高等数学进阶

王学武 编著

清华大学出版社

高等数学进阶

王学武 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是为考研同学提高高等数学水平而编写的，覆盖了数一和数三考研大纲的高等数学部分的全部内容。全书共11章，每章首先列出必须牢记、理解的基本概念，需要掌握、运用的基本结论，以及本章涉及的基本方法。然后，分节解析基本概念；简述定理、性质等基本结论；通过考研题型，给出常规的、完备的解题基本方法，并用适当例题解读方法、总结规律，给出各类题型解题方法综述；最后配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。每章安排一节对2003—2019年的数一和数三的高等数学部分考研真题进行分类、归纳、对比、分析，并应用本书研究的此类题型的解法处理和解决这些考研真题。为便于读者核对习题答案，各章给出了习题的答案与提示。

本书可以作为考研数学复习第一轮的辅导书，也可作为学习"数学分析""高等数学"和"微积分"的教学参考书，还可作为理工类和经管类的"高等数学续论"或"微积分续论"课的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学进阶/王学武编著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-51919-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第287824号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：27 字 数：653千字
版 次：2019年4月第1版 印 次：2019年4月第1次印刷
定 价：58.00元

产品编号：078547-01

序言

PREFACE

无以数计的高等数学教材和考研数学辅导书,使考研同学很纠结。有的选择一套教材,反复看了几遍,遇到问题还是束手无策;有的死啃考研数学全书,速度慢、效率低,又云里雾里。究其原因,大学所学高等数学好比一楼,考研高等数学好比二楼,能够从一楼顺利到达二楼,楼梯是最佳选择。为此我们想给考研学子搭建这样的阶梯,于是《高等数学进阶》应运而生。

学习高等数学,常见问题是:“概念不清,结论不明,方法不多”,如果这三方面不存在问题,那么高等数学不存在问题。然而高等数学没有学好的,这三方面或多或少都存在问题,特别是解题方法。或许,你对概念、结论能够倒背如流,但是没有系统的解题方法支撑,那么你对概念的理解是肤浅的,结论的运用是生涩的。

本书在深入研究基本概念、基本结论基础上,对各类考研题型的解题方法做出全面、系统的研究、归纳、总结和综述。不夸张地说,如果能够系统地掌握这些解题方法,比较熟练地运用基本概念和基本结论,就可以从容应对各类高等数学问题。

有很多同学认为考研试题很难,其实不然!客观地说,考研试题的绝大部分都可以利用基本概念、基本结论和基本方法来解决的,只有极少题需要一些技巧或特殊方法,而且随着考研试题日臻完善,这类试题在近些年的考研试题中越来越少。所以考研复习要脚踏实地,从基础做起,注重理解和掌握基本概念、基本结论和基本方法。

本书的每章首先列出必须牢记、理解的基本概念,需要掌握、运用的基本结论,以及本章涉及的各类题型(内有对应的解题方法);其次解析概念、简述定理、性质和结论;接下来列举了的高等数学考研题型,给出常规的、完备的解题方法,并用适当例题解读方法、总结规律;最后结合例题,给出各类题型解题方法综述。各节配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。通过适当练习,使读者不仅熟悉题型,而且还掌握解决此类题型的基本方法。

从 2003 年开始,考研数学分数从 100 分提高到 150 分,命题的模式也趋于稳定。数一和数三的高等数学(微积分)部分所占比例固定在 56%,所以本书在每章的最后一节,选择了从 2003—2019 年的 17 年的数一和数三的高等数学部分真题进行分类、归纳、对比、分析,以及应用本书研究的此类题型的解法,处理和解决这些考研真题,从而使读者加深对本书内容的理解,同时掌握了各章的考研题型、考点及深浅程度,做到知己知彼!

本书是编者近十几年来的“考研数学辅导”讲义与“高等数学续论”讲义逐步改进和完善

而成，可以用于“微积分”“高等数学”“数学分析”课程的参考书，也可以用于“高等数学进阶”或“高等数学续论”公共基础课或选修课的教材(理工类：16 周×3 课时，其中第 5 章和第 11 章可作为自学内容；经管类：16 周×3 课时，去掉第 10 章和第 11 章及带 * 号部分)，同时还是考研数学复习第一轮的辅导书，尤其适合提高高等数学基础的同学，作为教材到考研复习全书的过渡。通过对解题方法的学习和课后习题的认真练习，使读者在解决问题时，有系统的、清晰的解题思路和解题方法，从而提高解题能力和解题速度。

本书是按照考研数一大纲(高等数学部分)内容编写的，但对考数二和数三的学生也是适合的，只是范围的不同而已，相同内容使用解决问题的基本方法是相同的。书中带有*** 的章、节以及题型等部分是数三应该掌握的内容，数一是不做要求的；同样带 * 号的部分，是数一应该掌握的内容，数三是不做要求的。

感谢山东工商学院数学学院概率统计学科和教务处混合式教学改革项目对本书出版的支持，感谢我的同事对本书提出的建设性意见，感谢我的学生们为习题解答所做的工作，感谢清华大学出版社的刘颖老师对本书所做的大量细致、重要的工作。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请读者和专家指正。

王学武

2018 年秋于烟台

目录 CONTENTS

第 1 章

数列、函数、极限与连续

基本概念

1. 数列极限、数列收敛、数列发散；
2. 函数在一点的极限、左极限、右极限、自变量趋于无穷大时的极限；
3. 有界量、无界量；
4. 无穷小、无穷大；
5. 同阶无穷小、等价无穷小、高阶无穷小、k 阶无穷小；
6. 函数在一点连续、左连续、右连续、函数在区间上连续；
7. 间断点、第一类间断点、第二类间断点、可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点、振荡间断点；
8. 基本初等函数、初等函数。

基本结论

1. 收敛数列性质、函数极限性质、无穷小的性质；
2. 数列极限运算法则、函数极限运算法则；
3. 极限公式：两个重要极限公式、等价无穷小替换公式；
4. 一点极限存在充要条件、一点连续的充要条件；
5. 连续函数性质(和、差、积、商、复合)、初等函数的连续性、闭区间上连续函数性质；
6. 夹逼准则、单调有界原理；
7. 洛必达法则、泰勒公式；
8. 介值定理、零点定理。

基本方法

1. 计算数列极限；
2. 证明数列收敛，并求极限；
3. 计算函数极限；
4. 讨论函数的连续性、求函数的间断点、判断间断点所属类型；
5. 未知常数的确定；
6. 计算含变限积分函数的极限；

7. 计算抽象函数的极限；

8. 求无穷小的阶数和阶的比较。

1.1 数列极限的求法

一、基本概念

定义1 数列极限 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，有两种定义方法：

(1) 描述语言：当n趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限趋于固定的常数a，则称a是数列$\{x_n\}$的**极限**。

(2) ε-N语言：若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a是数列$\{x_n\}$的**极限**。

在数列极限的两种定义方法中，描述语言更有利于判断、理解一个数列极限是否存在。如数列$\{(-1)^n\}$的极限显然是不存在的，这是因为当n趋于无穷大时，数列一般项$(-1)^n$并非趋于某个固定的常数。而ε-N语言更适合于证明的表述。简言之，数列极限的描述语言有助于判断和理解数列的敛散性，而ε-N语言适合于数列敛散性的证明。

极限定义(2)表明：不论给定多么小的正数ε，都可以在数列中找到一项，从这项以后的所有项与a差的绝对值小于ε(与a的距离小于ε)，即从这项以后的所有项都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内。

通俗地说：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是随着$n$的无限增大，$|x_n-a|$可以任意小。于是有：

若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<M\varepsilon$，或$|x_n-a|\leqslant M\varepsilon$ (M是非负常数，此时$M\varepsilon$仍表示任意小)，则a是数列$\{x_n\}$的极限。

定义2 数列收敛和发散 如果数列极限存在，则称**数列收敛**；否则称**数列发散**。

注 根据定义1可知：数列的极限是数列一般项的变化趋势，因此数列是否收敛以及收敛哪个常数与数列(前)有限项无关。

例如，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$收敛于0，如果将数列前1000项改为：1，2，…，1000，1000项以后项不变，变化后数列为

$$1,2,\cdots,1000,\frac{1}{1001},\frac{1}{1002},\cdots,\frac{1}{n}\cdots,$$

显然这个数列仍然收敛于0。又如数列$\{n\}$是趋于无穷大，发散的。如果将此数列的前10000项改为0，变化后数列为

$$0,0,\cdots,0,10001,10002,\cdots,n,\cdots,$$

则该数列还是趋于无穷大，仍然是发散的。

二、基本结论

定理1(收敛数列性质)

(1) **唯一性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则$a=b$。

(2) **有界性** 若数列$\{x_n\}$收敛，则存在$M>0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，有$|x_n|\leqslant M$。

(3) **保号性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$x_n>0$；同样，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$，则$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$x_n<0$。

反之，若$x_n<0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\leqslant 0$；同样，若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\geqslant 0$。

(4) **子数列收敛性** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对$\{x_n\}$任意子数列$\{x_{n_k}\}$，有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$；反之，若数列$\{x_n\}$的偶子列$\{x_{2n}\}$和奇子列$\{x_{2n-1}\}$都收敛于常数$a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

定理2(单调有界原理) 单调有界数列必有极限。

具体叙述为：单调增加有上界的数列必有极限；单调减少有下界的数列必有极限。

定理3(夹逼准则) 若$\exists N\in\mathbb{N}_+$，使得$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$n>N$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

定理4(数列极限运算法则) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n{}^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=A^B(A>0)$。

三、基本方法

题型1 计算数列极限

数列极限的未定式(不确定型)有八种形式：

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty\pm\infty;\ 1^\infty;\ \infty^0;\ 0^0;\ 0+0+\cdots+0(n\text{ 个无穷小的和})。$$

极限是未定式(不确定型)，指的是数列极限可能存在也可能不存在。对极限是无穷大的，并非是未定式(不确定型)，它的极限是确定的，无穷大，不存在。

事实上，上述的∞，并没有明确是$+\infty$，还是$-\infty$，但当明确$\pm\infty$时，我们有

$$+\infty+(+\infty)=+\infty;\quad -\infty+(-\infty)=-\infty;\quad +\infty-(-\infty)=+\infty。$$

一般地，数列的一般项是关于n的代数式(函数式)，极限型是

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty\pm\infty;\quad 1^\infty;\quad \infty^0;\quad 0^0,$$

通常用四个方法：**取大法**、**有理化法**、**公式法**和**转化法**计算其极限。

方法1 取大法

所谓取大法，就是对极限型是$\dfrac{\infty}{\infty}$数列的一般项，分子和分母同除以n的最大次幂，再利用极限性质，求得数列极限的方法。

例1.1 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{2n^2-n+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2+1}}$。

解 (1) 数列的极限型是$\frac{\infty}{\infty}$,而分子、分母关于 n 的最大次幂是 n^2,于是分子和分母同除以 n^2,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\,\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}。$$

(2) 数列的极限型是$\frac{\infty}{\infty}$,分子和分母关于 n 的最大次幂是 n,于是分子和分母同除以 n,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2。$$

方法2 有理化法

若分子或分母含有根式,一般要考虑分子有理化或分母有理化,或分子、分母同时有理化。通过有理化,去掉根号,从而可以确定极限型和求极限的方法。

例1.2 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+1}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$。

解 (1) 由于分母含有根式,于是分母有理化,再利用取大法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4+1})}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1-\frac{1}{n^3}}=2。$$

(2) 由于分子含有根式,于是分子有理化,再利用取大法

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}。$$

方法3 公式法

所谓公式法,就是利用两个重要极限公式和等价无穷小替换公式求极限的方法。

关于数列的两个重要极限公式的基本形式为:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1。$$

一般形式:若 $f(n)\to 0\,(f(n)\neq 0)\,(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}}=\mathrm{e};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin f(n)}{f(n)}=1。$$

等价无穷小的替换公式见17页。

一般地,如果极限型是 1^∞,幂指型极限,利用重要极限公式有:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)}=\lim_{n\to\infty}[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}\cdot[f(n)-1]g(n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-1]g(n)},$$

其中 $f(n)\to 1, g(n)\to\infty(n\to\infty)$。

注 由于 $f(n)^{g(n)}$ 底和指数都是 n 的函数，于是称$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{g(n)}$为**幂指型极限**。

例 1.3 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{4n+1}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$。

解 (1) 极限型是 1^∞，利用重要极限公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)\cdot\frac{4n+1}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1}}=e^2。$$

(2) 将数列一般项中 $\sin\dfrac{1}{n}$凑成重要极限公式形式，然后计算其余部分极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e。$$

方法 4 转换法

转换法就是将数列极限转换成函数极限。通常情况下，取 $n=x$，则 $x\to+\infty$；取$\dfrac{1}{n}=x$，则 $x\to 0^+$；取$\sqrt[n]{n}=x$，则 $x\to 1$，等等，这是求数列极限的一个常用方法。当数列极限转换成函数极限后，对极限型为$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$的极限，可以运用洛必达法则，这也是转化法的主要目的。

例 1.4 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{2}{n}}-1)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n, a,b>0$。

解 (1) 取$\dfrac{1}{n}=x$，则 $x\to 0$，于是

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{2}{n}}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^{2x}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2。$$

(2) 极限为不定式 1^∞ 型，利用重要极限公式，得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}}。$$

取$\dfrac{1}{n}=x$，运用洛必达法则，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2/n}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}。$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}。$$

注 转换法的理论依据是**海涅(Heine)定理**，即：
如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则对任意的$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

这里取$\frac{1}{n}=x$，实质是数列极限等于将$\frac{1}{n}$换成x的函数极限，其他情况雷同。

一般地，若数列的一般项是和n有关的式子而不是关于n的代数式，或表示为无限个无穷小的和，或分子、分母为无限个无穷小的和，通常用三个方法：**放缩法**、**相减法**和**积分法**计算其极限。

方法5　放缩法(夹逼准则)

若数列的一般项是与n有关的式子而不是关于n的代数式，或表示为无限个无穷小的和，通常采用放大和缩小的方法(简称放缩法)，使不等式两端表示为n的代数式，进而求得不等式两端的极限，在不等式两端数列极限存在且相等情况下，根据夹逼准则，所求数列的极限存在且等于两端的极限。我们称此求极限的方法为**放缩法**，又称**夹逼准则**。

应用放缩法要注意的是：对一般项放大不能放得太大；缩小也不能缩得太小，否则两端极限不等，这对求此数列极限没有任何意义。

例1.5　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$。

解　对数列的一般项放缩

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}。$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$。

例1.6　求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解　解此题的关键是将积分表示为关于n的代数式，显然这是没办法通过直接计算积分来实现的，只能通过对被积函数的放缩，达到可求积分的目的。由于$x\in[0,1]$，于是有

$$0\leqslant\frac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n,$$

根据定积分的保序性，有

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}。$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，根据夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$。

注　当例1.5改为计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{m}{n^2+m}\right)$时，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{m}{n^2+m}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2+m}=0。$$

这是由于它是有限个(m个)无穷小的和，我们知道：**有限个无穷小的和是无穷小**。

无限个无穷小的和是数列极限未定式的一种常见形式，也是数列极限中比较难解决的问题，计算此类极限有四个方法：**放缩法**、**积分法**、**相减法**和**级数和**。前三个方法在本节给出，级数和方法将在级数一章中处理。

方法 6 相减法

施托尔茨(Stolz)定理：若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，$y_{n+1}>y_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}。$$

如果数列的一般项为分式形式，分子或分母为 n 项(无限项)的和，可以利用施托尔茨定理，我们将这一方法形象的称为**相减法**。这一方法可以使分子或分母无穷多项变成有限项。

例 1.7 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]$。

解 令 $x_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$，$y_n=n^3$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，$y_{n+1}>y_n$。根据施托尔茨定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3n^2+3n+1}=\frac{4}{3}。$$

例 1.8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)$。

解 根据施托尔茨定理得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\cdots+n^p)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\text{(分子分母同除 }n^{p+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}\left(\text{取}\frac{1}{n}=x\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)^p}{(1+x)^{p+1}-1}\text{(这里}(1+x)^{p+1}-1\sim(p+1)x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)^p}{(p+1)x}=\frac{1}{p+1}。\end{aligned}$$

方法 7 积分法

所谓的积分法就是将数列极限表示为一个定积分的计算数列极限的方法。如果数列一般项为 n 项(无限项)的和或积的形式，或者为$\sum$和$\prod$的形式，可以考虑应用积分法，将数列极限表示为定积分。应用积分法的关键是确定被积函数！

积分法原理：如图 1-1，将曲边梯形分成 n 个等宽的小曲边梯形，第 $k(k=1,2,\cdots,n)$个小曲边梯形的面积近似等于长方形$\left(\text{以}\dfrac{1}{n}\text{为宽，以 }f\left(\dfrac{k}{n}\right)\text{为长；或以}\dfrac{1}{n}\text{为宽，以 }f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\text{为长}\right)$的面积，根据定积分的几何意义，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x。$$

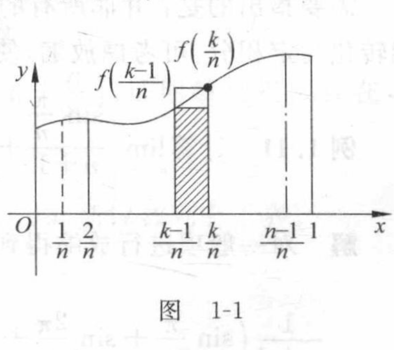

图 1-1

应用积分方法计算数列极限的具体步骤：

情形 1 数列一般项为 n 项和，或$\sum$的形式：

1. 将数列的一般项表示为$\sum\limits_{k=1}^{n}?$的形式；

2. 数列一般项提取$\frac{1}{n}$，将数列的一般项表示为$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}?$的形式；

3. 将$\sum_{k=1}^{n}?$的一般项"?"表示成关于$\frac{k}{n}$或$\frac{k-1}{n}$的函数式；

4. 把$\frac{k}{n}$或$\frac{k-1}{n}$换成x，此时一般项"?"就是定积分的被积函数$f(x)$，数列极限就是$f(x)$在$[0,1]$上的定积分。

情形2 若数列的一般项是n项积，或$\prod$的形式，可以利用恒等变换公式$N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将积的形式化成以e为底、指数为n项和的形式，然后利用积分法求出指数部分的极限。

例1.9 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$。

解 将极限转化为定积分

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}。$$

注 此题不能应用放缩法，这是由于一般项放缩后为

$$\frac{n}{\sqrt{4n^2-1^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

不等式两端的极限不等。

例1.10 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}$。

解 首先利用恒等变换公式$N=\mathrm{e}^{\ln N}$，将积的形式变成和的形式，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}[\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+(n-1))]-\ln n}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln 1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{[x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)]_0^1}=\frac{4}{\mathrm{e}}。$$

需要指出的是：并非所有的一般项为n项和的数列极限都可以转化为定积分，如果不能转化为定积分，可考虑放缩，使不等式两端的极限表示为定积分，再利用夹逼准则。

例1.11 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

解 对一般项进行放缩得到

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)。$$