万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

最·新·版

金榜 金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

叶盛标 主编

考研数学 数学一

考前预测8套卷

- ✓ 精挑细选考前预测8套题
- ✓ 图文并茂的答案详尽解析
- ✓ 高效易记的歌诀方法总结
- ✓ 开启全新的冲刺备考体验

中国出版集团 研究出版社

金榜图书 JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育 海文考研

考研数学

考前预测8套卷

数学一

主编◎叶盛标

中国出版集团 研究出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学考前预测 8 套卷. 数学一 / 叶盛标主编.
—北京:研究出版社, 2016.10
ISBN 978-7-5199-0003-8

Ⅰ.①考… Ⅱ.①叶… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 253042 号

考研数学考前预测 8 套卷·数学一

作　　者	叶盛标 主编
责任编辑	寇颖丹
出版发行	研究出版社
地　　址	北京市东城区沙滩北街 2 号中研楼
邮政编码	100009
电　　话	010—64257481(总编室) 010—64267325(发行部)
网　　址	www.yjcbs.com
电子信箱	yjcbsfxb@126.com
印　　刷	三河市越阳印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	8.5
版　　次	2016 年 10 月第 1 版 2016 年 10 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5199-0003-8
定　　价	28.00 元

使用说明

《考研数学考前预测8套卷》系列分数学一、数学二、数学三三册，每册各含“考研数学考前预测卷”八套。特别在题号的右上角标注了[1]，[2]，[3]，表明该题的适用范围，例如(23)[1]，表明第(23)题只适用于数一考生。未标注者，数一、数二和数三的考生均可以做，考生可以根据个人的学习能力和精力自主选择一册或多册，也就是每位考生最多可做24份试卷。

“以考纲为纲，以课本为本，以思维定势拿高分，以常考题型论输赢！”是本试题集的指导思想。编者非常用心，精心甄选试题。试卷中突出了历年来考试的全部热点，涵盖了“考试大纲”中的全部考点。

本套考前预测卷的题目都有完整详细的答案和解析，在解析和答案的右侧用歌诀这种为考生所喜闻乐见的形式，旁注了解题思路，解题方法，一看就懂，一学就会，便于记忆，便于操作。这是本系列的一大特色。

本套考前预测卷在内部刊印多年，在网上发布多年，经多次修改定稿。不足之处敬请各位同仁和使用本书的考生不吝指正，再版再改，力争更加完美！更加适用！

叶盛标
2016年9月20日
于武昌巡司河畔

目录

考研数学考前预测卷(一)

一、选择题:第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列各题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.

(1) 设函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$,则当 $f(0)=0$ 时, ( )

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值. (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极大值. (D) 不能判断 $f(0)$ 是否为极值.

(2) 设 $f(x)$ 为可导的偶函数,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的法线的斜率为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) -2. (D) 2.

(3)[1,3] 已知 $u_n>0,(n=1,2,3,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛. 若设 $v_n=3u_{2n-1}-u_{2n},(n=1,2,3,\cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ ( )

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 收敛性取决于 $\{u_n\}$ 的具体形式.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A) $z-xy$. (B) $z+xy$. (C) $xy-z$. (D) $z+\dfrac{x}{y}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则下列选项中不正确的是 ( )

(A) $m<n$. (B) $m\geqslant n$.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. (D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多组解.

(6) 设 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必为 ( )

(A) 正定矩阵. (B) 实对称但非正定矩阵.

(C) 正交矩阵. (D) 反对称矩阵.

(7)[1,3] 设随机变量 X,Y 互不相关,它们的分布律分别为

X	0	3
P	0.6	0.4

,

Y	-1	0
P	0.7	0.3

,

则随机事件 $\{X=0\}$ 和 $\{Y=-1\}$ ( )

(A) 互不相容. (B) 相互独立. (C) 互为对立. (D) 没有关系.

(8)[1,3] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，X 服从 $(1,7)$ 内的均匀分布，记 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，由中心极限定理，以下成立的是　　（　　）

（注：$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 4}{\sqrt{3}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\overline{X} - 4}{\dfrac{\sqrt{3}}{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\overline{X} \leqslant 3x + 4\} = \Phi(x)$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \sqrt{3n}x + 4n\right\} = \Phi(x)$.

二、填空题：第 9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)[1] 平面 $x - y + z = 2$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程是________.

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2016} x} \mathrm{d}x =$ ________.

(11)[1] 设 L 为任一封闭的正向曲线，且 $f(u)$ 有连续导数，则 $\displaystyle\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) =$ ________.

(12) 设方程 $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y}$ 确定函数 $z = z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ ________.

(13) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^4 \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}^5 =$ ________.

(14)[1,3] 设随机变量 $X \sim F(n,n)$，则 $P\{X < 1\} =$ ________.

三、解答题：第 15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

证明：(Ⅰ) 存在 $\xi \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$，使得 $f(\xi) = \xi$；

(Ⅱ) 存在 $\eta \in (0, \xi)$，使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

(16) [1]（本题满分 10 分）

求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=x+1$ 的通解.

(17) [1]（本题满分 10 分）

设 $f(x)=1+x(0\leqslant x\leqslant 1)$. 将 $f(x)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

(18) [1]（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 有连续导函数，计算

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $y=x^2+z^2+6, y=8-x^2-z^2$ 所围立体的外侧.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$（k 为常数）. 证明：当 $f(a)<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一根.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵满足 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=-6$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&-12\\0&12\\0&-12\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和用正交变换所得的标准形；

(Ⅱ)求出该二次型.

(22) [1,3]（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

试求 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数.

(23) [1,3]（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

θ 是未知参数，$\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

考研数学考前预测卷(一)答案解析

一、选择题

(1)【答案】B.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=1.$$

强行代入,由 $x=0$,$f(0)=0$ 得 $f'(0)=0$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right]$$

$$=f'(0)+f''(0)=1,$$

$\therefore$ $f''(0)=1>0$,

$\therefore$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值.

选(B).

本题还可用特例法:

强行代入,由 $x=0$,$f(0)=0$ 得 $f'(0)=0$,取 $f'(x)=x$,于是 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$,于是 $f(0)$ 为极小值.

8道选择:
定、计、排、特.

定:定义.
计:计算.
排:排除法.
特:特例法.

强行代入,
定型定法,
以洛为主,
单、夹、积、导.

洛:洛必达法则.
单:单调有界数列有极限.
夹:夹逼定理.
积:定积分的定义.
导:导数的定义.

(2)【答案】A.

【解析】 由题设 $f(-x)=f(x)$,于是 $f'(-x)=-f'(x)$.

又由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1,$$

$\therefore$ $f'(1)=-2$.

于是 $f'(-1)=-f'(1)=2$. $k_{切}\Big|_{x=-1}=2$.

$$k_{法}\Big|_{x=-1}=-\frac{1}{k_{切}\Big|_{x=-1}}=-\frac{1}{2}.$$

选(A).

一元极值,
一驻二判.

特例特法,
瞬间搞定.

导奇原偶,
原偶导奇.

(3)[1,3]【答案】A.

【解析】 由已知 $u_n > 0,(n=1,2,3,\cdots)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(3u_{2n-1}-u_{2n})=2\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})+\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

选(A).

(4)【答案】A.

【解析】 $\left[F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)\right]'_x=(0)'_x$,

$$F'_u\left[1+\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y}\right]+F'_v\left[\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_v\cdot\frac{y}{x}\cdot z-F'_u\cdot xy}{xF'_u+yF'_v},$$

同理,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F'_u\cdot\frac{x}{y}\cdot z-F'_v\cdot xy}{xF'_u+yF'_v}$,

$\therefore x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$. 选(A).

本题也可用特例法.

可取 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=x+\dfrac{z}{y}+y+\dfrac{z}{x}=0$.

(5)【答案】B.

【解析】 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$,$\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵. 又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

$\therefore n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-m>0, n>m$. 这时 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,

$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=m$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多组解. 选(B).

(6)【答案】A.

【解析】 $\because \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解. 于是当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{0}$ 时,有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})>0$,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定,选(A).

(7)[1,3]【答案】B.

【解析】 $E(X)=3\times 0.4=1.2$,$EY=(-1)\times 0.7=-0.7$,

$E(XY)=3\times(-1)P\{X=3,Y=-1\}$,而 X,Y 不相关,

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$,$E(XY)=E(X)E(Y)$,

解得

$$P\{X=3,Y=-1\}=0.28.$$

导数定义,
永恒考题.

复函剥皮,
隐函直导.

特例特法,
秒杀搞定.

线性方程,
三大定势.

ⅰ)齐通:$n-r$ 搞定.
ⅱ)非齐:系秩、增秩相等.
ⅲ)非齐通 = 齐通 + 非齐特.

正定判定,
标、特、主、定.

ⅰ)标:标准形判定.
ⅱ)特:特征值判定.
ⅲ)主:主子式判定.
ⅳ)定:定义判定.

随机变量,
独立相关.

独立 ⇒ 不相关;不相关 ⇏ 独立.

由联合分布与边缘分布间的关系，得(X,Y)的分布律

$X \backslash Y$	-1	0	
0	0.42	0.18	0.6
3	0.28	0.12	0.4
	0.7	0.3	

，

故 X,Y 独立. 选(B).

二维离散，
同一表格.

(8)[1,3]【答案】D.

【解析】 总体 $X \sim U(1,7)$，则

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=4,\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(7-1)^2}{12}=3.$$

由简单随机样本的性质知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与 X 同分布，

$$E(X_i)=4,D(X_i)=3\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由列维-林德伯格中心极限定理，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}}\leqslant x\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-4n}{\sqrt{3n}}\leqslant x\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant\sqrt{3n}x+4n\right\}=\Phi(x),$$

选(D).

常用分布，
正、指、二、均.

正：正态分布；
指：指数分布；
二：二项分布；
均：均匀分布.

随机变量，
要标准化.

二、填空题

(9)[1] 应填：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-4}$.

【解析】$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x-y+z=2,\end{cases}$（交面式方程）

$$\Rightarrow\begin{cases}x=x,\\y=y(x),\text{（参数方程）}\\z=z(x),\end{cases}$$

$$\begin{cases}(z)'_x=(x^2+y^2)'_x,\\(x-y+z)'_x=(2)'_x,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\1-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

在点$(1,1,2)$处有

6道填空，
6道小计.

复函剥皮，
隐函直导.

复函求导要剥皮，
隐函求导直接导.

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2 + 2\dfrac{dy}{dx}, \\ 1 - \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

得 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,1,2)} = -4$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1,2)} = -3$.

所以，曲线在点(1,1,2)处的切线的方向向量为 $\left.\left\{\dfrac{dx}{dx}, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right\}\right|_{(1,1,2)} = \{1, -3, -4\}$.

切线三导，
法线三偏.

$\therefore$ 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{-4}$.

(10)[1,3] 应填：$\dfrac{\pi}{4}$.

求定积分，
换元分部.

【解析】 $I \xlongequal[x=\frac{\pi}{2}-t]{令} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\dfrac{dt}{1+\cot^{2016} t}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2016} t}{1+\tan^{2016} t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2016} x}{1+\tan^{2016} x} dx.$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\tan^{2016} x} + \frac{\tan^{2016} x}{1+\tan^{2016} x}\right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

(11) 应填：0.

【解析】 由于 $P = yf(xy)$，$Q = xf(xy)$，

路径无关，
格林条件.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xf(xy)] = xyf'(xy) + f(xy) = \frac{\partial}{\partial y}[yf(xy)] = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\displaystyle\oint_L f(xy)(y\,dx + x\,dy) = 0$.

(12) 应填：$-\dfrac{z^2}{(x+z)^3}$.

复函剥皮，
隐函直导.

【解析】 $\left(\dfrac{x}{z}\right)_x' = \left(\ln\dfrac{z}{y}\right)_x'$，得 $\dfrac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x+z}$，$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_x' = \left(\dfrac{z}{x+z}\right)_x'$.

$$于是\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x} - z\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}$$

$$= -\frac{z^2}{(x+z)^3}.$$

(13) 应填：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$.

初等变换，
"左行右列".

对 A 实施一次初等变换，相当于用相应的初等方阵去左乘 A；对 A 实施一次初等列变换，相当于用相应的初等方阵去右乘 A. 因而有"左行右列"之说.

【解析】 如果 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

$P^2 = E$，$P^4 = E$，$P^5 = P$，

$\therefore P^4 A P^5 = AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$.

(14) 应填：$\frac{1}{2}$.

数理统计：
三八分布.

【解析】 若随机变量 $X \sim F(n,n)$，

则 $Y = \frac{1}{X} \sim F(n,n)$.

$$\begin{aligned} P\{X < 1\} &= P\{Y < 1\} \\ &= P\left\{\frac{1}{X} < 1\right\} \\ &= P\{X > 1\}. \end{aligned}$$

而 $P\{X < 1\} + P\{X > 1\} = 1$，

$\therefore P\{X < 1\} = \frac{1}{2}$.

三、解答题

(15)**【证明】** (ⅰ) 设 $F(x) = f(x) - x, x \in [0,1]$.

问题证明，
结论开始.

由于 $F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$，

$F(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$，

由零点定理，存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得 $F(\xi) = 0$，即有 $f(\xi) = \xi$.

(ⅱ) 设 $G(x) = (f(x) - x)e^{-x}$，

由于 $G(0) = 0, G(\xi) = 0$. $G(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可微，且

$$G'(x) = [(f'(x) - 1) - (f(x) - x)]e^{-x},$$

由罗尔定理，在 $(0,\xi)$ 内至少存在一点 η，使得 $G'(\eta) = 0$，即有 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

欧拉方程，
指数变换.

(16)[1]**【解析】** 令 $x = e^t$，$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}$，$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}$，

形式优美数欧拉，
指数变换乐开花：
先齐而后非，
分分钟搞定它！

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left[\frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}\right]'_x = \left[\frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}\right]'_t \cdot t'_x$$

$$= \frac{e^t \frac{d^2 y}{dt^2} - e^t \frac{dy}{dt}}{e^{2t}} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

$$= \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{e^{2t}},$$

代入原方程，得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^t + 1,$$

二阶线性，三大定势.

这是二阶常系数线性非齐次微分方程，先解 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$.

特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = 0, r_1 = 1, r_2 = 2.$$

ⅰ) 齐通：一元二次方程搞定.
ⅱ) 非齐特与右端修正同名.
ⅲ) 非齐通 = 齐通 + 非齐特.

于是

$$Y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}\text{（齐通）}.$$

再分别求 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^t$(1) 的特解 y_1^* 和 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$(2) 的特解 y_2^*，令

$$y_1^* = Ate^t, y_2^* = B.$$

代入(1),(2) 式整理得 $A = -1, B = \frac{1}{2}$，$\therefore y_1^* = -te^t, y_2^* = \frac{1}{2}$.

$$y^* = y_1^* + y_2^* = -te^t + \frac{1}{2}.$$

$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^t + 1$ 的通解为

$$\underset{\text{非齐通}}{y} \underset{=}{=} \underset{\text{齐通}}{C_1 e^t + C_2 e^{2t}} \underset{+}{+} \underset{\text{非齐特}}{\frac{1}{2} - te^t}.$$

于是原方程的通解为：

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2} - x\ln x.$$

(17)[1]**【解析】** 先对 $f(x)$ 进行偶延拓，接着进行周期延拓，两次延拓后的函数为 $(-\infty, +\infty)$ 内以 2 为周期的偶函数.

傅氏系数，积分搞定.

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 (1+x)dx = 3.$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 (1+x)\cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2}, & n = 1,3,\cdots \\ 0, & n = 2,4,\cdots \end{cases}$$

$b_n = 0, (n = 1,2,\cdots)$，则

$$1 + x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\cdots\right)(0\leqslant x\leqslant 1).$$

令 $x=0$,得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$,令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=s$,

于是

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}s,$$

$$\therefore s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(18)[1]**【解析】** 设 Ω 是 Σ 所围的区域,它在 xOz 平面上的投影为 $x^2+z^2\leqslant 1$. 由高斯公式

$$I=\iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2+6}^{8-r^2}r\mathrm{d}y=\pi.$$

两曲积分,
三大公式.

两曲积分,
同级升级.

例如:曲线积分化为定积分,为同级搞定;曲线积分用格林公式化为二重积分,为升级搞定.

(19)**【解析】** $\because f(a)<0,\therefore a-\frac{f(a)}{k}>a$,

在区间 $\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理.

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=f'(\xi)\left[a-\frac{f(a)}{k}-a\right]$$
$$=f'(\xi)\left[-\frac{f(a)}{k}\right],\xi\in\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right).$$

问题证明,
结论开始.

$\because f'(\xi)>k,\therefore f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)>-f(a)$,

$\therefore f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$.

中值定理,
边值搞定.

$f(a)<0,f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$,由零点定理,在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内至少存在一点 η,使得 $f(\eta)=0$.

又 $f'(x)>0,f(x)\uparrow$,所以在区间 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一个根.