势能是:

$$U = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{1}{3} \lambda x^3 \quad (1.1.7)$$

它也是非对称的。设鼓膜的质量约化为 1, 根据牛顿定律, 鼓膜的运动方程是

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = 0 \quad (1.1.8)$$

显然, 上式是非线性的。设进入外耳的声音(包含基音和许多谐音)可表示为:

$$f = \sum_{n=1} F_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (1.1.9)$$

在此声音作用下, 鼓膜的运动方程为:

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = \sum_{n=1} F_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (1.1.10)$$

由于上式的非线性, 由鼓膜传入内耳使人感觉到的声音除原来的声音外, 还可能出出现其他的音——分音和结合音(参考 § 1.10)。

不少弹性系统虽然是非线性的, 但其弹性势能却具有对称性。其中最简单形式是:

$$U = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{1}{4} \mu x^4 \quad (1.1.11)$$

与 κ 比较, 通常 μ 是一较小的系数。此时系统的恢复力为:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \mu x^3 \quad (1.1.12)$$

对于一般弹性系统, $\kappa > 0$, U 和 f 如图 1.1.1 所示。很明显, 此系统只有一个稳定的平衡点 ($\frac{dU}{dx} = -f = 0$ 的点), 即 $x = 0$ 。另外两个平衡点 ($x = \pm \sqrt{-\kappa/\mu}$) 的 U 都具有极大值, 它们都是不稳定的。此外, 这种弹性势能还可分为两种情形: $\mu > 0$ 的硬弹性系统和 $\mu < 0$ 的软弹性系统。前一情形的恢复力大于胡克定律给出的值, 后一情形的恢复力小于胡克定律给出的值(图 1.1.1)。

但也存在 $\kappa < 0$ 的情形。其势能如图 1.1.2 所示(设 $\mu > 0$): 它有两个极小值 ($x = \pm \sqrt{-\kappa/\mu}$), 中间夹一极大值 ($x = 0$ 处), 从而形成被中部势垒分隔开的两势阱。也就是说, 这时有三个平衡点: 中间 $x = 0$ 是不稳定平衡点, 两侧是两个稳定平衡点(双稳态)。某些机械系统的弹性势能如此(参考 § 2.7 中图 2.7.1)。某些分子的势能也是如此。如氨(NH_3)分子是由 4 个原子组成一个四面体结构, 其中 3 个氢原子组成一平面, 氮原子在与 3 个氢原子相互作用下具有两个稳定位置, 分别在此氢原子平面的两侧(图 1.1.3)。氮原子在氢原子平面中心处也有一平衡位置, 但是不稳定的, 故氮原子的势能有如图 1.1.2 的形式。由于在氢原子平面 ($x = 0$) 有势垒存在, 按照经典力学理论, 氮原子不能穿过势

效数值) 余律按容以于于律, 出讲味学式于量因, 标至同之态非宝器个两在坐

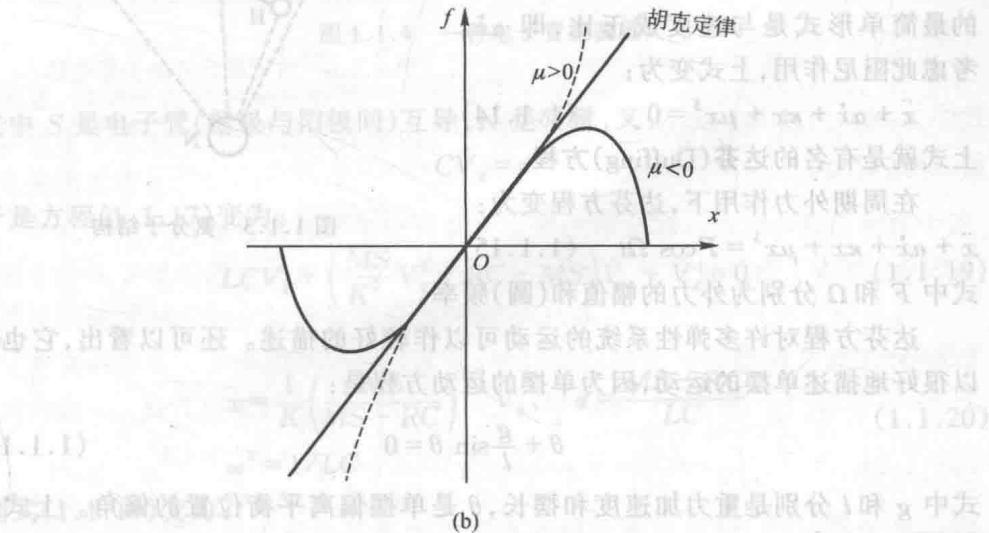
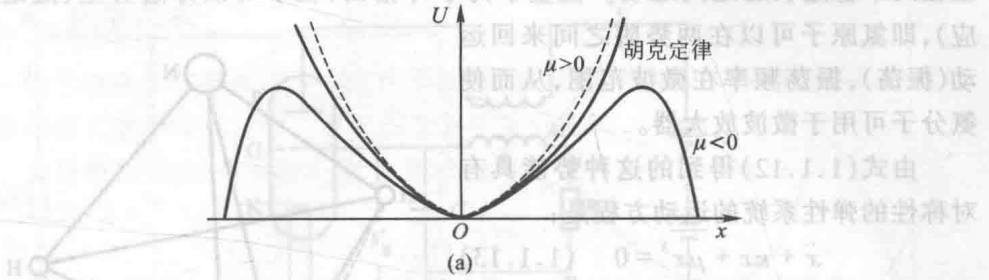


图 1.1.1 式(1.1.11)表示的弹性势能和恢复力($\kappa > 0$ 情形)

为在此方程中, 非线性出现在 \dots

1.1.4 中 A 和 B 两点间接入一阻号电阻式 $(R_0 \text{ 伏 } V \text{ 安 } I_0) \text{ 求 } R_0 \text{ 求 } R_0$

量中其 \dots (1.1.22)

五球类属由力半 \dots

由若别于于由力分 \dots

方解的解 \dots

尔称此类型属 \dots

还可 \dots

(1.1.1)

一管等元件都具有负阻区 \dots

ab 段即为 \dots

(81.1.1)

图 1.1.2 式(1.1.11)表示的弹性势能($\kappa < 0$ 情形)的双稳态势阱

垒在两个稳定状态之间运动。但量子力学却指出,粒子可以穿过势垒(隧道效应),即氮原子可以在两势阱之间来回运动(振荡),振荡频率在微波范围,从而使氮分子可用于微波放大器。

由式(1.1.12)得到的这种势能具有对称性的弹性系统的运动方程是:

$$\ddot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1.1.13)$$

实际上,系统的运动总是要受到阻尼作用,阻尼力通常都是速度的函数。阻尼力的最简单形式是与速度成正比,即 $\alpha \dot{x}$ 。考虑此阻尼作用,上式变为:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1.1.14)$$

上式就是有名的达芬(Duffing)方程。

在周期外力作用下,达芬方程变为:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = F \cos \Omega t \quad (1.1.15)$$

式中 F 和 Ω 分别为外力的幅值和(圆)频率。

达芬方程对许多弹性系统的运动可以作较好的描述。还可以看出,它也可以很好地描述单摆的运动,因为单摆的运动方程是:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.1.16)$$

式中 g 和 l 分别是重力加速度和摆长, θ 是单摆偏离平衡位置的偏角。上式实际是非线性的。如果把 $\sin \theta$ 展成级数并只取前两项, $\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6} \theta^3$, 代入式(1.1.16)便得到类似式(1.1.13)的运动方程。

3. 范德玻尔(Van der Pol)方程

另一种常见的非线性系统是由于系统受到非线性阻尼作用引起的。其中最简单而又具典型意义的就是范德玻尔方程,它是 20 世纪 20 年代由范德玻尔在研究电子管振荡和模拟人的心脏搏动的基础上提出的。现在分析电子管振荡电路来导出此方程。

图 1.1.4 是一类典型的电子管振荡电路。与栅极 G 相连的是 RLC 电路。对此电路应用基尔霍夫定律得(M 是阳极 P 与栅极之间的互感系数):

$$L \dot{i} + Ri + V_g - M \dot{i}_a = 0 \quad (1.1.17)$$

电子管的阳极电流 i_a 受栅极电压 V_g 调控,其关系是:

$$i_a = S V_g [1 - V_g^2 / (3K^2)] \quad (1.1.18)$$

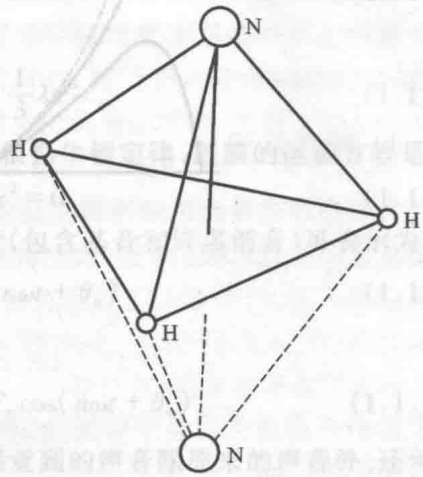


图 1.1.3 氨分子结构

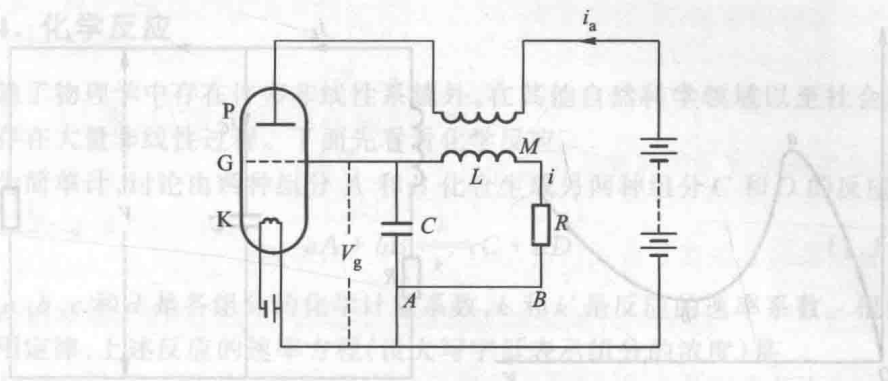


图 1.1.4 一种电子管振荡器

式中 S 是电子管(栅极与阳极间)互导, K 是常量, 又:

$$C\dot{V}_g = i$$

于是方程(1.1.17)变为:

$$LC\ddot{V}_g + \left(\frac{MS}{K^2} V_g^2 + RC - MS \right) \dot{V}_g + V_g = 0 \quad (1.1.19)$$

令:

$$x = \frac{1}{K} \left(\frac{MS}{MS - RC} \right)^{1/2} V_g, \quad \alpha = \frac{MS - RC}{LC} \quad (1.1.20)$$

$$\omega^2 = 1/LC$$

则式(1.1.19)变为:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.1.21)$$

上式就是有名的范德波尔方程。很显然, 式中的 ω 就是电路中的固有频率。因为在此方程中, 非线性出现在 \dot{x} 的系数里, 因此它表示非线性阻尼。如果在图 1.1.4 中 A 和 B 两点间接入一讯号电源 $E_0 \cos \Omega t$, 则范德波尔方程变为:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = F \cos \Omega t \quad (1.1.22)$$

上式就是受迫范德波尔方程。

虽然电子管振荡器越来越少见(电子管仍用作大功率振荡器), 但范德波尔方程的解却代表着一种典型的非正弦形式的振荡(参考 § 1.2 图 1.2.4)。范德波尔称此类偏离正弦振荡很厉害的振荡为弛豫振荡, 并曾用此方程模拟心脏的振荡。

还可以用范德波尔方程表示各种含负阻元件的振荡电路。像单结管和隧道二极管等元件都具有负阻区, 图 1.1.5 所示为隧道二极管的 $i-V$ 曲线, 其中 ab 段即为负阻区。在负阻区, $i-V$ 关系可表示为:

$$i = -aV + bV^3 \quad (1.1.23)$$

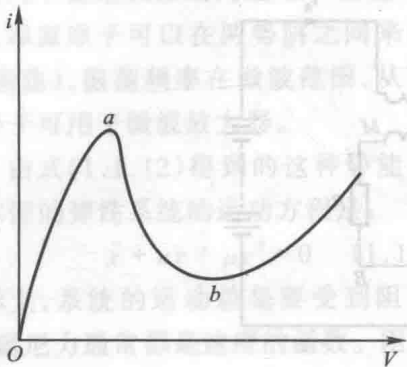


图 1.1.5 隧道二极管特性曲线

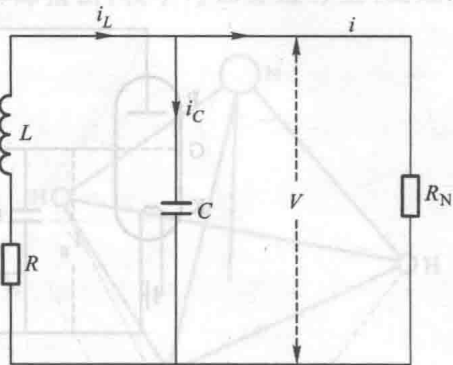


图 1.1.6 含负阻元件的振荡电路

式中 a 和 b 为适当的常数。通过分析图 1.1.6 所示的含负阻元件 R_N 的电路, 容易看出:

$$i_c = C\dot{V}; \dot{i}_c = C\ddot{V}$$

$$Li_L + Ri_L + V = 0$$

$$i_L = i_c + i$$

于是由 $i = i_L - i_c$ 得到:

$$-a\dot{V} + 3bV^2\dot{V} = (-V - Ri_L)/L - C\ddot{V}$$

$$= [-V - R(i + i_c)]/L - C\ddot{V}$$

$$= [-V - RC\dot{V} + R(aV + bV^3)]/L - C\ddot{V}$$

也就是:

$$\ddot{V} + \left(\frac{3b}{C}V^2 + \frac{R}{L} - \frac{a}{C} \right) \dot{V} + \frac{1-aR}{LC}V + \frac{Rb}{LC}V^3 = 0 \quad (1.1.24)$$

令

$$x = \left(\frac{3bL}{aL - RC} \right)^{1/2} V$$

$$\alpha = \frac{aL - RC}{CL} \quad \omega^2 = \frac{1 - aR}{LC} \quad (1.1.25)$$

$$\mu = \frac{aRL - R^2C}{3L^2C}$$

则式(1.1.24)化简为:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2x + \mu x^3 = 0 \quad (1.1.26)$$

上式与范德波尔方程相似。通常电阻 R 很小, 如果 R 小到使得 μx^3 项可忽略, 则上式便与范德波尔方程完全一致了。

4. 化学反应

除了物理学中存在许多非线性系统外,在其他自然科学领域以至社会现象中也存在大量非线性过程。下面先看看化学反应。

为简单计,讨论由两种组分 A 和 B 化合生成另两种组分 C 和 D 的反应:



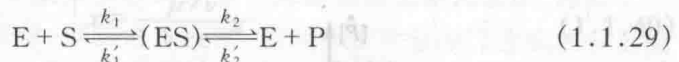
式中 a, b, c 和 d 是各组分的化学计量系数, k 和 k' 是反应的速率系数。根据质量作用定律,上述反应的速率方程(设大写字母表示组分的浓度)是

$$\frac{1}{c} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{d} \frac{dD}{dt} = kA^a B^b - k' C^c D^d \quad (1.1.28)$$

很明显,只要各化学计量系数有一个不等于 1,速率方程就是非线性的。对于大多数化学反应来说,情况就是这样的。下面以生物体中普遍存在的酶促反应为例来说明此事。

各式各样的酶是各式各样生物化学反应中的催化剂。绝大多数生物体中进行的生物化学反应都是在酶参与下进行的,这就是所谓酶促反应。因此,研究酶促反应的规律对生物化学具有极重要的意义。

下面只研究一个最简单的酶促反应:参与反应的底物 S 在酶 E 的催化下转变为产物 P。此反应可表示为:



上式表示,在反应过程中首先是底物与游离酶结合成复合物(ES),然后复合物(ES)再分解为产物 P 和游离酶 E。根据质量作用定律,在反应中底物、产物和复合物的浓度变化率分别为:

$$[\dot{S}] = k_1' [ES] - k_1 [E][S] \quad (1.1.30a)$$

$$[\dot{P}] = k_2 [ES] - k_2' [E][P] \quad (1.1.30b)$$

$$[\dot{ES}] = k_1 [E][S] + k_2' [E][P] - (k_1' + k_2) [ES] \quad (1.1.30c)$$

在实际反应进行的同时,总是还存在扩散输运过程,使得底物浓度和产物浓度大体上维持恒定。

由式(1.1.30)可知,反应刚开始进行时, $[ES] = 0$, $[\dot{ES}] > 0$, $[ES]$ 将随时间增长,从而 $[\dot{ES}]$ 又将随时间而变小。因此时间足够长时反应将达到稳定状态,即 $[\dot{ES}] = 0$, $[ES]$ 达到一稳定值而不再随时间变化,此时反应式(1.1.29)前后两步的速率相等。于是由式(1.1.30)得到,在稳定状态下:

$$-[\dot{S}] = [\dot{P}], [ES] = 0 \quad (1.1.31)$$

$$[ES] = \frac{k_1[S] + k'_2[P]}{k'_1 + k_2} [E] \quad (1.1.32)$$

又,结合态酶浓度与游离酶浓度之和应等于一常数:

$$[ES] + [E] = [E_0] \quad (1.1.33)$$

$[E_0]$ 表示酶的总浓度。由式(1.1.30)~(1.1.33)得到:

$$[\dot{P}] = -[\dot{S}] = \frac{k_1 k_2 [S] - k'_1 k'_2 [P]}{k'_1 + k_2 + k_1 [S] + k_2 [P]} [E_0] \quad (1.1.34)$$

由于酶的作用具有专一性(一种酶只对一种底物起作用),它与产物结合的可能性极小,因此通常有 $k'_2 = 0$ 。令:

$$K_m = \frac{k'_1 + k_2}{k_1} \quad (1.1.35)$$

K_m 称为米氏常数。于是式(1.1.34)简化为:

$$[\dot{P}] = -[\dot{S}] = \frac{k_1 k_2 [S] [E_0]}{k'_1 + k_2 + k_1 [S]} = \frac{k_2 [E_0] [S]}{K_m + [S]} \quad (1.1.36)$$

上式就是有名的米谢利斯-门顿定律(Michaelis-Menten law)。它表示底物或产物的变化率是底物的非线性函数。开始时,变化率随底物的增加而较快地增加,但以后逐渐变缓而趋于饱和(图 1.1.7)。

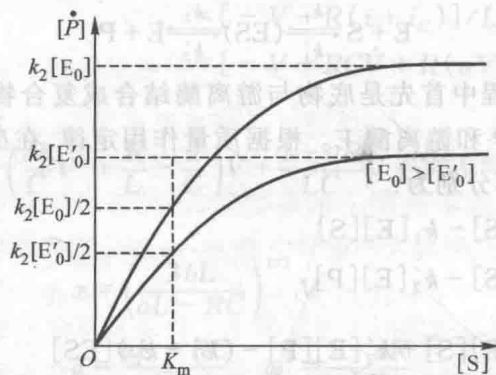


图 1.1.7 酶促反应中反应速率 $[P]$ 与底物 $[S]$ 的关系

这是可以理解的,因为酶的总浓度一定,当所有底物都与酶结合了,变化率便不能再随酶的增加而增加了。

当然,式(1.1.29)只是酶促反应中最简单的形式,实际的酶促反应要比这复

杂得多。因此,反应的速率方程比式(1.1.36)要复杂很多,即米谢利斯-门顿定律还有许多推广的形式。

5. 人(虫)口增长的简单模型

一个最简单的关于人(虫)口增长的模型是:人(虫)口的增长率与现有的人(虫)口数 x 成正比,即:

$$\dot{x} = \mu x \quad (1.1.37)$$

μ 为比例系数。上述线性方程有很简单形式的解:

$$x = x_0 e^{\mu t} \quad (1.1.38)$$

式中 x_0 表示 $t_0 = 0$ 时的人(虫)口数。这就是所谓人(虫)口按指数(几何级数)增长的马尔萨斯人口论。这样的规律当然是过分简单了。比如它没有考虑诸如由于人(虫)口过分密集、资源不足、不同区域人(虫)口之间的相互作用(迁徙和战争等),以及科技进步引起的生产力发展和人口寿命的变化等因素。

如果只考虑在一定区域内由于人(虫)口赖以生存的资源有限性,可以认为,人(虫)口过密时人与人(虫与虫)之间为争夺资源的竞争是人(虫)口增长的主要限制因素,则式(1.1.37)应改为

$$\dot{x} = \mu x - \nu x^2 = x(\mu - \nu x) \quad (1.1.39)$$

上式是非线性方程,它具有很简单形式的解:

$$x = \frac{\mu/\nu}{1 + ce^{-\mu t}} \quad (1.1.40)$$

式中常数 $c > 0$, 它由 $t = 0$ 时的人(虫)口数 $x_0 = \mu/(\nu + \nu c)$ 决定。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow \mu/\nu$, 这表示在资源有限的区域内,人(虫)口不能像式(1.1.38)那样无限制地增长,而要趋于一饱和值(极大值) μ/ν 。此饱和值即代表该区域的资源所能供养的人(虫)口数。图 1.1.8 表示式(1.1.40)的 $x-t$ 曲线,它呈 S 形。人们有时称式(1.1.39)或式(1.1.40)为逻辑斯谛(logistic)模型, [方程(1.1.39)也称 Verhulst-Pearl 方程], 式(1.1.40)也称为逻辑斯谛函数,相应的 S 型 $x-t$ 曲线为逻辑斯谛曲线。

这种具有饱和值的逻辑斯谛模型自然要比简单的马尔萨斯人口论合理得多。对于远比昆虫复杂的人类群体,由于影响人口增长的因素较多,逻辑斯谛模型自然就显得还是太简单了。但是对于在一定范围内繁殖的昆虫或细菌之类种群,逻辑斯谛模型还是能够给出比较接近实际情况的描

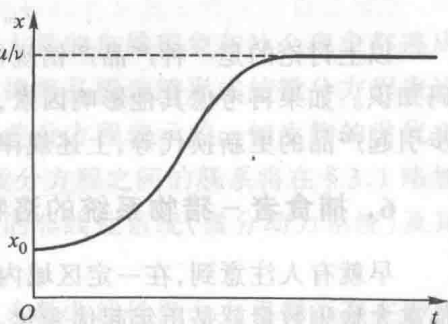


图 1.1.8 人(虫)口增长的

逻辑斯谛曲线