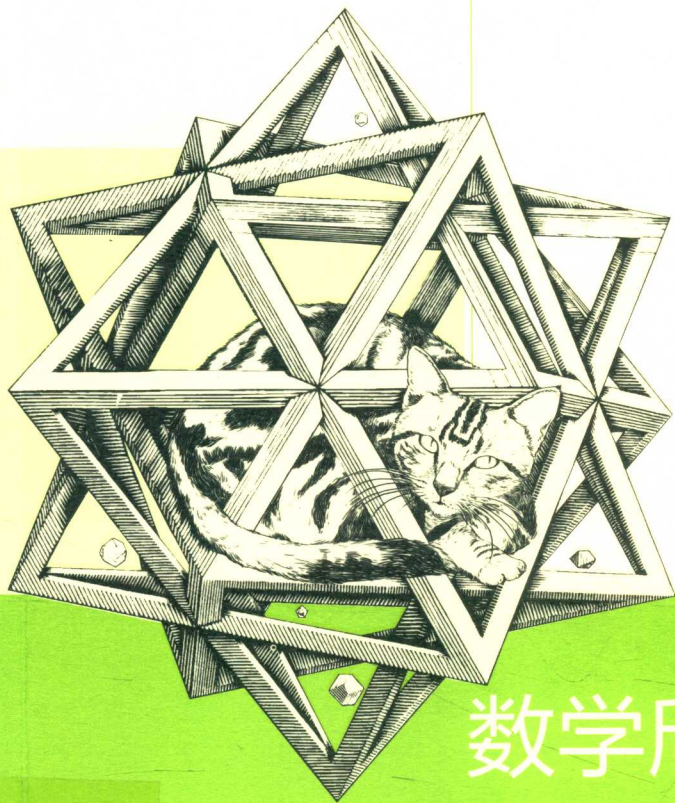


$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

15



数学欣赏

论数与形

— H. 拉德马赫 O. 特普利茨 著
— 左平 译

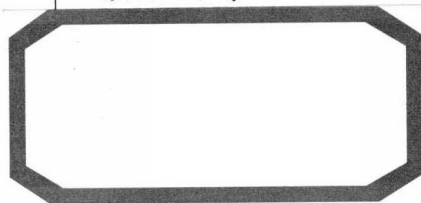


高等教育出版社

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

15



数学欣赏

论数与形

— H. 拉德马赫 O. 特普利茨 著

— 左平 译

RFID

高等教育出版社·北京

内容提要

本书搜集了有关数与形的各种问题的数学珍品，它们都是一些大数学家偶然离开深刻的理论领域，从含有数学的一些简单现象出发，提出问题、分析问题、巧妙而精准地解决问题，从而创造出来的短篇数学杰作。

阅读和理解本书中的任何一篇，都不需要许多数学理论和知识，只需要在推理时比通常的阅读更积极主动些。如果做到这样，读者将得到数学思维的锻炼，欣赏到数学的无比美妙。

本书适合大学生、高中生、中学数学老师，特别是爱好数学并愿做数学思考者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学欣赏：论数与形 / (德) H. 拉德马赫, (德) O. 特普利茨著；左平译. -- 北京：高等教育出版社，
2017.7

ISBN 978-7-04-047776-4

I. ①数… II. ①H… ②O… ③左… III. ①中学 - 普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 115573 号

数学欣赏

SHUXUE XINSHANG

策划编辑 王丽萍
责任校对 陈旭颖

责任编辑 吴晓丽
责任印制 尤静

封面设计 姜磊

版式设计 于婕

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京佳信达欣艺术印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 17
字 数 230千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2017年7月第1版
印 次 2017年7月第1次印刷
定 价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 47776-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

林开亮 曲安京

王善平 徐 佩

姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹

奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘,吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话:“有谁不想揭开数学未来的面纱,探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学思想领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”中国有句古话:老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界,我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下,如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多,但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷,我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如,希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期;克莱因的《数学讲座》是他在19世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的,他的报告与当时的数学前沿密切相关,对美国数学的发展起了巨大的作用;李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解;拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献,而且还是分析概率论的奠基人,他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新,写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点,良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体,数学的各个领域从来就是不可分割的,我们要以整体的眼光看待数学的各个分支,这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外,我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版,希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是:该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论,具有历史价值,有趣且易懂,它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学,它不仅具有科学性,并且也具有

艺术性。罗素说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性，数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美，它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感？阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真
2012 年秋于北京

序

本书的合作者奥托·特普利茨 (Otto Toeplitz), 在 1939 年春离开德国后, 于 1940 年 2 月 19 日在耶路撒冷逝世。特普利茨是在哥廷根时作为大卫·希尔伯特 (David Hilbert) 的弟子而开始其学术生涯的, 其时他在基尔, 随后又在波恩任教授。他的科研工作集中围绕在积分方程论和无限多元函数论方面, 这是他长期从事并做出贡献的领域。

本书的梗概是当特普利茨在基尔, 我在汉堡大学时, 在我们之间的频繁交流中产生的。有关本书的课题与内容, 我们两人都向广大听众反复讲述过。我们相互切磋, 多次改写了手稿。特普利茨对数学史有浓厚兴趣, 这在现在的版本中仍然可以看出。我怀着愉快的心情, 回忆起 1929 年夏, 我们在波恩最后一起润饰了德文手稿的日子。对于现在这个英文版, 我可以肯定特普利茨是会感到欣喜和自豪的。因为他常常提及希望能有这样一个英文版。

我要感谢译者赫伯特·朱克曼 (Herbert S. Zuckerman) 教授艰辛而卓越的工作, 我不只赞赏他对德文版本的准确翻译, 而且我还认为, 通过他的译文, 他引进了许多更符合英语读者习惯的论述。他还为本书增加了两篇 (第 15 篇和第 28 篇), 它们都忠实地反映了原书的写作精神。

感谢我的朋友 Emil Grosswald, D. H. Lehmer 和 Herbert Robbins 的帮助和宝贵的建议, 同时感谢出版者友好的合作。

汉斯·拉德马赫 (Hans Rademacher)

1956 年, 美国费城

导言

数学, 由于它的语言、记法以及看上去显得奇特的符号, 就像一堵高墙, 把它和周围世界隔开了。那座墙的背后在干什么, 就其大部分来说, 外行人是感到神秘的。他设想的是一些枯燥乏味的数字, 是受铁的法则制约的了无生气的机械结构。另一方面, 这座墙往往极大地限制了躲在墙里的人的视野。他惯于用特有的尺码来度量一切数学对象, 并且还自鸣得意, 以为没有什么褻渎的东西会进入他的领地。

拆毁这座墙, 用一般人也能欣赏的方式来介绍数学是可能的吗? 难道不能使数学的欣赏扩大到那些“数学天才”的小圈子以外吗? 如果数学天才只是指那些富有才华、有新的数学发现的人, 那么确实只是极少数。同样的道理, 在那些能作乐曲的人们中, 只有极少数具有音乐天才。然而, 懂音乐, 甚至能仿制乐曲, 或者至少能欣赏音乐的人, 却比比皆是。我们相信, 能够理解简单的数学思想的人, 相对来说, 不会少于通常所谓的音乐爱好者, 并且只要能去掉人们从幼年时代的经验中大量形成的对数学的成见, 那么他们的兴趣就会大大提高。

这里各篇的目的在于表明, 只要能抓住实质把基本的数学思

想介绍清楚,对数学的成见就可消除。本书试图为包含数学的各种现象,为数学本身,并为其所具有的固有价值举出一些例子。

设法向不懂数学的人介绍数学是常有之事,不过通常的做法总是强调数学在人们所从事的其他领域中的用途,竭力确保读者的理解和兴趣,不厌其烦地叙述数学在技术和其他方面的好处,并用很多例子加以说明。另一方面,有许多有关数学游戏方面的书籍。虽然这些书搜集了不少有趣的材料,但它们恰恰严重地歪曲了数学的真实面貌。最后,另外一些书籍是按一般哲学的合理性来讨论某些数学的基础的。阅读以后各篇并对绝对的纯数学有初步爱好的读者,自然会把他的注意力放在这样一种数学的认识论的估价上去。但这好像是我们对数学附加了一种外来的价值,是根据它本身以外的标准来判断它的价值。

在以后各篇中,我们将不可能论证在数学本身范围内所提出的一些概念的意义。我们不能考虑数学内部的应用,就是说,把数学一个领域的概念和结果,应用于数学的其他领域。这意味着,我们必须略去数学体系中某些极本质的东西:渗入这个体系的各个方向的巨大而错综复杂的联系。这种省略在我们方面是极不愿意的,因为重大的数学发现往往就在于揭示这种十分重要的相互关系。但是,为了揭示这种相互关系,我们需要做长期的多方面的准备,而且对读者来说,还必须进行全面的训练。这些都不是我们这里打算做的。

换句话说,我们介绍的重点,不是那种其他学科能向一般人揭示的事实,而是包含数学的现象的一些类型、提出问题的方法以及解决问题的方法。毫无疑问,若要理解重大的数学成果,是需要有渊博的理论、长期的练习和坚持不懈的努力的。对于音乐也是如此。第一次参加音乐会的人,难以欣赏巴赫(Bach)的《赋格的艺术》,也不能立即具体了解交响乐的结构。但除了大型的音乐作品外,还有一些较小的然而确实是绝妙的片段,而它们所含的精神却能使人心领神会。我们打算从广阔的数学领域中选取这样一些“较小的片段”:一系列的逐一都是完整的课题,每一题的阅读和了

解不用超过一小时。这些题目都是独立的。因此阅读任一篇时,不需要记住以前读过了什么,也不要求读者去回忆他青年时期可能不得不学的那些东西。用不着对数和三角学。也没有提到微积分。几何上全等的理论,以及代数中的乘法将会逐渐被带回到读者的记忆中来;这就是一切。

至于一件小的音乐作品,它也许不只是依靠使它得以展开的乐谱线才显得美妙的。主旋律的一点细微变化,一个意外的变调都能成为全曲的高潮。在类似的意义下,我们的读者在基本思想出现明确变调以前,似应认真仔细“倾听”问题的基本目的,它的发展,以及用以说明每个主题的最初的几个例子。在进行推理时,他应当比通常在阅读时所要求的更积极主动些。如果能做到这些,他将发现,掌握每一个题目的基本思想并不困难。这时他会恍然大悟于一些伟大思想家所创作的东西。当时他们偶然地离开了他们深刻的理论成果的领域,从简单的起点出发,创作了一种小型独立的艺术作品,即短篇数学杰作。

《数学概览》(Panorama of Mathematics)

(主编: 严加安 季理真)

- 9 787040 351675 > 1. Klein 数学讲座 (2013)
(F. 克莱因 著/陈光还、徐佩 译)
- 9 787040 351828 > 2. Littlewood 数学随笔集 (2014)
(J. E. 李特尔伍德 著, B. 博罗巴斯 编/李培廉 译)
- 9 787040 339956 > 3. 直观几何 (上册) (2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森 著/王联芳 译, 江泽涵 校)
- 9 787040 339949 > 4. 直观几何 (下册) 附亚历山德罗夫的《拓扑学基本概念》
(2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森 著/王联芳、齐民友 译)
- 9 787040 367591 > 5. 惠更斯与巴罗, 牛顿与胡克:
数学分析与突变理论的起步, 从渐伸线到准晶体 (2013)
(B. И. 阿诺尔德 著/李培廉 译)
- 9 787040 351750 > 6. 生命·艺术·几何 (2014)
(M. 吉卡 著/盛立人 译, 张小萍、刘建元 校)
- 9 787040 378207 > 7. 关于概率的哲学随笔 (2013)
(P.-S. 拉普拉斯 著/龚光鲁、钱敏平 译)
- 9 787040 393606 > 8. 代数基本概念 (2014)
(I. R. 沙法列维奇 著/李福安 译)
- 9 787040 416756 > 9. 圆与球 (2015)
(W. 布拉施克 著/苏步青 译)
- 9 787040 432374 > 10.1. 数学的世界 I (2015)
(J. R. 纽曼 编/王善平、李璐 译)
- 9 787040 446401 > 10.2. 数学的世界 II (2016)
(J. R. 纽曼 编/李文林 等译)
- 9 787040 436990 > 10.3. 数学的世界 III (2015)
(J. R. 纽曼 编/王耀东、李文林、袁向东、冯绪宁 译)
- 9 787040 450705 > 11. 对称的观念在 19 世纪的演变: Klein 和 Lie (2016)
(I. M. 亚格洛姆 著/赵振江 译)
- 9 787040 454949 > 12. 泛函分析史 (2016)
(J. 迪厄多内 著/曲安京、李亚亚 等译)
- 9 787040 467468 > 13. Milnor 眼中的数学和数学家 (2017)
(J. 米尔诺 著/赵学志、熊金城 译)
14. 数学简史 (2017)
(D. J. 斯特洛伊克 著/胡滨 译)
- 9 787040 477764 > 15. 数学欣赏: 论数与形 (2017)
(H. 拉德马赫, O. 特普利茨 著/左平 译)

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

目录

1. 素数序列	1
2. 曲线通行网	7
3. 一些极大问题	11
4. 不可通约线段或无理数	17
5. 垂足三角形的一个极小性质	23
6. 前篇极小性的第二个证法	27
7. 集合论	33
8. 一些组合问题	41
9. 华林问题	53
10. 闭自交曲线	65
11. 数的素因子分解是唯一的吗?	71
12. 四色问题及五色定理的证明	81
13. 正多面体	91
14. 毕达哥拉斯数和费马大定理	97

15. 算术 - 几何平均值定理	107
16. 有限点集的覆盖圆	117
17. 用有理数逼近无理数	125
18. 利用连杆产生直线运动	133
19. 完全数	143
20. 欧拉关于素数无限性的证明	151
21. 极大问题的基本原理	155
22. 一定周长下面积最大的图形	159
23. 循环小数	165
24. 圆的一个特性	181
25. 等宽度曲线	185
26. 初等几何作图中圆规的必要性	201
27. 数 30 的一个性质	211
28. 邦塞不等式的一个改进	219
附录	225
《数学欣赏》: 历久弥新的通俗数学经典	237

1. 素数序列

6 等于 2 乘 3, 但 7 不能同样写作两个因子之积, 所以 7 叫作素数 (或称质数). 一个素数是一个正整数, 它除了本身和 1 以外, 不能写作两个较小的因子之积. 5 和 3 也是素数, 但 4 和 12 不是, 因为 $4 = 2 \cdot 2$, 而 $12 = 3 \cdot 4$. 像 4 和 12 这种可以分解因子的数叫作合数. 数 1 不是合数, 但它又和其他数是如此不同, 因而通常也不把它看成素数; 因此 2 是第一个素数, 开头一些素数是:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots

一眼就可以看出, 这个序列不符合任何一种简单规律, 实际上, 素数序列的构造是非常复杂的.

一个数可以逐步分解, 直到它化为若干素数之积. 像 $6 = 2 \cdot 3$ 立即表示为两个素数之积, 而 $30 = 5 \cdot 6$, 又 $6 = 2 \cdot 3$, 得出 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, 为三个素数之积. 同样, 24 有四个素因子 ($24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$), 其中恰好有三个因子是相同的素数 2. 对于一个素数来说, 只能写成 $5 = 5$, 即一个单独素数之积. 用逐步分解的方法, 除 1 外的任何正整数都可以写作素数之积. 因此, 素数可以看作是全部正整数序列的基础.