多维有限元逐点超收敛分析

刘经洪　著

科学出版社

多维有限元逐点超收敛分析

刘经洪 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了作者和国内外同行在多维有限元超收敛领域中取得的研究成果，书中绝大部分内容是作者及其合作者十几年来在该领域的研究所得. 本书主要内容基于“离散格林函数——两个基本估计”这一框架，以多维投影型插值算子和权函数为主要分析工具，深入系统地研究了多维有限元的逐点超收敛理论. 本书中的研究方法和成果可以运用到多维发展型偏微分(或积分-微分)方程的超收敛研究中.

本书可供高等学校的计算数学、计算物理和计算力学等专业的师生以及从事科学与工程计算的工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

多维有限元逐点超收敛分析/刘经洪著. —北京：科学出版社，2019.7
ISBN 978-7-03-059427-3

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①逐点法-超收敛-多维分析-有限元分析
Ⅳ. ①O173.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 253986 号

责任编辑：胡庆家 李 萍／责任校对：杜子昂
责任印制：吴兆东／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2019 年 7 月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：210 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

有限元方法是解偏微分方程的一种行之有效的数值方法, 广泛应用于科学与工程计算各领域, 然而它又受到计算机的制约. 对于多维问题, 即使采用世界上最先进的计算机也不可能计算. 例如, 国际数值分析家 I.Babuska 曾向朱起定教授提出了一个简单的六维问题, 为保证最低的精度, 用银河亿次计算机计算也需耗时 34 年之多, 这便是所谓的“多维烦恼”. 事实上, 有限元方法只是推广的 Rayleigh-Ritz-Galerkin 方法, 试探函数是分片多项式, 随着网格的加密和多项式次数的提高, 有限元方法产生的代数方程组的未知数的个数将按几何级数急剧增加, 计算机技术发展的速度是不可能赶上有限元对它的需求的.

在科学与工程计算中, 需要解决的往往都是三维问题. 假设 h 为三维区域的网格尺寸, 则用有限元方法计算的未知量的个数为 $O(h^{-3})$, 即使 h 很大, 其存储量和计算量也相当惊人, 难以在一般的计算机上实现. 为了减少存储量和计算量, 三维问题有限元方法的超收敛研究尤为重要, 且更具有实际意义. 例如, 对于三维线性元, 通过超收敛将精度由 $O(h)$ 提高到 $O(h^2)$, 则为了达到百分之一的精度, 一般算法所需的未知量个数为 10^6, 而高精度算法 (具有超收敛性) 所需的未知量个数为 10^3, 由此可见, 超收敛研究对于解决“多维烦恼”是很有意义的.

1969 年, Oganesjan-Ruhovets[116] 对一次三角形元 (直角元) 得到一个重要估计 (第一型弱估计)

$$a(u_h - u_I, v) = a(u - u_I, v) = O(h^2)\|u\|_{3,2}\|v\|_{1,2}, \quad \forall\, v \in S_0^h(\Omega),$$

从而得到

$$\|u_h - u_I\|_{1,2} = O(h^2).$$

后来, 上式被林群等称为超逼近. 尽管 Oganesjan-Ruhovets[116] 没有直接得到逐点的超收敛点, 但开辟了一条研究超收敛的新途径. 通常, 文献 [116] 被认为是超收敛研究的开篇之作. 但这样的工作至少 8 年没有被人注意, 直到 1977 年和 1978 年才由 Zlámal[179] 和陈传淼–朱起定各自独立地发现. 这种方法迅速地在中国开花结果, 逐步形成了一套具有中国特色的超收敛理论 (参见文献 [24, 25, 66, 72, 162]).

此后, 随着超收敛的发展, 超逼近被广泛应用, 其主要用途体现在做逐点超收敛分析 (参见文献 [15, 34, 36, 70, 72—77, 79, 82—85, 93, 94, 121, 123—125, 127,

143, 147, 153—156]) 和超收敛后处理 (如 SPR 处理[166, 167, 169, 170]). 由文献 [116] 可以看出, 超逼近是通过弱估计获得的.

1982 年, 在“北京中法有限元国际讨论会”上, 朱起定[154] 把超收敛估计归结为两个基本估计 (弱估计):

$$a(u_h - u_I, v) = a(u - u_I, v) = O(h^r)\|v\|_{1,p}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega), \quad r \geqslant 2, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2,$$
$$a(u - u_I, v) = O(h^{r+1})\|v\|'_{2,p}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega), \quad r \geqslant 2, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

利用离散格林函数的基本估计, 妥善地给出了解决逐点超收敛问题的基本框架——“离散格林函数——两个基本估计”框架.

1983 年, 林群、吕涛、沈树民 (参见文献 [64]) 接受了以上观点, 提出了“离散格林函数——渐近展开式”的新框架, 利用一个渐近展开式 (对一次元)

$$a(u - u_I, v) = Ch^2 \int_{\partial\Omega} D^4 uv dx dy + O(h^4)\|v\|_{1,1}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega)$$

和离散格林函数的几个估计解决了有限元外推问题, 从而开创了对有限元的外推等问题的系统研究.

随着超收敛的发展, 对于一维和二维问题, 离散格林函数的估计和两个基本估计 (弱估计) 已为人所知 (参见文献 [25, 162]), 超收敛研究也取得了丰硕的成果. 1981 年, 朱起定[153] 首先得到了二次三角形有限元的第一型弱估计, 1985 年, 朱起定[156] 又首先得到了二次三角形有限元的第二型弱估计, 这为二次三角形有限元的超收敛研究做了开创性的工作. 对于三维及以上的多维有限元问题, 由于多维离散格林函数的估计相当困难, 再加上多维区域的复杂性, 两个弱估计也很难得到, 因而超收敛研究进展很少. 1978 年, Zlámal[180] 考虑了椭圆问题二十自由度二次长方体奇妙族元的超收敛, 这是国际上研究三维问题的第一个超收敛结果. 1980 年, 陈传淼[23] 第一次研究了四面体线元并证明了梯度的超收敛性, 后来 Kantchev-Lazarov[48] 也得到了类似的结果, 当时, 他们并不知道陈的工作. 1989 年, Pehlivanov[117] 猜想在对称点上四面体二次元本身具有 $O(h^4)$ 的精度, 但未给出证明. 1990 年, Goodsell[33] 证明了四面体线元的第一型弱估计, 1994 年, Goodsell[34] 又得到了四面体线元梯度的逐点超收敛. 1996 年, Schatz-Sloan-Wahlbin[122] 证明了在局部点对称网格的结点上四面体二次元本身具有 $O(h^4)$ 的精度. 林群–严宁宁[65, 66] 和陈传淼[24] 均讨论了长方体元的超收敛性, 陈传淼[24] 还讨论了三棱柱元的超收敛性. 最近, Brandts-Křížek[20] 证明了在一致四面体剖分下二次元的梯度在 L^2 意义下具有 $O(h^3)$ 的超逼近. 对于三维混合元, 也有一些超收敛结果 (参见文献 [31, 67]). 除了 Goodsell[34] 外, 上述关于三维问题的超收敛结果均是 L^2 平均意义下或是少数佳点处的超收敛结果. 近年来, 作者将文献 [162] 的第三章推广到多维情形, 系统地研究了多维离散

格林函数理论 (参见第 3 章), 得到了许多好的估计. 例如, 对于三维离散导数格林函数 $\partial_{Z,\ell}G_Z^h$, 作者证明了如下最优阶的 $W^{1,1}$ 和 $W^{2,1}$ 半范估计

$$\left|\partial_{Z,\ell}G_Z^h\right|_{1,1,\Omega} \leqslant C\left|\ln h\right|^{\frac{4}{3}}, \quad \left|\partial_{Z,\ell}G_Z^h\right|_{2,1,\Omega}^h \leqslant Ch^{-1}.$$

对于三维离散格林函数 G_Z^h, 作者还获得了最优阶的 $W^{2,1}$ 半范估计

$$\left|G_Z^h\right|_{2,1}^h \leqslant C|\ln h|^{\frac{2}{3}}.$$

对于四至六维离散格林函数和离散导数格林函数, 作者也获得了相应半范的最优阶估计, 进而结合弱估计, 获得了四至六维有限元的逐点超收敛估计. 然而, 对于七维及以上的高维离散格林函数和离散导数格林函数, 作者目前还没有获得很好的估计, 以至于还无法利用它们研究有限元的逐点超收敛性.

作者利用投影型插值算子理论和单元合并技术, 详细讨论了几种常用三维有限元 (包括长方体元、四面体元和三棱柱元) 的弱估计. 结合三维离散格林函数和离散导数格林函数的估计, 作者对上述三维有限元解位移和梯度的最大模逼近作了分析, 均获得了高精度的逐点意义下的超逼近结果, 甚至是强超逼近结果[73]. 对于四至六维有限元问题, 利用相应离散格林函数和离散导数格林函数的最优阶估计以及弱估计, 作者也获得了有限元的逐点超逼近估计 (参见第 4 章). 综上所述, 本书仍然采用解决逐点超收敛问题的基本框架 (离散格林函数 —— 两个基本估计) 进行分析.

有限元超收敛理论的另一个重要内容就是如何构造有限元后处理算子从而获得比有限元解本身和它的导数精度更高的近似解, 这就是所谓的超收敛后处理问题. 通常的后处理技术有平均技术、插值技术、外推技术和 SPR 技术, 本书将在第 4 章针对三维有限元的超收敛后处理技术做一个简单的介绍. 此外, 本书还将讨论三维有限元的局部估计和局部超收敛估计 (参见第 6 章), 尽管 Schatz-Sloan-Wahlbin[122] 与 Wahlbin[128] 已经讨论了这部分内容, 但本书将采用“极限过渡”的思想[162] 重新讨论这些内容. 本书不仅获得了类似于文献 [122] 和 [128] 中的结果, 还导出了文献 [122] 和 [128] 中没有的局部逐点超收敛估计. 在这部分内容的研究中本书用到的最重要的分析工具就是三维格林函数的估计 (参见第 5 章), 这类估计正是采用“极限过渡”的思想得到的.

本书的主要内容取自作者及合作者十几年来在这一领域的研究成果. 特别需要指出的是, 作者的许多研究成果得益于与湖南师范大学朱起定教授的学术交流与合作. 在此, 作者向朱起定教授和其他合作者表示感谢. 作者还要对家人的关心和支持表示感谢. 本书的出版是在科学出版社胡庆家编辑的关心和帮助下完成的, 作者在此向胡庆家编辑表示感谢.

本书的众多研究成果是在国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、宁波市自然科学基金的资助下取得的, 作者对这些基金的资助表示感谢. 本书的出版还得到了海南省自然科学基金项目 (119MS038) 和海南师范大学博士点专项项目的资助, 在此也一并表示感谢.

由于作者水平有限, 本书部分结果还有待完善, 书中不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正.

刘经洪
2019 年 6 月于海口
海南师范大学

目　录

第 1 章 预备知识

本章主要介绍本书要讨论的模型问题及用到的记号、概念和基本定理.

1.1 常用记号

设 $\Omega \in R^d$(d 维欧氏空间) 为一有界开域, 我们规定:

$P_m(\Omega) : \Omega$ 上的完全 m 次多项式空间;

$Q_m(\Omega)(d=2) : \Omega$ 上的双 m 次多项式空间;

$T_m(\Omega) : \Omega$ 上的张量积 m 次多项式空间;

$T_m^n(\Omega) : \Omega$ 上的 n 自由度 m 次多项式空间;

$C(\Omega) : \Omega$ 上的全体连续函数的集合;

$C(\bar{\Omega}) : \Omega$ 的闭包上的全体连续函数的集合, 它按范数 $\|u\|_C = \max\limits_{X \in \bar{\Omega}} |u(X)|$ 构成一个 Banach 空间;

$C^m(\Omega) : \Omega$ 上直到 m 次导数连续的函数的集合;

$C^\infty(\Omega) : \Omega$ 上无限次可微的函数的集合;

$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}u在\ \Omega\ 中紧\}$, 其中 $\text{supp}u = \overline{\{X \in \Omega : u(X) \neq 0\}}$;

$C^m(\bar{\Omega}) : \Omega$ 的闭包上的直到 m 次导数连续的函数的集合, 它按范数

$$\|u\|_{C^m} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \max_{X \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(X)|$$

构成一个 Banach 空间;

$L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty) : \Omega$ 上全体 p 次绝对可积的 Lebesgue 可测函数的集合, 它按范数

$$\|u\|_{0,\,p,\,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(X)|^p \, dX \right)^{\frac{1}{p}}$$

构成一个 Banach 空间;

$L^\infty(\Omega) : \Omega$ 上全体本质有界的可测函数的集合, 它按范数

$$\|u\|_{0,\,\infty,\,\Omega} = \inf_{\text{meas}(E)=0} \sup_{X \in \Omega \setminus E} |u(X)|$$

构成一个 Banach 空间.

下面是与导数有关的几个记号及其他记号.

(1) $u(X)$ 的 k 阶偏导数:

$$\partial_{x_i}^k u(X)=\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k},\quad X=(x_1,x_2,\cdots,x_d),\quad k \text{ 为非负整数}.$$

(2) $u(X)$ 的 α 阶分布导数:

$$D^\alpha u(X)=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}u(X),$$

其中, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d)$ 为重指标, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_d$.

(3) $u(X)$ 的 k 阶导数的张量: $\nabla^k u(X)$, k 为非负整数, 且

$$\left|\nabla^k u(X)\right|^2=\sum_{|\alpha|=k}\left|D^\alpha u(X)\right|^2.$$

(4) $u(X)$ 的 k 阶 Fréchet 导数: $D^k u(X)$, k 为非负整数, 这里 $D^k u(X)$ 表示一个从 k 重乘积空间 $R^d\times R^d\times\cdots\times R^d$ 到 R 的 k 线性映射

$$D^k u(X)(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)=\prod_{i=1}^k\sum_{j=1}^d \xi_j^{(i)}\partial_j u(X),$$

其中 $\xi_i=(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)},\cdots,\xi_d^{(i)})^{\mathrm{T}}\in R^d, i=1,2,\cdots,k$.

(5) $u(X)$ 的 k 阶原函数: $D^{-k}u(X)$, k 为非负整数.

(6) $X^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_d^{\alpha_d}$: $X=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\Omega\subset R^d$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d)$ 为重指标.

(7) 通常用 p' 表示 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 的共轭数, 即满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ 的数 p'.

(8) 用 C 表示与 Sobolev 空间中的函数、剖分的单元及网格大小 h 均无关的正常数.

1.2 Sobolev 空间及其基本定理

用 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间, 即

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{v: D^\alpha v\in L^p(\Omega), |\alpha|\leqslant m\right\},$$

其中 $m\geqslant 0$ 为整数, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d)$ 为重指标, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_d$, $D^\alpha v$ 为 v 的分布导数, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

这个空间依范数

$$\|v\|_{m,p,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha v|^p\,dX\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\inf_{\mathrm{meas}(E)=0}\sup_{\Omega\backslash E}|D^\alpha v(X)|,\quad p=\infty$$

构成一个 Banach 空间. 此外, 对于这个空间, 还有下面的半范:

$$|v|_{m,p,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha v|^p\,dX\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|=m}\inf_{\mathrm{meas}(E)=0}\sup_{\Omega\backslash E}|D^\alpha v(X)|,\quad p=\infty.$$

$C_0^\infty(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 的闭包记为 $W_0^{m,p}(\Omega)$, 显然

$$W_0^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega).$$

我们还简记

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega),\quad \|\cdot\|_{m,\Omega}=\|\cdot\|_{m,2,\Omega},$$
$$H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega),\quad |\cdot|_{m,\Omega}=|\cdot|_{m,2,\Omega}.$$

显然, $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 依范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 构成 Hilbert 空间. 在不致混淆的情况下, 我们也把上面的范数和半范记为

$$\|\cdot\|_{m,p},\quad |\cdot|_{m,p},\quad \|\cdot\|_m,\quad |\cdot|_m,\quad \|\cdot\|_{m,\infty},\quad |\cdot|_{m,\infty}.$$

设 $X_0\in\Omega$, 如果对任何 $X\in\Omega$, 连线 $X_0X\subset\Omega$, 称 Ω 关于 X_0 是星形的. 于是我们有如下定理[1].

定理 1.1 (Sobolev 积分恒等式) 设 $\Omega\subset R^d$ 为有界开域, 且存在闭球 $S\subset\Omega$, 使得 Ω 关于 S 中每一点都是星形的, $u\in C^m(\Omega)$, 那么 $u(X)$ 可以表示成如下形式:

$$u(X)=\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}l_\alpha(u)X^\alpha+\int_\Omega\frac{1}{r^{n-m}}\sum_{|\alpha|=m}Q_\alpha(X,Y)D^\alpha u(Y)\,dY,$$

其中, $l_\alpha(u)$ 是 $C^m(\Omega)$ 上的线性泛函:

$$l_\alpha(u)=\int_\Omega\zeta_\alpha(Y)u(Y)\,dY,$$

而 $\zeta_\alpha(Y)$, $|\alpha| \leqslant m-1$ 是 Y 的连续有界函数, $Q_\alpha(X,Y)$, $|\alpha|=m$ 是 X 和 Y 的有界的无限次可微函数. 此外

$$r=|X-Y|=\left(\sum_{j=1}^{d}|x_j-y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad X=(x_1,x_2,\cdots,x_d), \quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_d)\in\Omega.$$

定理 1.2 (Sobolev 嵌入定理)　对所有整数 $m \geqslant 0$ 和所有的 $p\in[1,\infty]$, 有

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),\ \frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{m}{d},\ 如\ mp<d;$$

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega),\ \forall q\in[1,\infty),\ 如\ mp=d;$$

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow_c L^{q}(\Omega),\ \forall q\in[1,p^*],\ \frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{m}{d},\ 如\ mp<d;$$

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow_c L^{q}(\Omega),\ \forall q\in[1,\infty),\ 如\ mp=d;$$

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow_c C(\bar{\Omega}),\ 如\ mp>d.$$

定理 1.3 (Bramble-Hilbert 引理)　设 Ω 为具有 Lipschitz 连续边界的 R^d 中的开子集, f 为空间 $W^{k+1,p}(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ 上的连续线性泛函, 且

$$f(p)=0, \quad \forall p\in P_k(\Omega),$$

则存在一个常数 $C=C(k,p,\Omega)$, 使得

$$|f(u)|\leqslant C\,\|f\|^*\,|u|_{k+1,p,\Omega}, \quad u\in W^{k+1,p}(\Omega),$$

其中, $\|\cdot\|^*$ 为对偶空间 $\left(W^{k+1,p}(\Omega)\right)^*$ 上的范数.

定理 1.4 (Lax-Milgram 定理)　设 $(V,\|\cdot\|)$ 是一个 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot):V\times V\to R$ 是双线性型, $f:V\to R$ 是线性型, 并假定

(1) 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 即存在常数 $M>0$, 使得

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|, \quad \forall u,v\in V;$$

(2) 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 椭圆的, 即存在常数 $\alpha>0$, 使得

$$\alpha\|v\|^2\leqslant a(v,v), \quad \forall v\in V;$$

(3) 线性型 f 是连续的,

则抽象变分问题: 找一个元 $u\in V$, 使得

$$a(u,v)=f(v), \quad \forall v\in V$$

有且仅有一个解.

定理 1.5 (L^p 先验估计)[38] 设 $\mathcal{L}$ 为一般的二阶椭圆算子, $\Omega \in R^d$ 为角域, 则存在与最大内角有关的常数 $1 < q_0 \leqslant \infty$, 使得对任何 $1 < p < q_0$, 有

$$\|u\|_{2,p,\Omega} \leqslant C(p)\|\mathcal{L}u\|_{0,p,\Omega}, \quad \forall u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

如果 Ω 非角域, 且边界 $\partial\Omega$ 足够光滑, k 为非负整数, 则

$$\|u\|_{k+2,p,\Omega} \leqslant C(p)\|\mathcal{L}u\|_{k,p,\Omega}, \quad \forall u \in W^{k+2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

最后, 介绍几个 Sobolev 空间中常用的不等式.

Poincaré不等式 设 $\Omega \subset R^d$ 为有界区域, $\Gamma \subset \partial\Omega, \mathrm{meas}(\Gamma) > 0$, 则存在常数 C, 使得

$$\|u\|_{1,p} \leqslant C\left(|u|_{1,p} + \left|\int_\Gamma u ds\right|\right), \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

特别, 当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时, 有

$$\|u\|_{1,p} \leqslant C|u|_{1,p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

内插不等式[2, 11] 设 $\Omega \subset R^d$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, $k = s(1-\theta) + m\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant m$, 则存在常数 C, 使得

$$\|u\|_k \leqslant C\|u\|_s^{1-\theta}\|u\|_m^\theta, \quad u \in H^m(\Omega),$$

此外, 设 $1 < p \leqslant q < \infty, \alpha = \dfrac{d}{p} - \dfrac{d}{q} \leqslant 1$, 则有

$$\|u\|_{0,q} \leqslant C\|u\|_{0,p}^{1-\alpha}\|u\|_{1,p}^\alpha, \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

1.3 有限元空间及其几个重要定理

1.3.1 模型问题与有限元逼近

设 $\Omega \subset R^d$ 为有界多角形区域或光滑区域, 本书讨论下面的模型问题:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^d \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + \sum\limits_{j=1}^d b_j\partial_j u + Qu = f, & \text{在}\Omega\text{内}, \\ u = 0, & \text{在边界}\partial\Omega\text{上}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $Q \geqslant 0, a_{ij}, b_j$ 均为适当光滑函数且满足一致椭圆条件, 即存在常数 $\sigma > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2, \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d) \in R^d.$$

一般我们都假定 $a_{ij} = a_{ji}$, 即二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是对称的.

问题 (1.1) 对应的变分问题是: 找 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{aligned} a(u,v) \equiv & \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^{d} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{j=1}^{d} b_j \partial_j u v + Quv \right) dX \\ = & (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{1.2}$$

并且问题 (1.1) 还满足正则性条件 (参见 [39]): 存在 $q_0 > 1$, 使对任何 $q \in (1, q_0)$, 映射

$$\mathcal{L}: \ W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

是一个同胚映射, 即存在常数 $C(q) > 0$, 使得

$$\|u\|_{2,q,\Omega} \leqslant C(q) \|\mathcal{L}u\|_{0,q,\Omega}, \quad \forall u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega).$$

这就是 1.2 节的先验估计.

关于系数 $C(q)$ 和 q_0 有如下一些估计:

当 $d = 2$ 时,

(1) 若 Ω 的边界充分光滑或 Ω 为矩形域, 则 $q_0 = +\infty$, 且

$$C(q) \approx \begin{cases} Cq, & q \approx +\infty, \\ C\dfrac{1}{q-1}, & q \approx 1+0; \end{cases} \tag{1.3}$$

(2) 若 Ω 为角域, $\dfrac{\pi}{\beta}$ 为 Ω 的最大内角, 则

$$q_0 = \begin{cases} \dfrac{2}{2-\beta}, & \beta < 2, \\ +\infty, & \beta \geqslant 2; \end{cases} \tag{1.4}$$

(3) 若 Ω 的边界充分光滑, 则

$$\|u\|_{m+2,q,\Omega} \leqslant C \|\mathcal{L}u\|_{m,q,\Omega}, \quad m \geqslant 0. \tag{1.5}$$

当 $d = 3$ 时,

对于 $\mathcal{L}=-\Delta$ 的 Poisson 方程 $-\Delta u=f$, 其中 $f\in W^{m,q}(\Omega)$. 设 $u\in H_0^1(\Omega)$ 为它的解, 则 $u\in W^{m+2,q}(\Omega)$, $1<q<q_0$.

若 Ω 为凸角域 (凸多面体), $\frac{\pi}{\beta}$ 为 Ω 的边界面的最大二面角, 则

(1) $m=0$ 时,

$$q_0=\begin{cases}\dfrac{2}{2-\beta}, & 1<\beta<1.2,\\ \dfrac{6}{5-\sqrt{1+4\beta^2}}, & 1.2\leqslant\beta<\sqrt{6},\\ +\infty, & \beta\geqslant\sqrt{6};\end{cases}\tag{1.6}$$

(2) $m\geqslant 1$ 时,

$$q_0=\begin{cases}\dfrac{2}{m+2-\beta}, & 1<\beta<\beta_1,\\ \dfrac{6}{2m+5-\sqrt{1+4\beta^2}}, & \beta_1\leqslant\beta<\beta_2,\\ +\infty, & \beta\geqslant\beta_2,\end{cases}\tag{1.7}$$

其中 β_1, β_2 分别是方程 $3\beta-\sqrt{1+4\beta^2}=m+1$ 与 $\sqrt{1+4\beta^2}=2m+5$ 的正根.

为了离散化问题 (1.2), 我们需要将区域 Ω 进行剖分. 将 Ω 划分为有限多个子域 e, 称这些子域的集合 $\{e\}$ 为 Ω 的一个剖分, 如果满足

(1) 每个 $e\subset\Omega$ 是一个闭的单连通区域, 且具有 Lipschitz 边界;

(2) 任意两个不同单元 e, e' 没有公共的内点, 即 $(e\backslash\partial e)\cap(e'\backslash\partial e')=\varnothing$;

(3) $\cup e=\bar{\Omega}$.

对每个单元 e, 记 $h_e=\operatorname{diam}(e)=\sup\{|X-Y|, X,Y\in e\}$, $h=\max\limits_{e}\{h_e\}$, $\rho_e=\sup\{\operatorname{diam}(s): s\subset e$为 d 维球$\}$. 为方便起见, 相应的剖分记为 $\mathcal{T}^h$, 即 $\mathcal{T}^h=\{e\}$, 并记 $\mathcal{T}=\{\mathcal{T}^h\}$.

关于剖分我们给出下面四个条件:

(C1) 存在常数 $\sigma>0$, 使得

$$\forall h>0,\quad \forall e\in\mathcal{T}^h,\quad h_e/\rho_e\leqslant\sigma;$$

(C2) $h\to 0$;

(C3) 存在与 h 无关的常数 γ, 使 $\max\{h/h_e: e\in\mathcal{T}^h\}\leqslant\gamma$;

(C4) 在四面体剖分下, 有公共直棱的 6 个单元构成 h^2-近似平行六面体, 即它的 6 个侧面都是 h^2-近似平行四边形.

如果满足条件 (C1) 和 (C2), 我们称剖分族 $\mathcal{T}$ 为正规的 (regular family); 如果满足条件 (C1)—(C3), 称剖分族 $\mathcal{T}$ 为拟一致的 (quasi-uniform family); 如果同时满足条件 (C1)—(C4), 称四面体剖分族 $\mathcal{T}$ 为 C 剖分, 也称强正规剖分; 如果对于任意两个单元 e 和 e', 均有 $e \simeq e'$, 则称剖分族 $\mathcal{T}$ 为一致的 (uniform family).

基于某种剖分 $\mathcal{T}^h$, 可以定义相应的有限元空间

$$S^h(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_e \in P_e,\ \forall\, e \in \mathcal{T}^h\}, \tag{1.8}$$

特别, 针对问题 (1.2), 有限元空间为

$$S_0^h(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_e \in P_e,\ \forall\, e \in \mathcal{T}^h\}, \tag{1.9}$$

显然, $S_0^h(\Omega) \subset S^h(\Omega)$. 于是问题 (1.2) 的离散问题为: 找 $u_h \in S_0^h(\Omega)$, 使得

$$a(u_h, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in S_0^h(\Omega). \tag{1.10}$$

显然有下面的 Galerkin 正交关系:

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall\, v \in S_0^h(\Omega). \tag{1.11}$$

一般我们用 V_h 表示有限元空间 $S^h(\Omega)$ 或 $S_0^h(\Omega)$. 本书总假定有限元空间 V_h 是定义在正规剖分、拟一致剖分、强正规剖分或一致剖分上的 $\hat{P}$ 型 Lagrange 型有限元空间, 这里的参考有限元为 $(\hat{e}, \hat{P}, \hat{\Sigma}^{\#})$,

$$P_k(\hat{e}) \subset \hat{P} \subset P_r(\hat{e}), \quad 1 \leqslant k < r.$$

由剖分产生的有限元族 $\{(e, P_e, \Sigma_e^{\#}), e \in \mathcal{T}^h\}$ 均仿射 (等参) 等价于 $(\hat{e}, \hat{P}, \hat{\Sigma}^{\#})$, 可见

$$P_e = \{v|_e : v \in V_h\}.$$

对于在剖分 $\mathcal{T}^h$ 上的 k 次有限元空间 V_h, 可以假定如下最佳逼近估计成立: 对任意的 $e \in \mathcal{T}^h$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 有

$$\inf_{v \in V_h} \{\|u - v\|_{0,p,e} + h\|u - v\|_{1,p,e}\} \leqslant C h^{l+1} \|u\|_{l+1,p,e}. \tag{1.12}$$

由上式还可得到

$$\inf_{v \in V_h} \{\|u - v\|_{0,p,\Omega} + h\|u - v\|_{1,p,\Omega}\} \leqslant C h^{l+1} \|u\|_{l+1,p,\Omega}. \tag{1.13}$$