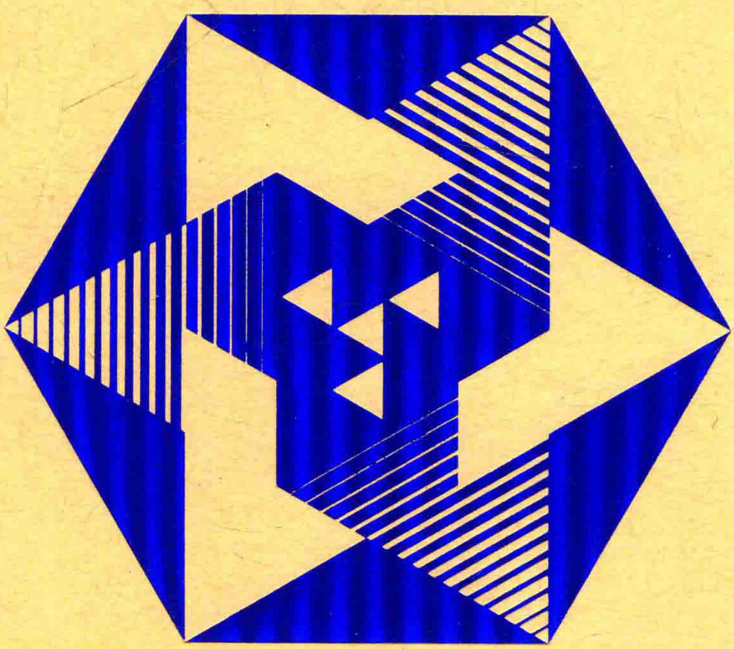
“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要 第5版 第2册

Elements for Functions of a Real Variable and Functional Analysis

王声望 郑维行 编



高等教育出版社

“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要 第5版 第2册

Elements for Functions of
a Real Variable and Functional Analysis

王声望 郑维行 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第 5 版除了尽量保持内容精选、适用性较广外，尽力做到可读性强，便于备课、讲授及学习。修订时吸收了教学中的建议，增添了少量重要内容、例题与习题，一些习题还给出提示。

全书分两册。第 1 册包含集与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分与函数空间 L^p 五章，第 2 册介绍距离空间、巴拿赫空间与希尔伯特空间、巴拿赫空间上的有界线性算子，以及希尔伯特空间上的有界线性算子四章。

本书每章附有小结，指出要点所在，并给出参考文献，以利进一步研习需要。习题较为丰富，供教学时选用。

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校数学类专业的教学用书，也可作为有关研究生与自学者的参考书。学习本书的预备知识为数学分析、线性代数、复变函数的主要内容。

图书在版编目（CIP）数据

实变函数与泛函分析概要 . 第 2 册 / 王声望 , 郑维行编 . -- 5 版 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2019. 5
ISBN 978-7-04-051235-9

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①王… ②郑… Ⅲ. ①实变函数 - 高等学校 - 教材②泛函分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 011979 号

策划编辑	田　玲	责任编辑	田　玲	特约编辑	刘　荣	封面设计	张申申
版式设计	徐艳妮	责任校对	窦丽娜	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	天津嘉恒印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	14.75	版　　次	1990 年 5 月第 1 版
字　　数	250 千字		2019 年 5 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2019 年 5 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	28.60 元

物 料 号　51235-00

第5版前言

本书自2010年第4版出版以来至今已逾八年。很多老师建议能修订一次为好，多听取一线教师的建议，修正错误，改进论述，以利莘莘学子学习并适应教改的新形势。高等教育出版社与上述意见不谋而合，经与编者协商，决定2017年5月26日在南京召开一次教材修订会议。同时会外的一些热心教授与读者也提供了许多宝贵建议，于是编者有了修改依据。修订工作持续了数月，凡有错误或不当之处，一经指出，即行改正。我们还对一些内容的编排作了变动，对一些重要定理、概念，补充了若干例子以增进其理解与应用，各章习题均重新编序。此外，对很多重要内容给予引申，指出相关文献以供进一步学习参考。总之，一切为了读者着想。

在此我们对南京大学朱晓胜、宋国柱、梅加强、徐兴旺、栗付才、师维学、李军各位教授与魏顺吉、刘泽华、王童瑞、陈谋、王少东同学，南京师范大学徐焱、张吉慧教授、华中师范大学彭双阶教授以及高等教育出版社田玲和刘荣同志一并表示衷心感谢。正是由于他们的宝贵意见与热心协助，修订工作得以顺利完成。
虽经一定努力，仍恐有新的错误与不当之处，希望广大读者与专家不吝指正。

编　者

2018年7月于南京

第4版前言

本书是在第3版的基础上修订编写而成。自2005年第3版以来，收到很多读者提出的宝贵意见，本校师维学、代雄平、栗付才、钟承奎几位教授及南京大学2006届数学系的同学在教学和使用过程中，都对本书提出了不少有益的意见和建议。本次修订在充分吸收这些意见和建议的基础上，考虑到现行学时的安排，在篇幅上进行了较大的调整，增加了关于依测度基本列概念与积分列的勒贝格-维它利定理，删去广义函数、解析算子演算、酉算子、正常算子的谱分解定理等内容，习题量进行了扩充以供选用，一些要点给予特别提示以利教学，对理论的论述、安排与例证均进行了推敲使其可读性更强，便于备课、讲授与学习。同时，还注意吸取国内外一些新教材的长处。

本书第1版时的初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张奠宙、徐荣权、俞致寿教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门审阅了手稿，函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志也协助阅读了手稿，并参加了部分修改工作。在此谨向所有对本书提出意见和建议的专家、广大教师与读者表示衷心感谢，书中一丝一毫的改进均是与他们分不开的。虽然我们作了一定的努力，但书中的谬误想必难免，盼望专家与读者们不吝指正。

编　者

2010年10月

第 3 版前言

本书自第 2 版出版以来，经过不少学校教师使用，普遍感到基本上能适合教学要求，但也提出一些宝贵建议。我们在这次修订时认真地参考这些建议作了修改。例如，在内容上删去了非线性泛函部分，增加了 Banach 空间解析算子演算，对 Hilbert 空间自伴紧算子知识作了较详细阐述。此外，对一些不恰当之处也进行了修正，将不少术语改为通行的用词，如将直交改为正交，共轭空间改为对偶空间，自共轭算子改为自伴算子等等。由于水平所限，时间较紧，错误、遗漏之处在所难免，敬希广大读者不吝赐教。在此我们要感谢高等教育出版社王瑜、李蕊和崔梅萍等编辑的热心支持与很多教师、读者的宝贵建议，还要感谢 ATA 编辑部朱燕在打印中的辛勤劳动。

编　者

2004 年 10 月于南京

目　录

— 第 2 册 —

第

2

册

第六章 距离空间

§1 距离空间的基本概念

在前面几章中,我们陆续讨论了 n 维欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$,L^2 空间,L^p 空间等.以 $\mathbf{R}^n$ 为例,我们在其中定义了**距离** ρ(见第一章 §4),它满足下面三个条件:

(i) **非负性**:对任何 $x,y \in \mathbf{R}^n$, $\rho(x,y) \geqslant 0$,而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**:对任何 $x,y \in \mathbf{R}^n$,有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**:对任何 $x,y,z \in \mathbf{R}^n$,有

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

如果我们仔细分析一下 $\mathbf{R}^n$ 中的许多重要内容(如收敛)与结论(如极限的唯一性),就可以发现,实质上它们仅与距离 ρ 的条件(i)—(iii) 有关.再以第五章中介绍过的空间 $L^p(F)$ (F 为可测集,$1 \leqslant p < \infty$) 为例,首先在其中定义了范数,然后利用范数定义了距离:

$$\rho(x,y)=\left(\int_F |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \quad (x,y \in L^p(F)).$$

读者不难发现,$L^p(F)$ 中的收敛以及与之有关的很多结论,实质上也与其中的距离满足条件(i)—(iii) 有关.因此,为了在一般的非空集合中引进收敛,一个可行的办法就是先引进距离.为了引进距离,则应以条件(i)—(iii) 为基础,因它们反映了事物的本质.

1.1 距离空间的定义及例

定义 1.1 设 X 为一非空集合,如果对于 X 中任给的两个**元素** x,y,均有一个确定的实数,记为 $\rho(x,y)$,与它们对应且满足下面三个条件:

(i) **非负性**:$\rho(x,y) \geqslant 0$, $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**：$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$，这里 z 也是 X 中的任意一个元素，

则称 ρ 是 X 上的一个**距离**，而称 X 是以 ρ 为距离的**距离空间**，记为(X,ρ). 条件(i)—(iii) 称为**距离公理**. 距离空间中的元素又称为**点**. 在不会引起混淆的情况下，我们将(X,ρ) 简记为 X.

现在设 X 为一距离空间，以 ρ 为距离. 又设 A 为 X 的一非空子集，则 A 按距离 ρ 也是一距离空间，称它为 X 的**子空间**. 如果 $A \neq X$，则称它为 X 的**真子空间**.

读者将会看到，一般的距离空间有很多与 $\mathbf{R}^n$ 相似的性质，但也有很多实质的不同，这些不同更应引起我们的重视.

其次，在任何一个非空集合 X 上，我们都可以定义距离. 例如，对任一 $x \in X$，我们规定 $\rho(x,x) = 0$，而对任给的 $y \in X$，只要 $y \neq x$，便规定 $\rho(x,y) = 1$. 显然 ρ 满足距离的全部条件，因此 X 按照距离 ρ 是一个距离空间，我们称它为**离散的**距离空间.

例 1（第一章 §4） n **维欧氏空间** $\mathbf{R}^n$

记 $\mathbf{R}^n$ 为所有 n 维实向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 构成的集合. 我们已经指出，在 $\mathbf{R}^n$ 中如果定义向量 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与向量 $y = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 之间的距离如下：

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\right)^{1/2}, \tag{1}$$

则 ρ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中，我们没有逐一验证这些条件. 为清楚起见，今以三角不等式为例加以验证. 为此先证明**柯西**(A. Cauchy) **不等式**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{2}$$

其中 $a_k, b_k (k = 1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 任取实数 λ，则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

右端是 λ 的二次三项式. 上述不等式表明它对 λ 的一切实数值都是非负的，故其判别式不大于零，即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

柯西不等式(2)成立. 由这个不等式得到

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，并在上述不等式中令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k(k=1,2,\cdots,n)$ 便得到三角不等式：

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此 $\mathbf{R}^n$ 按距离(1)是一个距离空间.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中，我们还可以引入如下的距离：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|, \tag{1'}$$

那么 ρ_1 也满足距离的全部条件，故 $\mathbf{R}^n$ 按照距离 ρ_1 也是一个距离空间(见本章习题).

例 1 告诉我们，在一个集合中定义距离的方式不是唯一的. 一般来说，如果在一个非空集合 X 中定义了距离 ρ 与 ρ_1，当它们不同时，我们则应如实地将 (X,ρ)、(X,ρ_1) 作为两个不同的距离空间来对待.

类似于例 1 中的 $\mathbf{R}^n$，我们还可以考虑复数的情形. 假设 $\mathbf{C}^n$ 是由所有 n 维复向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

构成的集合. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，我们仍旧用(1) 定义它们之间的距离，即

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2}.$$

与实数情形类似，可以证明复数情形的柯西不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2,$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为复数.

由柯西不等式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}.$$

于是又可得到三角不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

这里 x,y,z 均属于 $\mathbf{C}^n$. 因此按照(1)定义的距离 ρ, $\mathbf{C}^n$ 是一个距离空间.

今后如不特别声明,均取(1)作为 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 中的距离.

例 2　空间 $C[a,b]$

考察定义在 $[a,b]$ 上所有实(或复)连续函数构成的集合 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \tag{3}$$

则 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间. 距离公理中的条件(i)与(ii)是明显的. 我们仅验证三角不等式. 设 $x,y,z\in C[a,b]$, 则

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

三角不等式成立. 故 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 3　空间 $L^p(F)$ $(1\leqslant p<\infty, F\subset\mathbf{R}$, 且为可测集$)$

在第五章中,我们已比较详细地讨论了空间 $L^p(F)$, 这里不打算重复. 大家知道,两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p(F)$ 中视为同一元素. 现在仅仅指出,如果对 $L^p(F)$ 中任意两个元素 x,y, 令*

$$\rho(x,y)=\left(\int_F|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}, \tag{4}$$

则 ρ 满足距离公理的全部条件(见第五章), 因此 $L^p(F)$ 按照(4)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 4　空间 $L^\infty(F)$

在第五章中也已介绍了空间 $L^\infty(F)$. 现在我们对它进行比较详细的讨论,主要目的是证明按照由下面的(5)式定义的距离 ρ, $L^\infty(F)$ 是一个距离空间.

称定义在可测集 F 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是**本性有界**的,如果存在 F 的某个零测度子集 F_0, 使得 $x(\cdot)$ 在集合 $F\backslash F_0$ 上有界. F 上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty(F)$ 表示,几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素. 对 $L^\infty(F)$ 中任意两个元素 x,y, 令

* 在第 2 册中,所有积分符号均改为与微积分中黎曼积分的符号一致,而与第 1 册中使用的积分符号不同,特此声明.

$$\rho(x,y) = \inf_{\substack{mF_0=0 \\ F_0\subset F}} \left\{ \sup_{t\in F\setminus F_0} |x(t) - y(t)| \right\}$$

$$= \operatorname{ess\,sup}_{t\in F} |x(t) - y(t)|. \tag{5}$$

需要验证 ρ 满足距离的三个条件.我们也只验证三角不等式.

设 $x,y,z \in L^\infty(F)$.任给 $\varepsilon > 0$,存在 $F_1,F_2 \subset F, mF_1 = mF_2 = 0$, 使得

$$\sup_{t\in F\setminus F_1} |x(t) - z(t)| \leqslant \rho(x,z) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in F\setminus F_2} |z(t) - y(t)| \leqslant \rho(z,y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(F_1 \cup F_2) = 0$, 于是

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leqslant \sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)} |x(t) - y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)} |x(t) - z(t)| + \sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)} |z(t) - y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in F\setminus F_1} |x(t) - z(t)| + \sup_{t\in F\setminus F_2} |z(t) - y(t)| \\ &\leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) + \varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$,便得到

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

即三角不等式成立. 因此按照(5) 中定义的距离 $\rho, L^\infty(F)$ 确为一个距离空间.

例 5　空间 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$

令 l^p 是由满足下列不等式的实(或复)数列 $x = \{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 构成的集合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty.$$

我们的目的是证明 l^p 按照下面的(9) 式定义的距离为距离空间. 为清楚起见,先设 $1 < p < \infty$.在第五章 §1 的不等式 $u^\alpha v^\beta \leqslant \alpha u + \beta v (u \geqslant 0, v \geqslant 0)$ 中令 $\alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q}$,这里 p,q 互为相伴数, 于是

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q}. \tag{6}$$

任取 l^p 中的元素 $x = \{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 l^q 中的元素 $y = \{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$.对于任意给定的 $n = 1,2,3,\cdots$, 取

$$u=\frac{|\xi_n|^p}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p},\quad v=\frac{|\eta_n|^q}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q}.$$

将以上的 u,v 代入(6) 中,并对 n 求和再经过简单计算,便有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

再将上式左端分母中的 k 换成 n,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{1/q}. \tag{7}$$

我们也称(7)为**赫尔德(O. Hölder)不等式**.

今任取 l^p 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 由不等式

$$|a+b|^p\leqslant[\,|a|+|b|\,]^p\leqslant[2\max\{|a|,|b|\}]^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$$

(这里 a,b 均为实(或复)数)可知,$\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\}$ 也含于 l^p. 于是$\{|\xi_1+\eta_1|^{p/q},|\xi_2+\eta_2|^{p/q},\cdots,|\xi_n+\eta_n|^{p/q},\cdots\}$ 含于 l^q. 由赫尔德不等式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|\,|\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p&=\sum_{n=1}^{\infty}[(|\xi_n+\eta_n|)|\xi_n+\eta_n|^{p-1}]\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}[(|\xi_n|+|\eta_n|)|\xi_n+\eta_n|^{p/q}]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\xi_n+\eta_n|^{p/q}+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|\,|\xi_n+\eta_n|^{p/q}\\&\leqslant\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q},\end{aligned}$$

因此

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{8}$$

如果 $p=1$，不等式(8)显然成立.因此我们在应用不等式(8)时，既可设 $p>1$，也可设 $p=1$.称(8)为**闵可夫斯基(H.Minkowski)不等式**.

在 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中定义如下的距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{9}$$

利用闵可夫斯基不等式可以证明三角不等式，方法与例 3 完全类似，故从略.于是 ρ 满足距离的条件(iii).至于距离的条件(i)、(ii)，则显然.因此 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 按照(9)中定义的距离 ρ 是一个距离空间.

当 $p=1$ 时，我们将 l^1 简记为 l.

例 6　空间 l^∞

令 l^∞ 是由一切有界的实(或复)数列构成的集合.任取 l^∞ 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$.令

$$\rho(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n|. \tag{10}$$

不难证明(10)中定义的 ρ 满足距离的全部条件，因此 l^∞ 按照(10)中定义的距离 ρ 是一个距离空间.

1.2　距离空间中的收敛及其性质

这一章开始时，我们就已指出，在一非空集合中引进距离后，便可以引进收敛.现在就着手引进收敛的定义并讨论与它有关的一些性质.

定义 1.2　设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个**点列**(或称**序列**)，这里 $n=1,2,3,\cdots$.如果存在 X 中的点 x_0，使得当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x_0)\to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**于 x_0，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \quad 或 \quad \{x_n\}\to x_0 \quad (n\to\infty).$$

有时也简记为

$$x_n\to x_0 \quad (n\to\infty).$$

称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

定理 1.1　设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的收敛点列，则下列性质成立：

(i) $\{x_n\}$ 的极限唯一；

(ii) 对任意的 $y_0\in X$，数列 $\{\rho(x_n,y_0)\}$ 有界.

证　(i) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，又收敛于 y_0.由关系式

$$\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_n,y_0)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

可知，$x_0=y_0$，$\{x_n\}$ 的极限唯一.(i) 成立.

(ii) 现设 y_0 是 X 中任一给定的点.因数列 $\{\rho(x_n,x_0)\}$ 收敛，故有界，于是存