简明线性代数教程

（第三版）

主编　柴伟文

科学出版社

简明线性代数教程

（第三版）

主　编　柴伟文

副主编　曹黎侠　李花妮

参　编　马晓丽　李晓红　伏文清

　　　　赵　晔　李　倩

主　审　黄宝健

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据全国高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数课程教学基本要求》编写而成, 全书共 6 章及一个附录，分别是行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组的结构、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换、线性代数实验及应用. 每章都配有大量的习题, 书后附有参考答案. 书中前 5 章为基本内容, 第 6 章为理科非数学专业选学内容, 附录为学生自学内容, 基本内容的教学需 40～48 学时.

本书可作为普通高等院校理工类(非数学专业)“线性代数”课程的教材和教学参考书, 也可作为成人教育类(非数学专业)的教学用书和研究生入学考试的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

简明线性代数教程 / 柴伟文主编. 3 版. —北京：科学出版社，2019.2

ISBN 978-7-03-060649-5

Ⅰ. ①简…　Ⅱ. ①柴…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 036162 号

责任编辑：任俊红　李　萍 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：霍　兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
石家庄继文印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 1 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2019 年 2 月第　三　版　印张：13 1/2
2019 年 2 月第一次印刷　字数：320 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

为适应高等院校工科数学教学改革的发展，在学生掌握线性代数的基本内容和基本方法的前提下，面对国家高等教育司对高等院校创新创业教育的要求，师生迫切需要一本适合学生自学且能够满足创新性教学的教材. 本书正是基于这个指导思想，在保持第二版理论体系不变的前提下，第三版主要做了以下内容的修订. 一是微调了第二版教材中的第 2 章、第 3 章和第 4 章的部分知识点，增加了第二版中没有证明的一些定理的证明，强化了矩阵方程的理论及求解；二是为满足创新创业教育的需求，增加了线性空间与线性变换、线性代数实验及应用两部分内容，供部分专业选学和学生自学；三是每章均附有知识框架和知识要点，扩充了课后习题. 本书涵盖了教育部规定的线性代数“教学基本要求”的全部内容.

在本书的编写过程中，我们努力做到由浅入深、循序渐进. 在内容的讲述和定理的证明过程中力求简单明了，便于理解. 每章内容之后附有知识框架、知识要点、习题，以及书后附有详细的参考答案，用以复习和巩固本章内容，帮助读者对本章有总体的了解，并据此将所学内容连贯起来.

本书基本内容（第 1 章～第 5 章）需 40～48 学时，选学内容（第 6 章）为 4 个学时，自学内容（附录）需要 4 个学时.

本书各章内容依次由李花妮、马晓丽、曹黎侠、柴伟文、李晓红、伏文清编写，附录由赵晔编写，课后习题及答案由李倩编写；最后由柴伟文完成统稿.

本书在编写过程中得到西安工业大学教务处和理学院的大力支持，黄宝健教授仔细地审阅了本书，并提出了许多宝贵意见；本书的出版还得到科学出版社的大力支持，在此一并予以感谢.

本书是为适应新时期普通高等院校创新性教学和创新创业教育的需要而做的一种尝试，由于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，恳请各位同行和读者批评指正.

编　者

2018 年 8 月

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，是一种基本的数学工具，在本课程后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中都要用到．本章主要介绍行列式的定义、性质及计算，最后给出应用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程组个数与未知量个数相同的一次线性方程组中提出来的．例如，用消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了表述方便，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

称(1.3)为**二阶行列式**，它是由 2^2 个数组成的一个代数表达式，等于数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为行列式(1.3)的第 i 行第 j 列**元素**，i 称为元素 a_{ij} 的**行标**，j 称为元素 a_{ij} 的**列标**．

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆．如图 1-1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差，称之为二阶行列式的**对角线法则**．

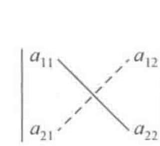

图 1-1　对角线法则

利用二阶行列式的概念，式(1.2)中 x_1, x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意，这里的分母D是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1的分子D_1是用常数b_1,b_2替换D中x_1的系数a_{11},a_{21}所得的二阶行列式，D_2是用常数b_1,b_2替换D中x_2的系数a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1+x_2=9, \\ x_1-2x_2=-4. \end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-1\times 1=-7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=9\times(-2)-1\times(-4)=-14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=3\times(-4)-9\times 1=-21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{-7}=3.$$

1.1.2 三阶行列式

类似地，为了求解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

可引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

表示如下六项的代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

并称(1.6)为一个三阶行列式，其中，a_{ij}（$i,j=1,2,3$）为三阶行列式的第 i 行第 j 列的元素，且称 i 为行指标，j 为列指标，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.7)$$

式(1.7)中右端含有6项，每项均为来自不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其代数和也可以用画线(图 1-2)的方法记忆. 其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项. 这种方法称为三阶行列式的**对角线法则**.

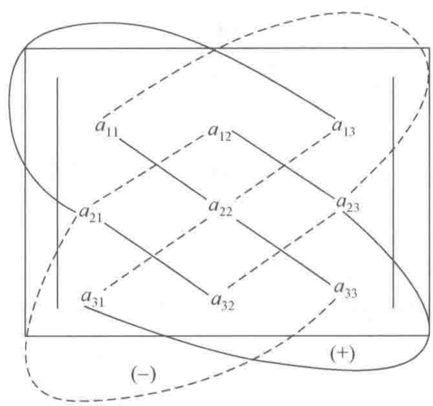

图 1-2 三阶行列式的对角线法则

利用三阶行列式的概念，对于三元线性方程组(1.5)，若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

用消元法求解这个方程组，可得 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$，其中 D_j ($j=1, 2, 3$)是用常数列 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.2 求解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=9, \\ -2x_1+2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+4x_2-2x_3=7. \end{cases}$

解 按对角线法则有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$
$$-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$
$$=-14,$$

同理

$$D_1=\begin{vmatrix}9 & 2 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ 7 & 4 & -2\end{vmatrix}=-14,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 9 & -4\\ -2 & 1 & 1\\ -3 & 7 & -2\end{vmatrix}=-28,\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 9\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 7\end{vmatrix}=14,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

注: 对角线法只适合用于二阶与三阶行列式.

1.2　全排列及逆序数

1.1 节通过引入二、三阶行列式的概念, 得到了求解二元一次方程组和三元一次方程组的行列式解法. 该方法使得方程组的求解公式化. 那么对于一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

能否类似引入 n 阶行列式的概念, 是否可得 n 元一次方程组的行列式的一般解法呢?为此, 先介绍全排列及逆序数的概念.

定义 1.1　将 n 个不同的元素按某种顺序排成一列, 称之为这 n 个元素的一个**全排列**(简称**排列**, 也称 **n 级排列**).

n 级排列的总数通常用 P_n 表示, 显然 $\mathrm{P}_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$.

在本章内容中, 我们所提到的排列中各元素均为正整数, 取 n 个元素的一个全排列表示 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列, 记为 $a_1a_2\cdots a_n$.

对于 n 个不同的正整数, 我们规定从小到大的顺序为**标准次序**, 从小到大的排列称为**标准排列**, 其他的排列都或多或少地改变了标准次序.

例如, 4213 是 1, 2, 3, 4 的一个排列, 显然改变了标准排列 1234.

定义 1.2　在一个 n 级排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中, 某两元素 $a_i,a_j(i,j=1,2,\cdots,n)$, 如果 $i<j$, 而 $a_i>a_j$, 则称数对 a_i,a_j 构成该排列的一个**逆序**. 一个排列中, 逆序的总数称为这个排列的**逆序数**, 记为 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$.

例 1.3　求排列 4213 的逆序数.

解 该排列中共有 4 与 2, 4 与 1, 4 与 3, 2 与 1 这四个逆序, 所以排列 4213 的逆序数是 4, 即 $\tau(4213)=4$.

给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$, 我们可以按照以下方法计算逆序数, 设在第一个数 a_1 后面比它小的数有 t_1 个, 在第二个数 a_2 后面比它小的数有 t_2 个, $\cdots$, 第 $n-1$ 个数 a_{n-1} 后面比它小的数有 t_{n-1} 个, 则该排列的逆序数为 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}$. 显然, 标准排列的逆序数为零.

定义 1.3 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 级排列, 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个偶数, 则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**偶排列**; 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个奇数, 则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**奇排列**.

将一个排列中的某两个数码位置互换, 而其余数码不动称为一次**对换**.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 因为 $\tau(a_1a_2\cdots a_ia_{i-1}\cdots a_n)=\tau(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_i\cdots a_n)\pm1$, 所以一次相邻对换改变排列的奇偶性. 而排列 $a_1\cdots a_j\cdots a_i\cdots a_n$ 可由排列 $a_1\cdots a_i\cdots a_j\cdots a_n$ 经过 $2(j-i)-1$ 次相邻对换完成, 所以一次对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1 任何一个 n 元排列都可以通过若干次对换变成标准排列, 且所需对换的次数与该排列的逆序数有着相同的奇偶性.

1.3 n 阶行列式的定义

利用逆序数观察二、三阶行列式的行标、列标, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},\ \sum_{j_1j_2}\text{表示对 1, 2 所有排列求和.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},\ \sum_{j_1j_2j_3}\text{表示对 1, 2, 3 的所有排列求和.}$$

等号右端行列式的值是所有来自不同行不同列的元素的乘积前面冠以符号, 再求和. 其中每一项的符号是, 当这一项中元素的行标按标准排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 如果对应的列标构成的排列是奇排列则取负号. 例如, 312 是偶排列, 所以 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 前取正号; 132 是奇排列, 所以 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 前取负号.

仿此, 可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列, 并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

称为 n **阶行列式**, 简记作 $\det(a_{ij})$. a_{ij} 称为行列式第 i 行第 j 列**元素**, i 为 a_{ij} 的行标, j 为 a_{ij} 的列标. n 阶行列式的值为所有取自不同的行、不同的列的 n 个元素, 并将行标按标准次序排列起来作乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

的代数和. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时, 式(1.9)前带有正号; 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时, 式(1.9)前带有负号. 此行列式(1.8)可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.10}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和, 故式(1.10)是 $n!$ 项的代数和.

例如, 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中共有 $4!=24$ 项. 其中含有一项 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, 而 $\tau(1324)=1$, 则 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前面应冠以负号, 同时也含有另一项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$, 而 $\tau(3412)=4$, 则 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以正号. 注意 24 项中不会含有 $a_{11}a_{13}a_{22}a_{44}$ 或 $a_{13}a_{22}a_{32}a_{41}$, 想想为什么?

例 1.4　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解　根据定义, D 是 $4!=24$ 项的代数和. 但是, 由于 D 中不少元素为零, 所以 24 项不少的项为零. 不为零的项只有四项: $acfh, bdeg, adeh, bcfg$, 它们对应的列标排列依次为 1234 和 4321(偶排列), 1324 和 4231(奇排列), 因此

$$D = acfh + bdeg - adeh - bcfg.$$

例 1.5　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由于 D 的第一行除了 a_{11} 外其他元素都是零, 于是要得到非零项, 第一行必须选 a_{11}, 而第二行不能选 a_{21}, 因为第一列中只能选一个元素, 所以在第二行中只能选非零元素 a_{22}, 同理第三行只能选 $a_{33},\cdots$, 第 n 行只能选 a_{nn}, 这样 D 不含零元素的只有一项

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,又该项行标、列标都是按标准次序排列, 前面的符号取正, 所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称作**下三角行列式**. 下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

类似地, 可以定义**上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

例 1.6 证明对角行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n.$

证 (1) 此式是上三角行列式的特殊情况, 结果显然.

(2) 由于行列式 D_2 不含零的项只有 $\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1$,而该项行标已按标准次序排列, 列标排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n.$$

例 1.7 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

证 因为等号左端行列式第一行只有一个非零元素 a_{11},根据 n 阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}.$$

$$= a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

类似地，有 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

1.4　行列式的性质

用行列式的定义来计算行列式，一般来说比较烦琐. 为了简化计算，我们需要研究行列式的性质.

定义 1.5　将行列式 D 的行与列互换后得到的新的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}. 即若 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式的值相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证　分别用 a_{ij} 与 a'_{ij} 表示 D 与 D^{T} 中第 i 行第 j 列处的元素，则有 $a'_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，于是有 $D^{\mathrm{T}} = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a'_{1k_1} a'_{2k_2} \cdots a'_{nk_n} = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = D.$

此性质说明了行列式中，行、列地位的对称性，行列式中行所具有的性质对列也同样成立.

性质 1.2　互换行列式的任意两行(或列)，行列式的值变号. 即若

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $B = -D$.

证　根据行列式的定义，考察一般项 $a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n}$ 的符号. 在行列式 B 中的符

号是$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$,在行列式$D$中的符号是$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$，两者符号相反. 并且$B$与$D$的对应项完全相同，所以$B=-D$.

推论 1.2 若行列式D中有两行(或列)对应元素相同，则行列式为零.

这是因为互换D中相同的两行，由性质 1.2 知$D=-D$，于是$D=0$.

性质 1.3 用k乘行列式D中的某一行(或列)，等于以数k乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据n阶行列式的定义，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

根据此性质，可以得到如下推论.

推论 1.3 如果行列式D中某行(或列)的所有元素有公因式，则公因式可以提到行列式前面.

推论 1.4 如果行列式D中有两行(或列)的对应元素成比例，则$D=0$.

推论 1.5 如果行列式D中某行(或列)的所有元素全为零，则$D=0$.

性质 1.4 如果行列式的某一行(或列)的元素都表成两数之和:$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ ($j=1,2,\cdots,n$)，则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据n阶行列式的定义，