NANKAI UNIVERSITY 南開 1919

黎曼几何

Riemannian Geometry

黄利兵 编

科学出版社

南开大学研究生数学教学丛书

黎曼几何

黄利兵 编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据作者近年来多次在南开大学讲授黎曼几何的讲稿写成，可以作为黎曼几何的入门教材，主要介绍黎曼几何的基本概念与基本方法. 全书共十四讲，依次介绍黎曼流形、黎曼联络、测地线、曲率等基本概念；其间介绍弧长的变分公式以及 Jacobi 场等基本方法，并讨论黎曼流形上的几何变换、微分算子、完备性、比较定理等；最后，作为黎曼流形的重要实例，介绍了齐性黎曼流形. 每一讲都配有适量的例子和重要的应用，以及少量习题，以加深对相关概念和方法的理解. 本书强调几何背景，着重介绍几何直观比较明确的一些定理，定理的证明也以经典微分几何方法为主.

本书可作为综合类大学和高等师范院校数学、统计、物理等专业的黎曼几何课教材，可供研究生或高年级本科生使用，也可供数学教师和科技工作者参阅.

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何/黄利兵编. —北京：科学出版社，2018.12
ISBN 978-7-03-060048-6

Ⅰ. ①黎…　Ⅱ. ①黄…　Ⅲ. ①黎曼几何-教材　Ⅳ. ①O186. 12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 292085 号

责任编辑：李静科 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：无极书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 12 月第 一 版　开本：720 × 1000　1/16
2018 年 12 月第一次印刷　印张：7 1/2
字数：151 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

黎曼几何是十分重要的基础数学分支，它是经典欧氏几何的发展，其基本研究对象是黎曼流形，即欧氏几何中直线、平面、曲面等概念的进一步抽象和推广. 经过一百多年，尤其是最近五十年的发展，产生了一大批深刻的结果，黎曼几何在微分方程、多复变函数论、拓扑学等数学分支，以及统计学、信息学、理论物理学等其他领域中发挥了巨大作用.

爱因斯坦曾把引力现象解释成黎曼空间的曲率性质，黎曼几何可以称得上是广义相对论的数学语言. 不仅如此，黎曼几何是 20 世纪影响最大的数学分支之一，在许多学科领域有广泛重要的应用. 世界著名大学都将黎曼几何列为大学生和研究生的重要课程.

南开大学开设黎曼几何课程已有悠久的历史. 本书编者从 2009 年以来就在南开大学数学科学学院讲授这门课程，当时选用陈维桓等编著的《黎曼几何引论 (上册)》作为教材，并参照 P. Peterson 的教材作了删节和补充. 在近十年的教学实践中，编者对课程有了较深刻的理解，并积累了许多素材和经验，为编写本书作了充分的准备. 尽管如此，在实际编写过程中仍然面临许多难题.

第一个难题是内容的取舍. 在我们的课程体系中，这门课以微分流形作为先修课程，所以在本书中我们假定读者了解流形论的一些常用概念，如张量场、外微分、李导数，以及李群的基本知识. 这样，我们就不必浪费篇幅在这些底层的内容上. 换言之，我们可以专注于黎曼几何本身. 作为教材，我们必然要以基础内容为主. 然而，黎曼几何的面貌日新月异，要确保课程内容的丰富度，就不能满足于最简单的呈现. 经过反复权衡，我们大体保留了黎曼流形、测地线、曲率、Jacobi 场和共轭点的内容，并补充了一些新的结果. 之所以这样选择，是因为这门课的主要目的，一是给学生介绍黎曼几何的基础知识和基本方法，二是让学生了解一些前沿的结论. 前一方面的内容在近三十年来基本是固定的，而后一方面的内容则是与时俱进的，无法在一本固定的教材中体现. 不过，我们在本书的每一讲安排了一个简单的附注，其中包含了推荐给学生的阅读书目和参考文献.

第二个难题是如何在精确的形式化语言和粗略的讲解性语言之间达到一种平衡. 在这本书中，我们特别希望达到以下两个目标：一是让学生了解梯度、散度、Laplace 算子、曲率等概念，这些不仅有明确的几何意义，而且都是可以计算的；二是定理的证明过程应是脉络清晰和富有启发的，凡是可以用文字说清的部分，就尽量少使用符号. 在力所能及的情况下，我们尽量给出每个定理的完整证明，但也有

少数情况, 详细的证明超出了课堂讲解的时间限制, 我们只能描述概要, 并给出参考文献请学生自行查阅. 这两个目标的完成程度, 还有赖读者朋友的检验.

根据编者的经验, 本书的材料适用于每周 3 学时的一学期课程, 大致上每一讲需要 3 学时, 还有充裕的时间可以讨论一些习题或经典文献. 本书第一讲在介绍黎曼度量的基础上, 简单讨论了等距变换、相似变换、共形变换的定义. 第二讲介绍黎曼联络, 重点在于用外微分法进行计算. 第三讲讨论梯度、散度以及 Laplace 算子, 并粗略地介绍了 Hodge 理论. 第四讲介绍了测地线, 并讨论了全测地子流形以及射影变换等概念. 第五讲导出了弧长的第一变分公式, 并给出了它的两个应用. 第六讲介绍关于完备性的 Hopf-Rinow 定理. 第七、八讲介绍曲率张量和截面曲率, 重点是常曲率空间的局部表示以及空间形式的分类. 第九讲介绍大范围黎曼几何的一种常用工具, 即弧长的第二变分公式. 第十讲介绍 Ricci 曲率和数量曲率的定义以及它们与流形拓扑之间的一些关系. 第十一讲介绍另一种常用工具, 即 Jacobi 场. 第十二讲讨论了 Bishop-Gromov 相对体积比较定理和它的一些经典应用. 第十三讲讨论了黎曼流形上的仿射变换和射影等价性, 重点是仿射变换与 de Rham 分解之间的关系, 以及 Beltrami 定理的证明. 第十四讲讨论了一类重要的黎曼流形, 即赋予不变度量的齐性空间.

本书的前十一讲是 2017 年 8 月完成的, 后三讲则直到 2018 年 4 月才完成, 当时编者正在访问沈忠民教授. 与他的数次交谈使我对这本书的目标有了更明确的想法, 又用了几个月时间仔细修改了多处内容. 在本书的出版过程中, 南开大学数学科学学院的许多老师和同学对编者给予了充分的支持和帮助, 在此表示感谢; 同时还要感谢科学出版社李静科编辑的辛勤工作.

限于作者的水平, 本书难免有不足或错漏之处, 希望读者能不吝指正.

黄利兵

2018 年 11 月

目　　录

第一讲 黎曼度量

黎曼几何起源于 Riemann 关于几何学基础的著名演讲. 在该演讲中, Riemann 提出了如下的观点: 首先, 几何学的研究对象应该是抽象的流形; 其次, 几何学的理论应该基于一些简单的定义. Riemann 认为, 在欧氏几何中, 把直线作为特殊的曲线加以考虑, 这在抽象的流形上并不可取; 他进一步认为, 所有的曲线长度都应该定义为切向量长度的积分. 也就是说, 只要能给每个切向量指定长度, 就可以定义曲线长度, 从而定义距离等概念, 进而发展出流形上的几何学.

在流形的每一点来看, 给切向量指定长度, 相当于在切空间上指定一个Minkowski 范数. Riemann 在演讲中指出, 比较一般的范数也是可以讨论的, 这就是近年来蓬勃发展的 Finsler 几何[3]. 但 Riemann 经过计算发现, 限定为欧氏范数, 将使计算更简便, 而所得结论相差不多 (这一观点事实上不完全正确). 现在, 我们就从这一基本的定义开始.

1.1 黎曼度量的定义

设 M 是连通的 m 维光滑流形 (本书中始终用 m 表示流形 M 的维数且 $m \geqslant 2$). 对于 $x \in M$, 用 T_xM 表示 x 点的切空间. 用 $C^\infty(M)$ 表示 M 上光滑函数的全体, 用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上光滑向量场的全体. 用 T_s^rM 表示 M 上的 (r,s) 型张量丛, 其光滑截面, 就是 (r,s) 型张量场.

定义 1.1 流形 M 上, 一个对称的 $(0,2)$ 型张量场 g 如果是正定的, 即

$$g(X,X) \geqslant 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

且等号成立当且仅当 $X=0$, 则称 g 是 M 上的 *黎曼度量*. 赋予黎曼度量 g 的流形 M 称为 *黎曼流形*, 记作 (M,g).

根据定义, 黎曼度量 g 在任意切空间 T_xM 上的限制 (记作 $g|_{T_xM}$ 或 g_x), 就是 T_xM 上的内积. 所以, 粗略地说, 给一个流形 M 指定黎曼度量, 相当于以一种光滑的方式为每个切空间指定内积. 也可以认为, 研究黎曼流形, 相当于研究一族欧氏空间 (T_xM, g_x), 其中下标 x 跑遍一个光滑流形 M; 也就是说, 这族欧氏空间组织在一起的方式依赖于流形 M 的拓扑.

如果在 M 上取定局部标架场 $\{e_i\}$, 并设对偶的余标架场为 $\{\omega^i\}$, 则黎曼度量

g 有局部表达式

$$g = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j, \quad g_{ij} = g(e_i, e_j). \tag{1.1}$$

称矩阵 $\mathrm{g} = (g_{ij})$ 为黎曼度量 g 在标架场 $\{e_i\}$ 下的 **度量矩阵**. 事实上, 对任意一点 $x \in M$, $\{e_i(x)\}$ 都是切空间 T_xM 的一组基, $(g_{ij}(x))$ 就是内积 g_x 关于这组基的度量矩阵.

利用 Schmidt 正交化方法, 我们可以从局部标架场 $\{e_i\}$ 出发, 得到标准正交的标架场; 在标准正交标架场下, 度量矩阵为单位矩阵 (δ_{ij}).

定义 1.2　在黎曼流形 (M, g) 上, 对于每个切向量 $X \in T_xM$, 存在唯一的 $X^\flat \in T_x^*M$, 使得

$$X^\flat(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in T_xM.$$

称 $\flat : T_xM \to T_x^*M$ 为 **降调同构**. 类似地, 对于每个余切向量 $\alpha \in T_x^*M$, 存在唯一的 $\alpha^\sharp \in T_xM$, 使得

$$g(\alpha^\sharp, Y) = \alpha(Y), \quad \forall Y \in T_xM.$$

称 $\sharp : T_x^*M \to T_xM$ 为 **升调同构**.

利用上述同构, 我们可以把切空间的内积搬到余切空间上, 即定义 $\alpha, \beta \in T_x^*M$ 的内积为

$$g(\alpha, \beta) = g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp). \tag{1.2}$$

在流形上指定了黎曼度量之后, 我们就可以讨论一些几何对象的度量性质了. 例如, 光滑曲线 $\gamma : [a, b] \to M$ 的长度, 记作 $L(\gamma)$, 定义为切向量 $\dot\gamma(t)$ 长度的积分, 即

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}\,t.$$

当 M 是可定向流形时, 我们可以取与流形的定向相符的局部标架场 $\{e_i\}$, 其对偶余标架场为 $\{\omega^i\}$. 这时, 容易验证 (习题 1.4), m 形式

$$\sqrt{\det(g_{ij})}\,\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^m$$

与这种标架场的选取无关, 称为 (M, g) 的 **体积形式**, 记作 $*1$.

1.2　黎曼流形的例子

现在我们来看一些黎曼流形的例子.

例 1.3　在 $\mathbb{R}^m$ 上取坐标系 $(x^1, \cdots, x^m)$, 则如下的 $(0, 2)$ 型张量场

$$\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^1 + \cdots + \mathrm{d}\,x^m \otimes \mathrm{d}\,x^m$$

是正定的, 从而是 $\mathbb{R}^m$ 上的黎曼度量, 称为 $\mathbb{R}^m$ 上的欧氏度量, 也称为 $\mathbb{R}^m$ 上的标准度量. 通常将这个度量记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 对于向量场 $X=X^i\partial_i$ 和 $Y=Y^j\partial_j$(这里和以后, 如无特殊说明, 我们将 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 简写为 ∂_i), 有

$$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^m X^iY^i.$$

赋予欧氏度量的实线性空间, 称为欧氏空间, 它是最简单的黎曼流形. 黎曼几何中的许多概念都是从欧氏空间自然延伸出来的.

上面这个例子显然可以推广为: 任取一个光滑地依赖于 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 的正定矩阵 $(g_{ij}(x))$, 则可在 $\mathbb{R}^m$ 上定义一个黎曼度量 $g=g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$. 所以, $\mathbb{R}^m$ 上的黎曼度量是非常多的. 例如, 任取正值函数 $\rho(x)$, 则 $\left(\dfrac{1}{\rho(x)^2}\delta_{ij}\right)$ 是正定矩阵. 这时相应的黎曼度量称为 **共形平坦** 的.

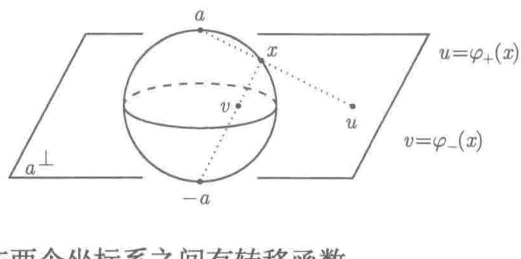
例 1.4 设 $H^m=\{x\in\mathbb{R}^m\,|\,|x|<1\}$. 在 H^m 上定义

$$g=\frac{4}{(1-|x|^2)^2}\left(\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1+\cdots+\mathrm{d}x^m\otimes\mathrm{d}x^m\right),$$

则 (H^m,g) 是黎曼流形, 称为 **双曲空间**.

例 1.5 记 S^m 为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面, 即由方程 $|x|^2=1$ 所定义的超曲面(这里用 $\langle\,,\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的内积, $|\;|$ 表示向量长度). 利用球极投影, 我们可建立 S^m 上的局部坐标系. 具体地, 任取 $a\in S^m$, 设 $-a$ 为其对径点. 令 $U_+=S^m\backslash\{a\}$, $U_-=S^m\backslash\{-a\}$, 则 $S^m=U_+\cup U_-$. 分别定义 $\varphi_+:U_+\to a^\perp\simeq\mathbb{R}^m$ 和 $\varphi_-:U_-\to a^\perp\simeq\mathbb{R}^m$ 如下:

$$\varphi_+(x)=\frac{x-\langle x,a\rangle a}{1-\langle x,a\rangle},\quad \varphi_-(x)=\frac{x-\langle x,a\rangle a}{1+\langle x,a\rangle}.$$



由上图不难看出, 在两个坐标系之间有转移函数

$$\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}(u)=\frac{u}{|u|^2},\quad \varphi_+\circ\varphi_-^{-1}(v)=\frac{v}{|v|^2},\quad \forall u,v\in a^\perp\backslash\{0\}.$$

显然上述转移函数都是光滑的. 因此, (U_+, φ_+) 与 (U_-, φ_-) 是光滑相容的. 现在, 我们在 U_+ 上定义黎曼度量

$$g_+ = \frac{4}{(1+|u|^2)^2}\left(\mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^1 + \cdots + \mathrm{d}u^m \otimes \mathrm{d}u^m\right),$$

同时在 U_- 上定义黎曼度量

$$g_- = \frac{4}{(1+|v|^2)^2}\left(\mathrm{d}v^1 \otimes \mathrm{d}v^1 + \cdots + \mathrm{d}v^m \otimes \mathrm{d}v^m\right).$$

容易验证, g_+ 与 g_- 在 $U_+ \cap U_-$ 上是重合的. 这两者合在一起, 就定义了 S^m 上的一个黎曼度量, 称为 S^m 上的标准度量.

一般地, 从流形的微分结构出发, 先在每个局部坐标系中定义黎曼度量, 再用恰当的方式将它们拼起来 (例如利用单位分解定理), 就可以证明: 每个光滑流形上都存在黎曼度量. 具体的论证细节可参考 [28] 或 [52].

例 1.6 设 (N, h) 为黎曼流形. 如果 $f: M \to N$ 是浸入映射, 则 f^*h 是 M 上的黎曼度量 (习题 1.2), 这个度量称为 M 上的诱导度量. 特别地, 如果 $f: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ 是浸入超曲面, h 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的欧氏度量, 则称 f^*h 为 M 的第一基本形式.

例如, 考虑浸入 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ 如下

$$f(u^1, \cdots, u^m) = \left(\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}, \frac{2u^1}{|u|^2+1}, \cdots, \frac{2u^m}{|u|^2+1}\right),$$

则 $f(\mathbb{R}^m)$ 是单位球面 S^m 去掉一点, 即上一个例子中的 U_+. 计算可知 $f^*h = g_+$. 这就说明, S^m 上的标准度量, 恰好是将它自然浸入 $\mathbb{R}^{m+1}$ 时所获得的诱导度量.

例 1.7 如果 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 是两个黎曼流形, 则对于任一点 $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, 其切空间 $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ 同构于 $T_{p_1}M_1$ 与 $T_{p_2}M_2$ 的直和. 如果规定 $T_{p_1}M_1$ 与 $T_{p_2}M_2$ 是正交的, 则在 $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ 上就定义了一个内积, 从而在 $M_1 \times M_2$ 上定义了一个黎曼度量, 称为*乘积度量*, 记作 $g_1 + g_2$. 赋予乘积度量 $g_1 + g_2$ 的流形 $M_1 \times M_2$ 称为 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 的*黎曼直积*.

1.3 黎曼流形上的变换

定义 1.8 设 $f: (M, g) \to (N, h)$ 是黎曼流形之间的映射. 如果对任一点 $p \in M$, 存在 p 点邻域 U, 使得 f 是从 U 到 $f(U)$ 的微分同胚 (即 f 是局部微分同胚), 并且 $f^*h = g$, 则称 f 是*局部等距*. 进一步, 如果 f 是微分同胚, 则称 f 是*等距*.

例 1.9 设 M 为平面 $\mathbb{R}^2$, 标准度量为 g. 又设 N 为 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱面 $x^2+y^2=1$, N 上的诱导度量为 h; 定义 $f: M \to N$ 如下

$$f(x,y) = (\cos x, \sin x, y),$$

则容易验证, f 是局部微分同胚, 且是局部等距.

例 1.10 设 A 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的正交变换, 则容易证明 A 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 到自身的等距. 由于 A 将单位向量变为单位向量, 所以 A 也可看作 S^m 到自身的变换. 容易验证, A 也是 S^m 到自身的等距. 特别地, 在 S^m 上, 将一点映为其对径点的映射是等距.

例 1.11 设 S^m 是 m 维球面, $\mathbb{R}P^m$ 是 m 维实射影空间, 即

$$\mathbb{R}P^m = \{[v] \mid v \in \mathbb{R}^{m+1}, v \neq 0\},$$

其中 $[v] = \{k \cdot v \mid k \in \mathbb{R}, k \neq 0\}$. 由于 S^m 中任一点 p 可看作 $\mathbb{R}^m$ 中长度为 1 的向量, 所以用 $f(p) = [p]$ 可定义映射 $f: S^m \to \mathbb{R}P^m$. 容易验证, f 是覆叠映射, 所以是局部微分同胚.

进一步, 由于覆叠变换 $p \mapsto -p$ 是 S^m 上的等距, 我们可在 $\mathbb{R}P^m$ 上定义黎曼度量, 使得 f 是局部等距 (习题 1.3).

在上面的例子中, 局部等距都是覆叠映射. 后面我们将证明 (定理 6.14), 在适当的条件下, 局部等距一定是覆叠映射.

从黎曼流形 (M,g) 到自身的所有等距自然地构成一个群, 称为它的*等距群*. 可以证明, 黎曼流形的等距群一定是李群[28].

在欧氏几何中, 除了考虑等距变换, 还可以考虑相似变换. 相似变换有两个特点: 一是变换前后, 距离成比例; 二是变换前后, 角度保持不变. 后面这个特点并非相似所特有, 例如, 复平面的全纯映射都保持角度.

定义 1.12 设 f 是从黎曼流形 (M,g) 到自身的微分同胚. 如果存在常数 $c>0$, 使得 $|f_*v| = c|v|, \forall v \in TM$, 则称 f 为*相似变换*, 称 k 为*相似比*.

由定义可知, f 是相似变换, 当且仅当 $f^*g = c^2 \cdot g$. 在流形 M 上, 两个黎曼度量如果仅相差一个常数倍, 则称它们是相似的. 所以, f 是相似变换, 当且仅当 f^*g 与 g 是相似的.

定义 1.13 设 f 是从黎曼流形 (M,g) 到自身的微分同胚. 固定一点 $p \in M$, 如果对任意 $v, w \in T_pM$, 切向量 f_*v 与 f_*w 的夹角等于 v 与 w 的夹角, 则称 f 在 p 点是共形的 (或保角的). 如果 f 在每一点都是共形的, 则称 f 为*共形变换*.

如果 f 在 p 点是共形的, 则对于非零切向量 $v, w \in T_pM$, 有

$$\frac{g(v,w)}{|v|\,|w|} = \frac{g(f_*v, f_*w)}{|f_*v|\,|f_*w|}.$$

固定 w, 并记 $\tilde{g}=f^*g$, $c=|w|^2/|f_*w|^2$, 则从上式可得

$$g(v,w)^2\tilde{g}(v,v)=c\tilde{g}(v,w)^2g(v,v).$$

注意两端都是关于 v 的四次齐次多项式, 且都能分解为两个一次因式和一个二次不可约因式的乘积. 因此, 这两个二次不可约因式相差一个常数倍, 即存在 (依赖于 p 点的) 常数 $\rho>0$, 使得

$$\tilde{g}(v,v)=\rho^2\cdot g(v,v),\quad \forall v\in T_pM.$$

换言之, $f^*g=\rho^2\cdot g$. 容易看出, 这就是 f 在 p 点共形的充要条件.

命题 1.14 *设 f 是黎曼流形 (M,g) 到自身的微分同胚. 则 f 是共形变换, 当且仅当存在正值函数 $\rho\in C^\infty(M)$, 使得 $f^*g=\rho^2\cdot g$.*

定义 1.15 对于流形 M 上的两个黎曼度量 g_1 和 g_2, 如果存在 $\rho\in C^\infty(M)$, 使得 $g_1=\rho^2\cdot g_2$, 则称 g_1 和 g_2 是共形的.

例 1.16 如果 f 是黎曼流形 (M,g) 的等距变换, 则对于任意正值函数 $\rho\in C^\infty(M)$, f 是共形度量 $h=\rho^2\cdot g$ 的共形变换. 这是因为

$$f^*h=f^*\rho^2\cdot f^*g=f^*\rho^2\cdot g=(f^*\rho^2/\rho^2)\cdot h.$$

下面这个定理说明, 除了一些特殊的黎曼流形以外, 几乎所有的共形变换都只能以上面这个例子的形式产生.

定理 1.17 *如果黎曼流形 (M,g) 不等距于 $\mathbb{R}^m$ 或 S^m, 则存在正值函数 ρ, 使得 (M,g) 的任意共形变换都是黎曼流形 $(M,\rho^2\cdot g)$ 的等距变换.*

这个定理通常称为共形 Lichnerowicz-Obata 猜想, D. Alekseevskii[1], J. Ferrand[17], M. Obata[36] 和 R. Schoen[40] 先后独立地在不同条件下给出了它的证明.

在欧氏几何中还可考虑仿射变换和射影变换. 但这两者都与直线的概念有关. 要在黎曼几何中定义 “直线”, 通常需要用到联络的概念. 在下一讲, 我们就来介绍黎曼流形上的联络.

1.4 附 注

由于这门课以微分流形作为先修课程, 不熟悉流形理论而希望快速了解相关知识的读者可以先看 [28] 的第一章. 要深入了解, 可以读 J. M. Lee 的 [30], 这本书非常厚, 但它对每一个细节的处理都非常漂亮. 此外, W. Boothby 的 [6] 也是非常好的选择, 它的插图不仅清晰, 而且数量很多. 当然, 中文的微分流形教材也很多. 陈维桓的 [51] 和李养成等的 [53] 都是广受赞誉的.

在这一讲提到的覆叠映射, 是拓扑学中非常重要的章节. 不熟悉此内容的读者可以阅读 [23] 或 [54], 这两者都是比较有几何味道的.

在 M. Spivak 的 [43] 第 II 卷中, 不仅收录了 Riemann 的演讲全文 (英译), 还收录了 Gauss 关于曲面论的经典文章.

M. Berger 的 [4] 是一本概览式的黎曼几何百科全书, 通过它我们可以了解到黎曼几何的各个方面. 尽管其中大多数结果都没有证明, 但参考文献非常全.

关于共形 Lichnerowicz-Obata 猜想, D. Alekseevskii[1] 的证明虽然被发现有严重缺陷, 但只要有流形和李群的基础, 就能读懂大部分; J. Ferrand[17] 是第一个完整的证明, 只是很繁琐; R. Schoen[40] 给出的证明最为简单, 但不适合黎曼几何的初学者.

1.5 习　题

1.1 如果在黎曼流形 M 上取局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{\omega^i\}$, 黎曼度量 g 在此标架场下的度量矩阵为 (g_{ij}), 其逆矩阵为 (g^{ij}), 证明:

$$g(\omega^i, \omega^j) = g^{ij}.$$

因而, 1 形式 $\alpha = a_i\omega^i$ 和 $\beta = b_j\omega^j$ 的内积为 $g^{ij}a_ib_j$.

1.2 如果 (M, g) 是黎曼流形, $f: N \to M$ 为浸入, 证明: f^*g 是 N 上的黎曼度量.

1.3 设 (M, g) 为黎曼流形, $\pi: M \to N$ 为覆叠映射. 如果覆叠变换都是等距, 证明在 N 上存在黎曼度量 h, 使得 $f^*h = g$.

1.4 设 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 是欧氏空间 V 的两组基, 且它们诱导相同的定向, 即这两组基之间的过渡矩阵行列式 > 0. 又设这两组基下的度量矩阵分别是 (g_{ij}) 和 (h_{ij}), 它们的对偶基分别为 $\{\alpha^i\}$ 和 $\{\beta^i\}$, 证明

$$\sqrt{\det(g_{ij})}\,\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m = \sqrt{\det(h_{ij})}\,\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m.$$

1.5 将 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 等同于 $\mathbb{C}^{n+1}$, 则 $2n+1$ 维球面 S^{2n+1} 可看成 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的子集, 即由方程

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$$

所定义的超曲面. 证明: 任取模长为 1 的复数 ξ, 则如下映射

$$(z_0, z_1, \cdots, z_n) \mapsto (\xi z_0, \xi z_1, \cdots, \xi z_n)$$

是 S^{2n+1} 到自身的等距.

1.6 设 G 是紧李群. 证明 G 上存在一个黎曼度量 g, 使得左、右移动都是等距, 即

$$L_a^* g = g, \quad R_a^* g = g, \quad \forall a \in G.$$

这样的度量称为双不变的.

1.7 在集合 $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上按如下方式定义乘法

$$(x_0, x) \circ (y_0, y) = (x_0 y_0, x + x_0 y),$$

证明 M 关于此乘法构成一个李群. 进一步, 在 M 上定义如下的黎曼度量

$$g = \frac{1}{(x_0)^2}(\mathrm{d}\,x_0 \otimes \mathrm{d}\,x_0 + \mathrm{d}\,x_1 \otimes \mathrm{d}\,x_1 + \cdots + \mathrm{d}\,x_n \otimes \mathrm{d}\,x_n),$$

证明 g 是左不变的, 即 $L_a^* g = g, \forall a \in M$.

1.8 证明上题中的黎曼流形 (M, g) 与双曲空间 H^{n+1} 等距.

第二讲 黎曼联络

E. B. Christoffel 于 1869 年发表了关于共变微分的有名文章, 其中引进了 Christoffel 记号. 他的学生 T. Levi-Civita 推广和发展了他的想法, 使得张量分析成为微分几何和广义相对论的有力工具. 张量分析, 指的就是对流形上的张量场进行微分. 这通常是用联络来完成的. 在这一讲, 我们就来介绍黎曼流形上的联络.

2.1 仿射联络

定义 2.1 在光滑流形 M 上, 映射 $D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 如果满足 (其中 $f\in C^\infty(M)$, $X, Y, Z\in\mathfrak{X}(M)$)

(1) $D_{X+Y}Z = f\cdot D_XZ + D_YZ$;

(2) $D_{fX}Y = f\cdot D_XY$;

(3) $D_X(Y+Z) = D_XY + D_XZ$;

(4) $D_X(f\cdot Y) = X(f)\cdot Y + f\cdot D_XY$,

则称 D 为 M 上的 *仿射联络*.

注意, 这里我们遵照传统将 $D(X,Y)$ 写成 D_XY, 是为了显示 D 关于这两个分量的性质不同: 前两个条件表明, D 关于第一个分量是 $C^\infty(M)$ 线性的; 后两个条件表明, D 关于第二个分量只是实线性的, 其性质类似于导数.

现在, 设 D 是 M 上的仿射联络. 由于 D_XY 关于 X 是张量, 所以, 给定 Y 时, D_XY 在一点 p 处的值只与 $X(p)$ 有关. 下面的引理说明, 给定 $X(p)$, 则 D_XY 在 p 点的值只与 Y 在 p 点邻域的取值有关.

引理 2.2 *设 U 为 M 中开集, 若向量场 Y_1, Y_2 满足 $Y_1|_U = Y_2|_U$, 则 $(D_XY_1)|_U = (D_XY_2)|_U$.*

证明 令 $Y = Y_1 - Y_2$. 对于 U 中任一点 p, 我们取 p 点邻域 $V\subset U$, 则有光滑函数 f 使得 $f|_V\equiv 1$, $f|_{M-U}\equiv 0$. 这样 $f\cdot Y = 0$ 在 M 上处处成立. 我们有 $D_X(f\cdot Y) = 0$, 所以 $X(f)\cdot Y + f\cdot D_XY = 0$. 限制在 p 点, 就有 $D_XY = 0$, 即在 p 点有 $D_XY_1 = D_XY_2$ 成立. □

由局部性, 如果我们知道向量场 X, Y 在开集 U 上的取值, 则向量场 D_XY 在 U 上的取值也就确定了. 因此, 如果我们取 U 上的局部标架场 $\{e_i\}$, 则 $D_{e_i}e_j$ 是在