CAMBRIDGE

保险风险与破产

（原书第二版）

〔英〕大卫·迪克森（David C. M. Dickson） 著

李栓明 张志民 译

科学出版社

保险风险与破产

(原书第二版)

〔英〕 大卫 · 迪克森 (David C. M. Dickson) 著

李栓明　张志民　译

科 学 出 版 社

北 京

图字：01-2018-4299 号

内 容 简 介

本书对现代精算风险理论做了全面详尽的概述，主要内容包括概率分布和保险应用、效用理论、保费计算准则、聚合风险模型、个体风险模型、破产理论简介、经典破产理论、高级破产理论和再保险．为了便于教学，书中提供了丰富的例题，每章末附有习题，并在书末提供了详细的解题过程．书中的内容和方法适用于非寿险精算和其他分支学科的教学与研究，同时也适用于精算实务中的应用研究．

本书可作为高等院校金融数学和精算专业及相关专业高年级本科生与研究生风险理论课程的教材，也可供相关科研人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

保险风险与破产：原书第二版/(英)大卫・迪克森(David C. M. Dickson)著；李栓明，张志民译. —北京：科学出版社，2019.3

书名原文：Insurance Risk and Ruin

ISBN 978-7-03-060608-2

Ⅰ. ①保…　Ⅱ. ①大…　②李…　③张…　Ⅲ. ①保险业-风险管理-研究
Ⅳ. ①F840.323

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 033488 号

责任编辑：张中兴　梁　清　孙翠勤／责任校对：彭珍珍
责任印制：张　伟／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2019 年 3 月第一次印刷　印张：17
字数：343 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

献给 Robert 和 Janice

第二版前言

第一版的主要内容是累积索赔额的概率分布与破产理论. 自从第一版出版以来, 破产理论有了快速的发展, 最著名的就是关于 Gerber-Shiu 函数的研究. 因此, 第二版最大的改动是第 8 章, 即高级破产理论, 其中所添加的内容反映了近年来该方向的科研进展.

第二版中另一大改动就是给书中的习题加了完整的答案, 而且也加了一些新的习题, 这样更适合于本科生学习.

第二版中的主要工作是我于2015年下半年在爱丁堡于 Heriot-Watt 大学学术休假时完成的, 再一次对那里的接待表示感谢, 也对我的同事李栓明 (译者之一) 对第 7 章与第 8 章给出的修改意见表示感谢.

大卫·迪克森

2016 年 3 月于墨尔本

第一版前言

本书可作为大学高年级学生首次学习保险风险理论的教材. 与其他教材一样, 本书内容来自于我在位于爱丁堡的赫瑞–瓦特大学与墨尔本大学讲授风险理论所用的讲义. 本书对风险理论中的一些经典问题给予了详细介绍, 尤其是累积索赔额的概率分布与破产理论.

读者只需具备 Grimmett 和 Welsh (1986) 书中讲到的概率知识就可以阅读本书, 特别需要掌握概率分布的一些基本概念以及熟练运用矩母函数与概率母函数. 第 1 章主要是复习读者已熟知的概率分布及相关概念. 读者懂一些随机过程的基本知识对学习第 6~8 章很有帮助, 但随机过程不是必须掌握的. 本书的大部分结果可以用最直接的数学技巧推导得到.

从 20 世纪 80 年代早期开始, 风险理论中出现了大量关于计算方法尤其是递推公式的研究. 本书用一定篇幅讨论递推方法, 但只有应用这些递推算法才能充分理解它们. 读者应该在阅读过程中自己编写一些小的计算程序来运行书中的一些例子与习题.

书中的很多例题与习题都摘自我的讲义与考题, 因此难易程度并不一致. 在书的末尾提供了习题的简要答案, 但大多数习题还需读者深思熟虑后给出完整答案.

在书中每一章结尾都给出了本章主要结果的主要参考文献, 但我并不想给出完备的参考文献. 读者应该在阅读这些文献后去研究其中的文献内容.

本书执笔于 1997 年我在哥本哈根大学学术休假时期, 零零散散地直至 2004 年我在滑铁卢大学与赫瑞–瓦特大学再一次学术休假后才完成. 特别感谢上述三所大学在我学术休假中给予的热情接待和提供的美好的工作环境. 我也要感谢曾经在墨尔本大学就读的学生, 其中 Jeffrey Chee 和 Kee Leong Lum 为本书初稿提出了大量建议, Kwok Swan Wong 设计了 8.6.3 小节中的例题. 最后, 我想特别感谢在爱丁堡的两个人. 第一, 如果没有多年来作为我的老师、导师与同事的 James Gray 教授的鼓励与支持, 本书不可能完成; 第二, 书中的很多想法来自于和 Howard Waters 教授在教学与科研中的合作, 对他的支持与建议献上衷心的感谢.

大卫·迪克森

2004 年于墨尔本

目　录

第 1 章　概率分布和保险应用

1.1　引　　言

本书主要介绍风险理论, 其中重点介绍该领域的两个主要研究内容, 即风险模型和破产理论. 风险理论为一般保险风险研究提供了数学基础, 因此, 本书首先对一般保险风险的特征进行了简短概述. 一般保险这一术语本质上适用于人寿保险或健康保险之外的保险风险, 从而该术语涵盖了个人保险的常见形式, 如机动车辆保险、家庭及财产保险和旅游保险.

首先我们从保险人的角度来分析一机动车辆保险保单通常是如何运作的. 针对这类保单, 假设保险期限为一年, 被保险人在保单覆盖周期的期初向保险人支付一定数量的费用 (保费). 若在这一年内被保险人发生事故, 并且造成了机动车辆的损坏, 针对该损坏引起的维修费用, 被保险人可以依据保单协议向保险人提出索赔. 对于保险人, 此处有两个不确定因素: 被保险人会提出多少次索赔? 如果提出索赔, 那么索赔的金额是多少? 因此, 若保险人计划用概率模型来表示其在该保单下的索赔支出, 则需要用一个变量来模拟索赔的次数, 用另一个变量来模拟每次索赔的金额. 这是一个较为一般的框架, 它适用于一般保险保单中的索赔支出模拟, 而不局限于机动车辆保险. 在后面的章节中, 我们将对其进行更详细的讨论.

在本章我们首先介绍一些分布, 其中大部分分布被普遍应用于保险风险下的索赔次数或单个索赔额的模拟. 然后, 我们介绍混合分布的相关概念和再保险协议的两种简单形式以及它们的数学描述. 最后, 我们考虑有关风险模型的一个重要问题, 即寻找独立同分布的随机变量的和的分布.

1.2　重要的离散型分布

1.2.1　泊松分布

若随机变量 N 服从参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布, 则其分布律如下:

$$\Pr(N = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots.$$

它的矩母函数为

$$M_N(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}, \tag{1.1}$$

概率母函数为

$$P_N(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \exp\left\{\lambda(r-1)\right\}.$$

根据矩母函数可以得到 N 的矩. 例如, 由

$$M_N'(t) = \lambda e^t M_N(t)$$

和

$$M_N''(t) = \lambda e^t M_N(t) + (\lambda e^t)^2 M_N(t)$$

可以得到 $E[N] = \lambda$ 和 $E\left[N^2\right] = \lambda + \lambda^2$, 进而有 $V[N] = \lambda$.

我们将参数为 λ 的泊松分布记作 $P(\lambda)$.

1.2.2 二项分布

若随机变量 N 服从参数为 n 和 q 的二项分布, 其中 n 是正整数且 $0 < q < 1$, 则其分布律如下:

$$\Pr(N = x) = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

它的矩母函数为

$$\begin{aligned} M_N(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (qe^t)^x (1-q)^{n-x} \\ &= \left(qe^t + 1 - q\right)^n, \end{aligned}$$

概率母函数为

$$P_N(r) = (qr + 1 - q)^n.$$

由

$$M_N'(t) = n\left(qe^t + 1 - q\right)^{n-1} qe^t$$

和

$$M_N''(t) = n(n-1)\left(qe^t + 1 - q\right)^{n-2} \left(qe^t\right)^2 + n\left(qe^t + 1 - q\right)^{n-1} qe^t$$

可得

$$E[N] = nq, \quad E[N^2] = n(n-1)q^2 + nq,$$

从而

$$V[N] = nq(1-q).$$

我们将参数为 n 和 q 的二项分布记作 $B(n, q)$.

1.2.3 负二项分布

若 N 服从参数为 $k > 0$ 和 $0 < p < 1$ 的负二项分布, 则其分布律为

$$\Pr(N = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x, \quad x = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中 $q = 1 - p$. 当 k 为整数时, 该分布律可用阶乘表示, 从而使计算变得简单. 然而, 另一种计算分布律的方法是下面的递推公式:

$$\Pr(N = x+1) = \frac{k+x}{x+1} q \Pr(N = x), \quad x = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中初值 $\Pr(N = 0) = p^k$. 无论 k 是否为整数, 上面的计算公式均成立.

矩母函数的计算可由以下等式得到

$$\sum_{x=0}^{\infty} \Pr(N = x) = 1. \tag{1.2}$$

利用上式易知, 对于 $0 < qe^t < 1$ 有

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (1-qe^t)^k (qe^t)^x = 1,$$

并由此可得

$$\begin{aligned}
M_N(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{k+x-1}{x} p^k q^x \\
&= \frac{p^k}{(1-qe^t)^k} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (1-qe^t)^k (qe^t)^x \\
&= \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^k,
\end{aligned}$$

其中 $0 < qe^t < 1$, 或等价地, $t < -\log q$. 类似地, 概率母函数为

$$P_N(r) = \left(\frac{p}{1-qr}\right)^k.$$

通过对矩母函数求导可以得到该分布的矩. 例如, 对于均值和方差, 通过求导可得 $E[N] = kq/p$ 和 $V[N] = kq/p^2$.

由等式 (1.2) 可知

$$\sum_{x=1}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^k q^x = 1 - p^k, \tag{1.3}$$

该结果将在 4.5.1 小节中用到.

我们将参数为 k 和 p 的负二项分布记作 $NB(k, p)$.

1.2.4 几何分布

几何分布是负二项分布的一个特例. 当负二项分布中的参数 k 为 1 时, 该分布即为参数为 p 的几何分布, 其分布律为

$$\Pr(N = x) = pq^x, \quad x = 0, 1, 2, \cdots.$$

由 1.2.3 小节的讨论可知 $E[N] = q/p$, $V[N] = q/p^2$, 并且对于 $t < -\log q$,

$$M_N(t) = \frac{p}{1 - qe^t}.$$

该分布在破产理论中十分重要, 这一点在第 7 章中有所体现.

1.3 重要的连续型分布

1.3.1 伽马分布

若 X 服从参数为 $\alpha > 0$ 和 $\lambda > 0$ 的伽马分布, 则其密度函数为

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 为伽马函数, 定义如下:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

当 α 为整数时, 该分布也称作 Erlang 分布, 此时重复进行分部积分可以得到分布函数

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geqslant 0.$$

为了计算伽马分布的矩和矩母函数, 我们注意到

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1,$$

由此得到

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}. \tag{1.4}$$

对于 n 阶矩, 有

$$E\left[X^n\right] = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{n+\alpha-1}e^{-\lambda x}dx,$$

再由公式 (1.4) 可知

$$E\left[X^n\right] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}. \tag{1.5}$$

特别地, $E\left[X\right] = \alpha/\lambda$, $E\left[X^2\right] = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2$, 并由此可得 $V\left[X\right] = \alpha/\lambda^2$.

应用类似的方法可以得到该分布的矩母函数. 因为

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\lambda-t)x}dx, \tag{1.6}$$

利用公式 (1.4) 可得

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha. \tag{1.7}$$

注意在公式 (1.4) 中, $\lambda > 0$. 因此, 为了将公式 (1.4) 运用到等式 (1.6) 中, 我们要求 $\lambda - t > 0$, 即当 $t < \lambda$ 时, 矩母函数才存在.

通过计算, 我们得到 X 的偏度系数 $Sk[X]$ 为 $2/\sqrt{\alpha}$, 它将在 4.8.2 小节中用到. 该结论来源于偏度系数的定义, 即三阶中心矩除以标准差的立方, 同时需要注意到该分布的三阶中心矩为

$$\begin{aligned} E\left[\left(X-\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3\right] &= E\left[X^3\right] - 3\frac{\alpha}{\lambda}E[X^2] + 2\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) - 3\alpha^2(\alpha+1) + 2\alpha^3}{\lambda^3} \\ &= \frac{2\alpha}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

我们将参数为 α 和 λ 的伽马分布记作 $\gamma(\alpha, \lambda)$.

1.3.2　指数分布

指数分布是伽马分布的一个特例, 它只是在伽马分布的基础上令参数 $\alpha = 1$. 因此, 参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布的密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0.$$

由公式 (1.5) 可知, 该分布的 n 阶矩为

$$E\left[X^n\right] = \frac{n!}{\lambda^n},$$

又由公式 (1.7) 可知矩母函数为

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t},$$

其中 $t < \lambda$.

1.3.3　帕累托分布

若随机变量 X 服从参数为 $\alpha > 0$ 和 $\lambda > 0$ 的帕累托分布, 则其密度函数为

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0.$$

通过对密度函数进行积分, 可以得到分布函数

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha, \quad x \geqslant 0.$$

若该分布的矩存在, 则可由公式

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n f(x) dx$$

直接分部积分得到, 然而, 矩也可以由下述方法得到. 由于密度函数在 $(0, \infty)$ 上的积分等于 1, 有

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha\lambda^\alpha},$$

其中上式在 $\alpha > 0$ 时成立. 为了得到 $E\left[X\right]$, 我们先将其改写为

$$E\left[X\right] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty (x + \lambda - \lambda) f(x) dx = \int_0^\infty (x + \lambda) f(x) dx - \lambda,$$