中德机械与能源工程
人才培养创新教材

常微分方程
典型应用案例及理论分析

李铮伟 / 著

上海科学技术出版社
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

中德机械与能源工程人才培养创新教材

常微分方程

典型应用案例及理论分析

李铮伟　著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程典型应用案例及理论分析 / 李铮伟著
.—上海:上海科学技术出版社,2019.5
中德机械与能源工程人才培养创新教材
ISBN 978-7-5478-4321-5

Ⅰ.①常… Ⅱ.①李… Ⅲ.①常微分方程—教学研究—高等学校 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 021099 号

常微分方程典型应用案例及理论分析
李铮伟 著

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235 www.sstp.cn)
上海盛通时代印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 9.5
字数 200 千字
2019 年 5 月第 1 版 2019 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-4321-5/O·69
定价:39.00 元

S ynopsis

内容提要

本书在参考同类教材的基础上，一方面对传统的常微分方程课程教材相关内容进行了重新梳理和简化，另一方面增加了大量涉及经济、能源及机械方面的案例。全书共7章，包括绪论和工程案例之多物种竞争模型篇、机械动力学模型篇、控制模型篇、生物学/医学模型篇、传热学模型篇、经济性模型篇等。

本书可供高等院校机械、能源类本科生在学习常微分方程课程的同时了解、学习本专业的专业知识，也可供社会读者和工程技术人员阅读参考。

Editorial Board

丛书编委会

Preface 从书序

在教育部和同济大学的支持下，同济大学人才培养模式创新实验区已经走过10个春秋。中德机械与能源工程人才培养模式创新实验区(简称莱茵书院)作为其中一员，自2014年开办以来，以对接研究生培养为主要目标，依托同济大学对德合作平台，探索并实践了双外语、宽口径、厚基础和学科交叉融合的人才培养模式，在学校和家长中得到了积极的响应。

本丛书是莱茵书院办学至今的部分成果汇报，主要包括两个部分：

一部分是根据机械、能源学科对于人才的要求，借鉴德国数学类课程体系，形成数学基本理论在学科内应用的案例教学，为研究生阶段学习奠定扎实基础。四本教材(《常微分方程典型应用案例及理论分析》《数学建模典型应用案例及理论分析》《数理方程典型应用案例及理论分析》《数值分析典型应用案例及理论分析》)中，编委们以高等院校工科学生的培养目标为准绳，以实际工程案例为切入点，进行数理知识点的分析与重构，提高工科学生的专业学习能力与分析问题、解决问题的能力。

另一部分是中德双语特色教学课程——机械原理的成果，该案例借鉴了德国亚琛工业大学、德累斯顿工业大学等优秀综合性大学的“机构学”教学经验和案例，结合了国内机械类专业本科生教学目标和知识点指标。《典型机构技术指南——认识—分析—设计—应用》是学生机构分析的案例汇编，该指南以加深学生理论基础、提升学生知识运用能力为目标，倾注了任课教师和莱茵书院学生的大量心血。

本丛书虽然是莱茵书院教学成果，亦可用作在校机械或能源类本科生和研究生辅导教材，或供相关专业在职人员参考。

在丛书出版之际，我代表莱茵书院工作组，对同济大学及其本科生院领导的支持表示诚挚感谢。在莱茵书院创办过程中，同济大学公共英语系教学团队为莱茵书院打造了特色课程体系，中德学院和留德预备部教学团队为莱茵书院的教学和学生培养提供了有

力的支撑，在此也表示衷心感谢。感谢同济大学机械与能源工程学院的支持。特别感谢莱茵书院工作组成员，大家克服困难，创建了莱茵书院，其中的彷徨、汗水和泪水最终与喜悦的成果汇合，回报了大家的初心。感谢丛书的编写者，是你们的支持保证了莱茵书院的正常教学，也推进了莱茵书院的教学实践。

尽管本丛书编写力求科学和实用，但是由于时间仓促，难免有不尽如人意之处，还望读者批评指正。

李峥嵘　教授

同济大学

2019 年 1 月于上海

Foreword

前　言

常微分方程是应用数学的一个分支，在经济、工业、自动控制、计算机等国民经济的各个领域有着广泛的应用。长久以来，高校常微分方程作为专门研究如何求解常微分方程及方程组的一门课程，在讲授时基本脱离了具体的应用领域。这样的授课方式不利于应用领域的学生充分理解常微分方程在该领域中的具体应用过程，即具体的专业领域内的问题如何通过常微分方程的知识解决。

一般而言，传统的常微分方程教材侧重求解的数学方法，忽视微分方程的建模过程讲解。但在解决实际问题时，难点和重点往往在于对问题的建模，至于对问题如何求解，由于可通过计算机计算，相对比较次要。结果导致很多学生在日后的工作中很难用到常微分方程课程学习的有关知识。

为了帮助机械、能源类的本科生在学习常微分方程课程的同时了解、学习本专业的专业知识，本书在参考同类教材的基础上，对常微分方程的课程内容进行了重新梳理和改编。一方面，本书对传统的常微分方程课程教材相关内容进行了简化；另一方面，增加了大量涉及经济、能源及机械方面的案例。通过这两方面的调整，作者希望激发课程学习者对专业的兴趣，让学生带着问题、带着思考去学习。

本书的案例部分主要由同济大学机械与能源工程学院 2014 级和 2016 级莱茵班的学生提供，在此感谢他们的付出！特别致谢如下：潘伟提供鱼塘捕鱼模型，李晓雯提供捕食者与被捕食者模型，王绎皓、王鹤颖提供词汇扩散传播模型，李剑铭提供微博信息传播模型，魏翔宇提供互联网公司竞争与用户发展模型，刘琛提供悬挂起重机模型，蒋欣怡提供骑车模型，李凡提供机械按键震动模型，籍星博提供车辆防抱死制动系统模型，梁中栋、李易阳提供小行星拦截轨道模型，陈鸿翔提供多自由度振动系统模型，张欣然提供开启桥开启过程模型，陈炜提供潜水艇运动模型，林源提供导弹制导模型，谭浩洋提供航母舰载电磁弹射器模型，袁鑫提供长跑模型，潘宇真提供土星探测器引力弹弓效应模型，乔

文韬提供电动机转速控制模型，郭二飞提供球杆系统模型，陈子木提供曲柄滑块模型，向佳豪提供游泳池余氯控制模型，陈思源提供肿瘤生长模型，陈淑红提供葡萄糖酸钙口服液模型，陈心怡提供奇台地区植被覆盖率模型，王均田提供国民经济增长模型，韩佳良提供近邻宝价格调整预测模型。

由于作者水平有限，本书谬误之处在所难免，敬请读者指正。常微分方程作为一门基础的数学学科，在日常生活中广泛存在。希望读者通过阅读此书，修炼出一双善于发现问题的眼睛，磨炼出一套解决问题的思路。谨与读者共勉！

作　者

Contents

目　录

第 1 章

绪　论

1.1 常微分方程的基本概念

1) 常微分方程的定义

自然界中事物普遍联系又相互影响，一般而言，对某个事件或者现象的描述往往需要基于多个变量及其导数，通过多个数学方程将其联系起来。这种含有自变量、因变量及其导数的方程称为微分方程。当自变量的数量为 1，即有且仅有一个自变量时，该方程为常微分方程；而当自变量的数量超过 1 时，称该方程为偏微分方程。举例而言，方程(1-1-1)为常微分方程，而方程(1-1-2)为偏微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1-1-1}$$

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y} \tag{1-1-2}$$

2) 常微分方程的阶数

常微分方程的阶数是指出现在常微分方程中导数的最高阶数，阶数与出现在方程通解中独立任意常数的个数直接相关。一般而言，常微分方程的阶数越高，则独立任意常数的个数越多，反之亦然。

举例而言，方程(1-1-1)的阶数是 1，方程(1-1-3)的阶数是 2，方程(1-1-4)的阶数是 4：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+tx\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3=0 \tag{1-1-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4}+5\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+4x=\sin t \tag{1-1-4}$$

3) 线性和非线性常微分方程

如果常微分方程 $F\left(x, y, y', y'', \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$ 中所有因变量及其导数的次数都为 1，即 F 与 $y, y', y'', \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 都成正比，则称该方程为线性常微分方程，否则即为非线性常微分方程。

举例而言，方程(1-1-1)为线性常微分方程，方程(1-1-3)为非线性常微分方程，方程(1-1-4)为线性常微分方程。

4) 常微分方程的解

对于常微分方程 $F\left(x, y, y', y'', \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$，假设存在 $y=\varphi(x)$，对于所有定义区间内的 x 而言，满足 $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^n(x))\equiv 0$，则称 $y=\varphi(x)$ 是该方程的显示解。

一般而言，常微分方程包含多个解。当求出的解仅为其中一个时，称该解为常微分方程的特解；而当解的形式包括多个任意独立常数(即包含所有可能的解)时，称该解为常微分方程的通解。简而言之，常微分方程的通解具有两个特点：① 包括任意独立常数；② 任意独立常数的个数与方程的阶数相同。

试证明：$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^{2x}+3$ 是方程 $y'''-2y''-y'+2y=6$ 的通解。

5) 显示解和隐式解

对于常微分方程 $F\left(x, y, y', y'', \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$，假设解 y 可用 $y=\varphi(x)$ 的形式表示，则称该解为常微分方程的显示解，而如果 y 只能用 $\varphi(x, y)=0$ 或其他形式表示，则称该解为常微分方程的隐式解。

举例而言，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的显示解，而 $x^2+y^2=1$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的隐式解。

6) 初值问题

对于常微分方程 $F\left(x, y, y', y'', \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$，如果在求解过程中增加以下条件，即式(1-1-5)，则称所解决的问题为初值问题，或者柯西(Cauchy)问题：

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{n-1}(x_0)=y_{n-1} \tag{1-1-5}$$

1.2　常微分方程的应用举例

常微分方程在物理学、生物学、人口学等领域有着广泛的应用，举例如下。

1）自由落体运动问题

某质量为 m 的物体，在空气中自由下落，试建立物体下落距离与时间的关系。

解决：

(1) 假设该物体在真空环境中下落，即不存在空气阻力，则根据牛顿第二定律，有

$$g = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1-2-1}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1-2-2}$$

结合式(1-2-1)和式(1-2-2)，即有

$$g = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-2-3}$$

式中 g——重力加速度；

v——下落速度；

x——下落距离；

t——时间变量。

(2) 然而当物体在实际的大气环境中下落时，存在空气阻力的影响，为了考虑这一因素，可假设空气阻力与物体的速度成正比，即

$$f = kv$$

在考虑这一因素后，方程(1-2-3)变为

$$mg - k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-2-4}$$

因此，用式(1-2-4)即可对大气中物体的自由落体运动进行描述。

2）基本的电子电路问题

某电路的组成如图 1-2-1 所示，有电源 u_r、电阻 R、电容 C 和电感 L。在时间为 0 时，开关打开，试求电路中电流随时间的变化规律。

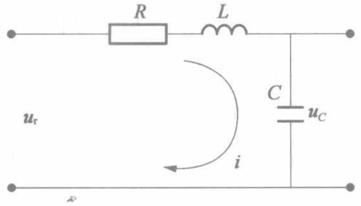

图 1-2-1 基本的电子电路图

解决：

电路中目前有电阻、电感和电容三个部件，每个部件都会对电流的变化产生影响。为了对这一现象进行描述，首先需要对每个部件单独描述，然后将所有部件集合起来即可得到电路中的电流变化规律。

首先，对于电阻，有如下规律：

$$u_R = iR$$

对于电感，有如下规律：

$$u_L = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

对于电容，有如下规律：

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$$

将以上部件结合起来，即可得到整个电路的电流变化规律：

$$u_{\mathrm{r}} = iR + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \tag{1-2-5}$$

如将式(1－2－5)两端对时间求导，则可得到

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = 0$$

3）人口增长问题

为了描述人口增长问题，马尔萨斯提出了如下假设：人口的增长速度和人口的规模成正比。假设某族群的人口数为 N，则依据马尔萨斯假设，人口增长规律可以用下式描述：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN \tag{1-2-6}$$

从式(1－2－6)可以求得

$$N = N_0 \mathrm{e}^{t} \tag{1-2-7}$$

式中　N_0——初始时的人口规模。

从式(1－2－7)可以看出，人口规模随着时间呈指数增长。显然，这一规律只能在一定范围内成立。由于资源承载力的限制，当人口规模增长到一定阶段后，就需要通过各种手段来控制人口的增长。为了考虑这一因素，引入当地资源所能承载的最大人口数 N_{m}，当人口数远未达到 N_{m} 时，其增长的速度应当与 N 成正比，但是当人口数增加后，其增长的速度应当逐渐慢于指数增长规律，最后当人口数增长到最大人口数 N_{m} 时，增长的速度应当为零。基于这一逻辑，人口增长速度改为由下式描述，即

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k\left(1 - \frac{N}{N_{\mathrm{m}}}\right)N$$