

高等 数学 进阶

王学武
编著

清华大学出版社



高等 数学 进阶

王学武 编著

清华大学出版社 北京

内 容 简 介

本书是为考研同学提高高等数学水平而编写的,覆盖了数一和数三考研大纲的高等数学部分的全部内容。全书共 11 章,每章首先列出必须牢记、理解的基本概念,需要掌握、运用的基本结论,以及本章涉及的基本方法。然后,分节解析基本概念;简述定理、性质等基本结论;通过考研题型,给出常规的、完备的解题基本方法,并用适当例题解读方法、总结规律,给出各类题型解题方法综述;最后配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。每章安排一节对 2003—2019 年的数一和数三的高等数学部分考研真题进行分类、归纳、对比、分析,并应用本书研究的此类题型的解法处理和解决这些考研真题。为便于读者核对习题答案,各章给出了习题的答案与提示。

本书可以作为考研数学复习第一轮的辅导书,也可作为学习“数学分析”“高等数学”和“微积分”的教学参考书,还可作为理工类和经管类的“高等数学续论”或“微积分续论”课的教材。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学进阶/王学武编著. —北京:清华大学出版社,2019

ISBN 978-7-302-51919-5

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 287824 号

责任编辑:刘 颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:丛怀宇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市龙大印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:27 字 数:653 千字

版 次:2019 年 4 月第 1 版 印 次:2019 年 4 月第 1 次印刷

定 价:58.00 元

产品编号:078547-01



无以数计的高等数学教材和考研数学辅导书,使考研同学很纠结。有的选择一套教材,反复看了几遍,遇到问题还是束手无策;有的死啃考研数学全书,速度慢、效率低,又云里雾里。究其原因,大学所学高等数学好比一楼,考研高等数学好比二楼,能够从一楼顺利到达二楼,楼梯是最佳选择。为此我们想给考研学子搭建这样的阶梯,于是《高等数学进阶》应运而生。

学习高等数学,常见问题是:“概念不清,结论不明,方法不多”,如果这三方面不存在问题,那么高等数学不存在问题。然而高等数学没有学好的,这三方面或多或少都存在问题,特别是解题方法。或许,你对概念、结论能够倒背如流,但是没有系统的解题方法支撑,那么你对概念的理解是肤浅的,结论的运用是生涩的。

本书在深入研究基本概念、基本结论基础上,对各类考研题型的解题方法做出全面、系统的研究、归纳、总结和综述。不夸张地说,如果能够系统地掌握这些解题方法,比较熟练地运用基本概念和基本结论,就可以从容应对各类高等数学问题。

有很多同学认为考研试题很难,其实不然!客观地说,考研试题的绝大部分都可以利用基本概念、基本结论和基本方法来解决的,只有极少题需要一些技巧或特殊方法,而且随着考研试题日臻完善,这类试题在近些年的考研试题中越来越少。所以考研复习要脚踏实地,从基础做起,注重理解和掌握基本概念、基本结论和基本方法。

本书的每章首先列出必须牢记、理解的基本概念,需要掌握、运用的基本结论,以及本章涉及的各类题型(内有对应的解题方法);其次解析概念、简述定理、性质和结论;接下来列举了的高等数学考研题型,给出常规的、完备的解题方法,并用适当例题解读方法、总结规律;最后结合例题,给出各类题型解题方法综述。各节配有全面的、系统的、与考研题型相似的、与考研难度一致的练习题。通过适当练习,使读者不仅熟悉题型,而且还掌握解决此类题型的基本方法。

从2003年开始,考研数学分数从100分提高到150分,命题的模式也趋于稳定。数一和数三的高等数学(微积分)部分所占比例固定在56%,所以本书在每章的最后一节,选择了从2003—2019年的17年的数一和数三的高等数学部分真题进行分类、归纳、对比、分析,以及应用本书研究的此类题型的解法,处理和解决这些考研真题,从而使读者加深对本书内容的理解,同时掌握了各章的考研题型、考点及深浅程度,做到知己知彼!

本书是编者近十几年来的“考研数学辅导”讲义与“高等数学续论”讲义逐步改进和完善

而成,可以用于“微积分”“高等数学”“数学分析”课程的参考书,也可以用于“高等数学进阶”或“高等数学续论”公共基础课或选修课的教材(理工类:16周 $\times$ 3课时,其中第5章和第11章可作为自学内容;经管类:16周 $\times$ 3课时,去掉第10章和第11章及带*号部分),同时还是考研数学复习第一轮辅导书,尤其适合提高高等数学基础的同学,作为教材到考研复习全书的过渡。通过对解题方法的学习和课后习题的认真练习,使读者在解决问题时,有系统的、清晰的解题思路和解题方法,从而提高解题能力和解题速度。

本书是按照考研数一大纲(高等数学部分)内容编写的,但对考数二和数三的学生也是适合的,只是范围的不同而已,相同内容使用解决问题的基本方法是相同的。书中带有***的章、节以及题型等部分是数三应该掌握的内容,数一是不做要求的;同样带*号的部分,是数一应该掌握的内容,数三是不做要求的。

感谢山东工商学院数学学院概率统计学科和教务处混合式教学改革项目对本书出版的支持,感谢我的同事对本书提出的建设性意见,感谢我的学生们为习题解答所做的工作,感谢清华大学出版社的刘颖老师对本书所做的大量细致、重要的工作。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请读者和专家指正。

王学武

2018年秋于烟台



第1章 数列、函数、极限与连续	1
1.1 数列极限的求法	2
题型1 计算数列极限(3); 题型2 证明数列收敛、并求极限(9)	
1.2 函数极限的求法	13
题型3 计算函数极限(18)	
1.3 函数的连续性	27
题型4 讨论函数的连续性、求函数的间断点、判断间断点所属类型(28)	
1.4 关于函数、极限与连续的常见考研题型	31
题型5 未知常数的确定(31); 题型6 计算含有变限积分函数的极限(35); 题型7 计算抽象函数的极限(35); 题型8 求无穷小的阶数和阶的比较(37)	
1.5 数列、函数、极限与连续考研真题	40
1.6 本章练习题答案与提示	50
第2章 导数与微分	60
2.1 导数的求法	60
题型1 求函数在一点的导数(62); 题型2 求初等函数的导数(63); 题型3 求非初等函数的导数(65)	
2.2 高阶导数的求法	74
2.3 导数与微分考研真题	78
2.4 本章练习题答案与提示	82
第3章 一元函数不定积分与定积分	88
3.1 不定积分	89
题型1 用凑微分、变量代换、分部积分法求不定积分(90); 题型2 求有理函数的不定积分(95); 题型3 求无理函数的不定积分(99); 题型4 求三角函数的不定积分(102); 题型5 求分段函数的不定积分(106)	
3.2 定积分	107
题型6 用变量代换、分部积分法计算定积分(109); 题型7 计算对称区间的定积分(112); 题型8 计算非初等函数的定积分(114); 题型9 用换元变换计算定积分(115); 题型10 计算反常积分(广义积分)(117)	
3.3 一元函数积分考研真题	119

3.4 本章练习题答案与提示	124
第4章 连续性定理与微积分中值定理	133
4.1 不等式与存在性的证明	133
题型1 方程根(函数零点)的讨论(135); 题型2 证明不等式(138); 题型3 存在一点满足等式的证明(143); 题型4 存在两点满足等式的证明(151)	
4.2 定积分等式与不等式的证明	155
题型5 定积分等式的证明(156); 题型6 定积分存在性的证明(157); 题型7 定积分不等式的证明(158)	
4.3 连续性定理与微分中值定理考研真题	163
4.4 本章练习题答案与提示	167
第5章 一元函数微积分的应用	174
5.1 函数图像的几何性质	175
题型1 求函数的极值点和极值(176); 题型2 求函数的单调区间(176); 题型3 求函数的最大值和最小值(176); 题型4 求函数的凹凸区间和拐点(176); 题型5 求曲线的切线、法线和渐近线(177)	
5.2 微元法在计算面积、体积、弧长中的应用	181
题型6 计算平面图形的面积(182); 题型7 计算空间体的体积(183)	
* 5.3 微元法在物理上的应用	188
题型11 计算液体压力(188); 题型12 计算物体之间的引力(190); 题型13 计算变力做功(191); 题型14 计算物体的质量(192)	
*** 5.4 微积分在经济中的应用	194
题型15 计算成本、收益、利润、弹性以及边际、平均成本、收益、利润(195)	
5.5 一元函数微积分的应用考研真题	199
5.6 本章练习题答案与提示	207
第6章 微分方程	213
6.1 一阶微分方程的解法	214
题型1 求可分离变量方程的解(214); 题型2 求齐次方程的解(215); 题型3 求一阶线性方程的解(215); * 题型4 求伯努利方程的解(216); * 题型5 求全微分方程的解(217); 题型6 利用简单的变量替换求一阶方程的解(218)	
6.2 二阶微分方程的解法	220
题型7 求二阶常系数线性齐次方程的解(221); 题型8 求二阶常系数线性非齐次方程的通解(221); 题型9 求可降阶的二阶微分方程的解(224); * 题型10 求 n 阶常系数线性齐次方程的解(225); 题型11 求函数的表达式(226)	
*** 6.3 差分方程的解法	229
题型12 求一阶差分方程的解(230); 题型13 求二阶差分方程的解(231)	
6.4 常微分方程考研真题	232
6.5 本章练习题答案与提示	239
第7章 无穷级数	244
7.1 数项级数敛散性的判别方法	245

题型 1 判别正项级数的敛散性(246); 题型 2 判别交错级数的敛散性(248); 题型 3 判别任意项级数的敛散性(250)	
7.2 幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域	252
题型 4 求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域(254)	
7.3 求和函数与数项级数的和	257
题型 5 求幂级数的和函数(259); 题型 6 求数项级数的和(262)	
7.4 函数展成幂级数	264
题型 7 函数展成麦克劳林级数(265); 题型 8 函数展成泰勒级数(268)	
* 7.5 傅里叶级数	270
题型 9 傅里叶级数的收敛域与傅里叶级数在一点的和(272); 题型 10 函数展成傅里叶级数(273); 题型 11 函数展成正弦级数和余弦级数(273); 题型 12 函数展成一般周期的傅里叶级数(274)	
7.6 无穷级数考研真题	276
7.7 本章练习题答案与提示	285
第 8 章 多元函数连续、偏导数、全微分及其应用	292
8.1 多元函数连续、偏导数和全微分	293
题型 1 求二元函数的极限(294); 题型 2 证明二元函数极限不存在(294); 题型 3 求多元函数的偏导数(295); 题型 4 求多元函数的全微分(296); 题型 5 讨论二元函数连续性、偏导存在性和可微性(297); 题型 6 求抽象复合函数的偏导数(299); 题型 7 求隐函数和* 隐函数组的偏导数(300)	
8.2 多元函数的极值与最值	307
题型 9 求二元函数的极值点和极值(307); 题型 10 求多元函数的条件极值或最值(308); 题型 11 求二元函数在有界闭区域上的最值(309)	
* 8.3 偏导数在几何上的应用	311
题型 12 求空间曲线的切线方程和法平面方程(311); 题型 13 求曲面的切平面方程和法线方程(313)	
8.4 多元函数连续、偏导数与全微分及其应用考研真题	313
8.5 本章练习题答案与提示	321
第 9 章 重积分	327
9.1 二重积分	328
题型 1 交换累次积分的积分次序(333); 题型 2 直角坐标与极坐标的累次积分转化(334); 题型 3 计算对称区域上的二重积分(335); 题型 4 计算非初等函数的二重积分(336); 题型 5 利用坐标变换计算二重积分(337); 题型 6 二重积分的解答与证明(338)	
* 9.2 三重积分	341
题型 7 计算三重积分(343); 题型 8 利用柱面坐标变换和球面坐标变换计算三重积分(345)	
* 9.3 重积分的应用	350
题型 9 计算物体的质量、质心、转动惯量和引力(351)	
9.4 重积分考研真题	352
9.5 本章练习题答案与提示	359

* 第 10 章 曲线积分与曲面积分	365
10.1 曲线积分	366
题型 1 计算第一类曲线积分(368); 题型 2 计算第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)(370);	
题型 3 计算与路径无关的平面曲线积分(374); 题型 4 曲线积分的等式与不等式的证明(376)	
10.2 曲面积分	379
题型 5 计算第一类曲面积分(对面积的曲面积分)(380); 题型 6 计算第二类曲面积分(对坐标的曲面积分)(383)	
10.3 向量场的通量与散度、环流量与旋度	388
题型 7 计算通量、散度、环流量和旋度(389)	
10.4 曲线积分与曲面积分的简单应用	390
题型 8 计算曲线和曲面的质量、质心、形心、转动惯量和引力(391)	
10.5 曲线积分和曲面积分考研真题	393
10.6 本章练习题答案与提示	398
* 第 11 章 向量代数与空间解析几何	406
11.1 向量及其运算	406
题型 1 向量与向量运算(408)	
11.2 平面与直线及其方程	410
题型 2 求直线方程和平面方程(411)	
11.3 曲面及其方程	414
题型 3 求旋转曲面方程与投影(415)	
11.4 向量代数与空间解析几何考研真题	417
11.5 本章练习题答案与提示	418

数列、函数、极限与连续

基本概念

1. 数列极限、数列收敛、数列发散；
2. 函数在一点的极限、左极限、右极限、自变量趋于无穷大时的极限；
3. 有界量、无界量；
4. 无穷小、无穷大；
5. 同阶无穷小、等价无穷小、高阶无穷小、 k 阶无穷小；
6. 函数在一点连续、左连续、右连续、函数在区间上连续；
7. 间断点、第一类间断点、第二类间断点、可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点、振荡间断点；
8. 基本初等函数、初等函数。

基本结论

1. 收敛数列性质、函数极限性质、无穷小的性质；
2. 数列极限运算法则、函数极限运算法则；
3. 极限公式：两个重要极限公式、等价无穷小替换公式；
4. 一点极限存在充要条件、一点连续的充要条件；
5. 连续函数性质（和、差、积、商、复合）、初等函数的连续性、闭区间上连续函数性质；
6. 夹逼准则、单调有界原理；
7. 洛必达法则、泰勒公式；
8. 介值定理、零点定理。

基本方法

1. 计算数列极限；
2. 证明数列收敛，并求极限；
3. 计算函数极限；
4. 讨论函数的连续性、求函数的间断点、判断间断点所属类型；
5. 未知常数的确定；
6. 计算含变限积分函数的极限；

7. 计算抽象函数的极限;
8. 求无穷小的阶数和阶的比较。

1.1 数列极限的求法

一、基本概念

定义 1 数列极限 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 有两种定义方法:

(1) 描述语言: 当 n 趋于无穷大时, 数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 无限趋于固定的常数 a , 则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

(2) ϵ - N 语言: 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

在数列极限的两种定义方法中, 描述语言更有利于判断、理解一个数列极限是否存在。如数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限显然是不存在的, 这是因为当 n 趋于无穷大时, 数列一般项 $(-1)^n$ 并非趋于某个固定的常数。而 ϵ - N 语言更适合于证明的表述。简言之, 数列极限的描述语言有助于判断和理解数列的敛散性, 而 ϵ - N 语言适合于数列敛散性的证明。

极限定义(2)表明: 不论给定多么小的正数 ϵ , 都可以在数列中找到一项, 从这项以后的所有项与 a 差的绝对值小于 ϵ (与 a 的距离小于 ϵ), 即从这项以后的所有项都落在开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内。

通俗地说: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件是随着 n 的无限增大, $|x_n - a|$ 可以任意小。于是有:

若 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < M\epsilon$, 或 $|x_n - a| \leq M\epsilon$ (M 是非负常数, 此时 $M\epsilon$ 仍表示任意小), 则 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

定义 2 数列收敛和发散 如果数列极限存在, 则称数列收敛; 否则称数列发散。

注 根据定义 1 可知: 数列的极限是数列一般项的变化趋势, 因此数列是否收敛以及收敛哪个常数与数列(前)有限项无关。

例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0, 如果将数列前 1000 项改为: $1, 2, \dots, 1000$, 1000 项以后项不变, 变化后数列为

$$1, 2, \dots, 1000, \frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

显然这个数列仍然收敛于 0。又如数列 $\{n\}$ 是趋于无穷大, 发散的。如果将此数列的前 10000 项改为 0, 变化后数列为

$$0, 0, \dots, 0, 10001, 10002, \dots, n, \dots,$$

则该数列还是趋于无穷大, 仍然是发散的。

二、基本结论

定理 1(收敛数列性质)

(1) 唯一性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 则 $a = b$ 。

(2) 有界性 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $|x_n| \leq M$ 。

(3) 保号性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$; 同样, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n < 0$.

反之, 若 $x_n < 0 (n \in \mathbb{N}_+)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \leq 0$; 同样, 若 $x_n > 0 (n \in \mathbb{N}_+)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$.

(4) 子数列收敛性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对 $\{x_n\}$ 任意子数列 $\{x_{n_k}\}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$; 反之, 若数列 $\{x_n\}$ 的偶子列 $\{x_{2n}\}$ 和奇子列 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛于常数 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

定理 2(单调有界原理) 单调有界数列必有极限。

具体叙述为: 单调增加有上界的数列必有极限; 单调减少有下界的数列必有极限。

定理 3(夹逼准则) 若 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $y_n \leq x_n \leq z_n, n > N$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

定理 4(数列极限运算法则) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 那么:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = AB;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = A^B (A > 0).$$

三、基本方法

题型 1 计算数列极限

数列极限的未定式(不确定型)有八种形式:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty \pm \infty; 1^\infty; \infty^0; 0^0; 0+0+\cdots+0 (n \text{ 个无穷小的和}).$$

极限是未定式(不确定型), 指的是数列极限可能存在也可能不存在。对极限是无穷大的, 并非是未定式(不确定型), 它的极限是确定的, 无穷大, 不存在。

事实上, 上述的 ∞ , 并没有明确是 $+\infty$, 还是一 ∞ , 但当明确 $\pm \infty$ 时, 我们有

$$+\infty + (+\infty) = +\infty; -\infty + (-\infty) = -\infty; +\infty - (-\infty) = +\infty.$$

一般地, 数列的一般项是关于 n 的代数式(函数式), 极限型是

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty \pm \infty; 1^\infty; \infty^0; 0^0,$$

通常用四个方法: 取大法、有理化法、公式法和转化法计算其极限。

方法 1 取大法

所谓取大法, 就是对极限型是 $\frac{\infty}{\infty}$ 数列的一般项, 分子和分母同除以 n 的最大次幂, 再利用极限性质, 求得数列极限的方法。

例 1.1 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

解 (1) 数列的极限型是 $\frac{\infty}{\infty}$, 而分子、分母关于 n 的最大次幂是 n^2 , 于是分子和分母同除以 n^2 , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 2\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

(2) 数列的极限型是 $\frac{\infty}{\infty}$, 分子和分母关于 n 的最大次幂是 n , 于是分子和分母同除以 n , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 2.$$

方法2 有理化法

若分子或分母含有根式, 一般要考虑分子有理化或分母有理化, 或分子、分母同时有理化。通过有理化, 去掉根号, 从而可以确定极限型和求极限的方法。

例 1.2 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 + 1}}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n).$$

解 (1) 由于分母含有根式, 于是分母有理化, 再利用取大法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^4 + n^3} + \sqrt{n^4 + 1})}{n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}{1 - \frac{1}{n^3}} = 2.$$

(2) 由于分子含有根式, 于是分子有理化, 再利用取大法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

方法3 公式法

所谓公式法, 就是利用两个重要极限公式和等价无穷小替换公式求极限的方法。

关于数列的两个重要极限公式的基本形式为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

一般形式: 若 $f(n) \rightarrow 0$ ($f(n) \neq 0$) ($n \rightarrow \infty$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + f(n))^{\frac{1}{f(n)}} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin f(n)}{f(n)} = 1.$$

等价无穷小的替换公式见 17 页。

一般地, 如果极限型是 1^∞ , 幂指型极限, 利用重要极限公式有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)^{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + f(n) - 1]^{\frac{1}{f(n)-1} \cdot [f(n)-1]g(n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)-1]g(n)},$$

其中 $f(n) \rightarrow 1, g(n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 。

注 由于 $f(n)^{g(n)}$ 底和指数都是 n 的函数, 于是称 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)^{g(n)}$ 为幂指型极限。

例 1.3 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{4n+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n}.$$

解 (1) 极限型是 1^∞ , 利用重要极限公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1) \cdot \frac{4n+1}{2n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n+1}} = e^2.$$

(2) 将数列一般项中 $\sin \frac{1}{n}$ 凑成重要极限公式形式, 然后计算其余部分极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

方法 4 转换法

转换法就是将数列极限转换成函数极限。通常情况下, 取 $n=x$, 则 $x \rightarrow +\infty$; 取 $\frac{1}{n}=x$, 则 $x \rightarrow 0^+$; 取 $\sqrt[n]{n}=x$, 则 $x \rightarrow 1$, 等等, 这是求数列极限的一个常用方法。当数列极限转换成函数极限后, 对极限型为 $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ 的极限, 可以运用洛必达法则, 这也是转化法的主要目的。

例 1.4 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{2}{n}} - 1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n, a, b > 0.$$

解 (1) 取 $\frac{1}{n}=x$, 则 $x \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^{2x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2.$$

(2) 极限为不定式 1^∞ 型, 利用重要极限公式, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2} \cdot \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2/n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2/n}}.$$

取 $\frac{1}{n}=x$, 运用洛必达法则, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2/n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

注 转换法的理论依据是海涅(Heine)定理, 即:

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对任意的 $\{x_n\}, x_n \neq x_0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

这里取 $\frac{1}{n} = x$, 实质是数列极限等于将 $\frac{1}{n}$ 换成 x 的函数极限, 其他情况雷同。

一般地, 若数列的一般项是和 n 有关的式子而不是关于 n 的代数式, 或表示为无限个无穷小的和, 或分子、分母为无限个无穷小的和, 通常用三个方法: 放缩法、相减法和积分法计算其极限。

方法5 放缩法(夹逼准则)

若数列的一般项是与 n 有关的式子而不是关于 n 的代数式, 或表示为无限个无穷小的和, 通常采用放大和缩小的方法(简称放缩法), 使不等式两端表示为 n 的代数式, 进而求得不等式两端的极限, 在不等式两端数列极限存在且相等情况下, 根据夹逼准则, 所求数列的极限存在且等于两端的极限。我们称此求极限的方法为放缩法, 又称夹逼准则。

应用放缩法要注意的是: 对一般项放大不能放得太大; 缩小也不能缩得太小, 否则两端极限不等, 这对求此数列极限没有任何意义。

例 1.5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$ 。

解 对数列的一般项放缩

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}。$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2},$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}$ 。

例 1.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ 。

解 解此题的关键是将积分表示为关于 n 的代数式, 显然这是没办法通过直接计算积分来实现的, 只能通过对被积函数的放缩, 达到可求积分的目的。由于 $x \in [0, 1]$, 于是有

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n,$$

根据定积分的保序性, 有

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}。$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, 根据夹逼准则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$ 。

注 当例 1.5 改为计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{m}{n^2+m} \right)$ 时, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{m}{n^2+m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2+m} = 0。$$

这是由于它是有限个(m 个)无穷小的和, 我们知道: 有限个无穷小的和是无穷小。

无限个无穷小的和是数列极限未定式的一种常见形式, 也是数列极限中比较难解决的问题, 计算此类极限有四个方法: 放缩法、积分法、相减法和级数和。前三个方法在本节给出, 级数和方法将在级数一章中处理。

方法6 相减法

施托尔茨(Stolz)定理: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, $y_{n+1} > y_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

如果数列的一般项为分式形式, 分子或分母为 n 项(无限项)的和, 可以利用施托尔茨定理, 我们将这一方法形象的称为相减法。这一方法可以使分子或分母无穷多项变成有限项。

例 1.7 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2]$ 。

解 令 $x_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$, $y_n = n^3$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, $y_{n+1} > y_n$ 。根据施托尔茨定理得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{4}{3}.$$

例 1.8 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \cdots + n^p)$ 。

解 根据施托尔茨定理得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \cdots + n^p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \quad (\text{分子分母同除 } n^{p+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} - 1} \quad \left(\text{取 } \frac{1}{n} = x\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)^p}{(1+x)^{p+1} - 1} \quad (\text{这里 } (1+x)^{p+1} - 1 \sim (p+1)x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)^p}{(p+1)x} = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

方法7 积分法

所谓的积分法就是将数列极限表示为一个定积分的计算数列极限的方法。如果数列一般项为 n 项(无限项)的和或积的形式, 或者为 $\sum$ 和 $\prod$ 的形式, 可以考虑应用积分法, 将数列极限表示为定积分。应用积分法的关键是确定被积函数!

积分法原理: 如图 1-1, 将曲边梯形分成 n 个等宽的小曲边梯形, 第 k ($k=1, 2, \dots, n$) 个小曲边梯形的面积近似等于长方形(以 $\frac{1}{n}$ 为宽, 以 $f(\frac{k}{n})$ 为长; 或以 $\frac{1}{n}$ 为宽, 以 $f(\frac{k-1}{n})$ 为长)的面积, 根据定积分的几何意义, 则有

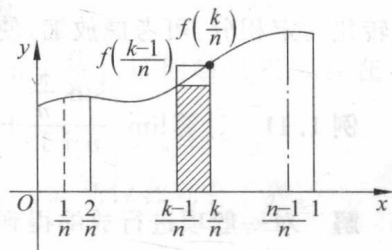


图 1-1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

应用积分方法计算数列极限的具体步骤:

情形 1 数列一般项为 n 项和, 或 $\sum$ 的形式:

1. 将数列的一般项表示为 $\sum_{k=1}^n$ 的形式;

2. 数列一般项提取 $\frac{1}{n}$, 将数列的一般项表示为 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ?$ 的形式;

3. 将 $\sum_{k=1}^n ?$ 的一般项“?”表示成关于 $\frac{k}{n}$ 或 $\frac{k-1}{n}$ 的函数式;

4. 把 $\frac{k}{n}$ 或 $\frac{k-1}{n}$ 换成 x , 此时一般项“?”就是定积分的被积函数 $f(x)$, 数列极限就是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的定积分。

情形 2 若数列的一般项是 n 项积, 或 $\prod$ 的形式, 可以利用恒等变换公式 $N = e^{\ln N}$, 将积的形式化成以 e 为底、指数为 n 项和的形式, 然后利用积分法求出指数部分的极限。

例 1.9 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$ 。

解 将极限转化为定积分

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

注 此题不能应用放缩法, 这是由于一般项放缩后为

$$\frac{n}{\sqrt{4n^2-1^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

不等式两端的极限不等。

例 1.10 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots [n+(n-1)]}$ 。

解 首先利用恒等变换公式 $N = e^{\ln N}$, 将积的形式变成和的形式, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots [n+(n-1)]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} [\ln n + \ln(n+1) + \cdots + \ln(n+(n-1))] - \ln n} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln 1 + \ln(1+\frac{1}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n-1}{n})]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k-1}{n})} \\ &= e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} = e^{[x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)]_0^1} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

需要指出的是: 并非所有的一般项为 n 项和的数列极限都可以转化为定积分, 如果不能转化为定积分, 可考虑放缩, 使不等式两端的极限表示为定积分, 再利用夹逼准则。

例 1.11 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$ 。

解 对一般项进行放缩得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &\leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right). \end{aligned}$$