《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

迪利克雷除数问题

刘培杰数学工作室 编

◎迪利克雷除数问题的综述

◎尹文霖论迪利克雷除数问题

◎三角和的转化与转化后的若干性质

◎关于三维除数问题的误差估计

◎关于特殊序列上的多维除数函数的和

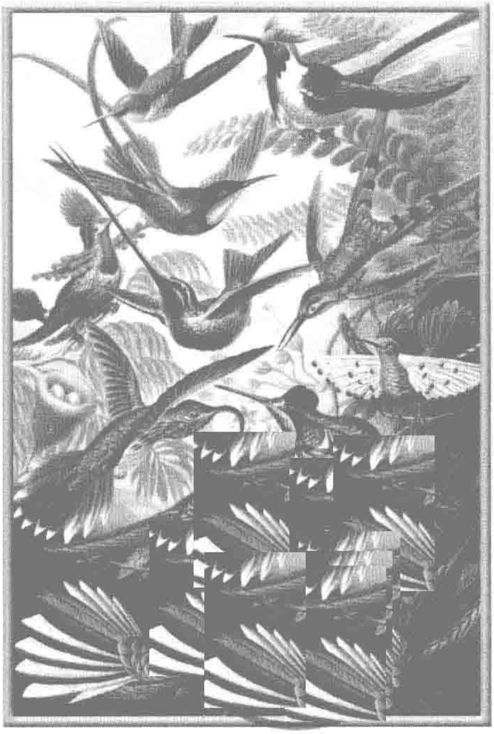
◎算术级数中的除数问题

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

迪利克雷除数问题

刘培杰数学工作室　编



◎ 迪利克雷除数问题的综述
◎ 尹文霖论迪利克雷除数问题
◎ 三角和的转化与转化后的若干性质
◎ 关于三维除数问题的误差估计
◎ 关于特殊序列上的多维除数函数的和
◎ 算术级数中的除数问题

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从一道全国高中联考压轴题的解法谈起，详细地介绍了迪利克雷除数问题的各种研究方法及结果，并在本书的结尾补充了其他类型的除数问题作为拓展.

本书适合于大、中学生及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

迪利克雷除数问题/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-5603-7239-6

Ⅰ.①迪… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①解析数论 Ⅳ.①O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 018913 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 21 字数 233 千字
版　　次 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7239-6
定　　价 48.00 元

目录

第一编　研究迪利克雷除数问题的解析方法及早期成果综述

第二编　三维除数问题

第三编　k 维除数问题

第四编　其他类型的除数问题

第　一　编

研究迪利克雷除数问题的解析方法及早期成果综述

从一道全国高中联考压轴题的解法谈起

第1章

1 引 言

在2007年的全国高中联赛中有如下试题：

试题 对每个正整数 n，定义函数 $f(n)=\begin{cases}0,\text{当 } n \text{ 为平方数}\\ \left[\dfrac{1}{\{\sqrt{n}\}}\right],\text{当 } n \text{ 不为平方数}\end{cases}$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$）. 试求：$\sum\limits_{k=1}^{240} f(k)$ 的值.

解 对任意 $a,k\in\mathbf{N}_+$，若 $k^2<a<(k+1)^2$，则 $1\leqslant a-k^2\leqslant 2k$. 设 $\sqrt{a}=k+\theta,0<\theta<1$，则

$$\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\sqrt{a}-k}=\frac{\sqrt{a}+k}{a-k^2}=\frac{2k+\theta}{a-k^2}$$
$$<\frac{2k}{a-k^2}+1$$

所以$\left[\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}\right]=\left[\frac{2k}{a-k^2}\right]$. 让 a 跑遍区间$(k^2,(k+1)^2)$中的所有整数,则 $\sum\limits_{k^2<a<(k+1)^2}\left[\frac{1}{\{a\}}\right]=\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$,于是

$$\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right] \qquad ①$$

下面计算 $\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$:画一张 $2k\times 2k$ 的表(表 1),第 i 行中,凡是 i 的倍数处填写“*”号,则这行的“*”号共$\left[\frac{2k}{i}\right]$个,全表的“*”号共$\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$个;另一方面,按列收集“*”号数:第 j 列中,若 j 有 $T(j)$ 个正因数,则该列便有 $T(j)$ 个“*”号,故全表的“*”号个数共 $\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$ 个. 因此$\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]=\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$. 则

表 1

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	*	*	*	*	*	*
2		*		*		*
3			*			*
4				*		
5					*	
6						*

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2k} T(j)\\ &= n[T(1)+T(2)]+\\ &\quad (n-1)[T(3)+T(4)]+\cdots+\\ &\quad [T(2n-1)+T(2n)]\end{aligned} \tag{②}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{16^2} f(k)=\sum_{k=1}^{15}(16-k)[T(2k-1)+T(2k)] \tag{③}$$

记 $a_k=T(2k-1)+T(2k)$，$k=1,2,\cdots,15$，易得 a_k 的取值情况如表 2.

表 2

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	3	5	6	6	7	8	6	9	8	8	8	10	7	10	10

因此

$$\sum_{k=1}^{256} f(k)=\sum_{k=1}^{15}(16-k)a_k=183 \tag{④}$$

据定义 $f(256)=f(16^2)=0$. 又当 $k\in\{241,242,\cdots,255\}$ 时，设 $k=15^2+r(16\leqslant r\leqslant 30)$，$\sqrt{k}-15=\sqrt{15^2+r}-15=\dfrac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}$，$\dfrac{r}{31}<\dfrac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}<\dfrac{r}{30}$，$1\leqslant\dfrac{30}{r}<\dfrac{1}{\{\sqrt{15^2+r}\}}<\dfrac{31}{r}<2$，则

$$\left[\frac{1}{\{\sqrt{k}\}}\right]=1,k\in\{241,242,\cdots,255\} \tag{⑤}$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{240} f(k)=783-\sum\limits_{k=241}^{256} f(k)=783-15=768$.

单墫教授评价说：加试的第三题并不难，却有点繁. 在得到 $\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\dfrac{2k}{i}\right]$ 后应想一想它的几何意义. 它表示

双曲线 $xy=2k$ 与坐标轴之间的整点的个数,即

$$\sum_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]=\sum_{xy\leqslant 2k}1=\sum_{h=1}^{2k}\sum_{xy=h}1=\sum_{h=1}^{2k}d(h)$$

其中 $d(h)$ 表示 h 的(正)因数的个数(也就是"标准答案"中的 $\tau(h)$,但 $d(h)$ 或 $\tau(h)$ 是数论中的标准记号). 这样问题就与数论中著名的除数(即因数)问题挂上了钩. 但 $\sum\limits_{h=1}^{2k}d(h)$ 迄今没有简单公式加以表示. 由和号变换

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{2k}d(h)&=\sum_{h=1}^{2n}d(h)\sum_{\frac{h}{2}\leqslant k\leqslant n}1\\&=\sum_{h=1}^{2n}d(h)\left(n-\left[\frac{h-1}{2}\right]\right)\\&=n\sum_{h=1}^{2n}d(h)-\sum_{h=1}^{2n}\left[\frac{h-1}{2}\right]d(h)\end{aligned}$$

剩下的就只有将 $n=15$ 代入计算了,幸好 n 还不太大!

2 $d(n)$ 的平均阶

本节我们将推导除数函数 $d(n)$ 的部分和的迪利克雷渐近公式.

定理 对所有 $x\geqslant 1$,我们有

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\log x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}) \qquad ①$$

其中 C 是欧拉常数.

证明 因为 $d(n)=\sum\limits_{d\mid n}1$,所以我们有

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}1$$

上式是在 n 与 d 上展开的双重求和式. 因为 $d\mid n$,我们写 $n=qd$,并对所有的 $q,d,qd\leqslant x$ 展开这个和式,于是有

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=\sum_{\substack{q,d\\ qd\leqslant x}}1 \qquad ②$$

这说明和式能在 qd 平面内的一些格点上展开,如图 1 所示.(格点就是坐标为整数的点.)双曲线 $qd=n$ 上有格点,所以式 ② 中的和就是计算对应于 $n=1,2,\cdots,[x]$ 的双曲线 $qd=n$ 上的格点的个数. 对于每一个固定的 $d\leqslant x$,我们首先计算水平线段 $1\leqslant q\leqslant\frac{x}{d}$ 上的格点的个数,然后对所有的 $d\leqslant x$ 求和,因而式 ② 变为

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=\sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant\frac{x}{d}}1 \qquad ③$$

由

$$\sum_{q\leqslant\frac{x}{d}}1=\frac{x}{d}+O(1)$$

我们得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}d(n)&=\sum_{d\leqslant x}\left\{\frac{x}{d}+O(1)\right\}=x\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}+O(x)\\&=x\left\{\log x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}+O(x)\\&=x\log x+O(x)\end{aligned}$$

这是式 ① 的一个弱的形式,由此得出

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)\sim x\log x\quad(x\to\infty)$$

这给出 $d(n)$ 的平均阶为 $\log n$.

为了证明更精确的公式 ①,我们回到和式 ②,计算在双曲线区域内格点的个数并利用它在直线 $q=d$ 区域内的对称性. 在这个区域内格点的总数等于在直线 $q=d$ 下面的格点数的 2 倍加上平分线段上的格点数.

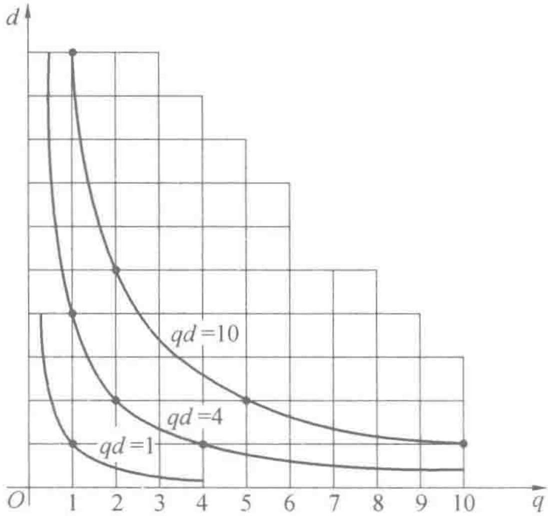


图 1

借助图 2,我们看出

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = 2 \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \left\{ \left[\frac{x}{d} \right] - d \right\} + [\sqrt{x}]$$

于是我们利用 $[y] = y + O(1)$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} d(n) &= 2 \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \left\{ \frac{x}{d} - d - O(1) \right\} + O(\sqrt{x}) \\ &= 2x \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2 \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} d + O(\sqrt{x}) \\ &= 2x \left\{ \log \sqrt{x} + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right\} - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2\left\{\frac{x}{2}+O(\sqrt{x})\right\}+O(\sqrt{x})\\
=&x\log x+2(C-1)x+O(\sqrt{x})
\end{aligned}
$$

迪利克雷公式的证明完成.

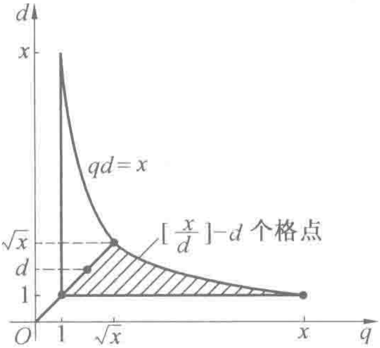


图 2

注　误差项 $O(\sqrt{x})$ 还能改进. 1903 年沃罗诺伊(Вороной)证明误差是 $O(x^{\frac{1}{3}}\log x)$，1922 年范德科皮特(Van der Corput)改进为 $O\{x^{\frac{33}{100}}\}$，到目前为止最好的估计是 $O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon})$，$\varepsilon>0$，它是由科列斯尼克(Kolesnik)在 1969 年得到的. 确定误差项 $O(x^{\theta})$ 的所有 θ 的下确界的问题与迪利克雷除数问题一样是一个尚未解决的问题. 1915 年哈代与朗道证明了 $\theta\geqslant\frac{1}{4}$.

3　迪利克雷除数问题的综述

一、问题与研究方法

除数函数 $d(n)$ 的分布是十分不规则的，当 n 为素

数时它等于 2,而熟知的一个初等结果是

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\log n)^{-1}(\log\log n)\log d(n)=\log 2 \qquad ①$$

数论中的一个著名问题就是研究除数函数 $d(n)$ 的和

$$D_2(x)=\sum_{n\leqslant x}d(n)\quad (x\geqslant 1) \qquad ②$$

要求出 $D_2(x)$ 的主项,尽可能好地估计它的余项. 这一问题通常称为迪利克雷除数问题,是本章所要讨论的内容. 容易看出

$$D_2(x)=\sum_{uv\leqslant x}1 \qquad ③$$

所以,$D_2(x)$ 表示区域:$uv\leqslant x,u\geqslant 1,v\geqslant 1$ 中的整点(坐标均为整数的点,也称为格点)数目. 研究某些特殊区域甚至一般区域中的整点的个数的问题称为整点问题(或格点问题),整点问题是数论中的一个重要的研究课题,而除数问题正是一种特殊的整点问题.

研究迪利克雷除数问题主要有两种途径,而最终都归结为某种指数和估计.

第一种途径是从式 ③ 出发计算区域中的整点个数,把问题转化为讨论算术函数 $f(n)=\frac{x}{n}$ 的分数部分的平均分布,进而利用傅里叶级数把问题变为指数和估计. 利用双曲型求和法,由式 ③ 得

$$\begin{aligned}D_2(x)&=2\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\ \sum_{1\leqslant v\leqslant\frac{x}{u}}1-[\sqrt{x}]^2\\&=2\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{u}\right]-[\sqrt{x}]^2\\&=2x\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{u}-2\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{u}\right\}-[\sqrt{x}]^2\end{aligned} \qquad ④$$

可有

$$\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{u}=\log[\sqrt{x}]+\gamma+(2[\sqrt{x}])^{-1}+O(x^{-1}) \quad ⑤$$

由以上两式可得

$$D_2(x)=x(\log x+2\gamma-1)+\Delta_2(x) \quad ⑥$$

$$\Delta_2(x)=\sqrt{x}-2\sum_{1\leqslant u\leqslant\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{u}\right\}+O(1) \quad ⑦$$

这样，就得到了迪利克雷(1849 年)所证明的结果

$$\Delta_2(x)\ll x^{\frac{1}{2}} \quad ⑧$$

为了改进 $\Delta_2(x)$ 的上界估计，就需要用傅里叶级数展开来讨论式 ⑦ 中的和式.

第二种途径是利用佩龙(Perron)公式来表示式 ② 中的和式. 取 $a(n)=d(n)$，$s_0=0$，$A(s)=\zeta^2(s)$，$\sigma_a=1$，$b>1$，$T\geqslant 1$，x 为半奇数[①]，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^2}+\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right) \quad ⑨$$

设 $a>0$，考虑以 $b\pm\mathrm{i}T$，$-a\pm\mathrm{i}T$ 为顶点的正向围道，由柯西积分定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=x(\log x+2\gamma-1)+\zeta^2(0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\left(\int_{b-\mathrm{i}T}^{-a-\mathrm{i}T}+\int_{-a-\mathrm{i}T}^{-a+\mathrm{i}T}+\int_{-a+\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\right)\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \quad ⑩$$

等号右边前两项分别为在 $s=1,0$ 处的留数.

由于 $\zeta(b+\mathrm{i}t)\ll(b-1)^{-1}$，$\zeta(-a+\mathrm{i}t)\ll a^{-1}(|t|+1)^{a+\frac{1}{2}}$，故推出：当 $-a\leqslant\sigma\leqslant b$，$|t|\geqslant 1$ 时

① 这个限制是没有影响的，事实上可用 $[x]+\frac{1}{2}$ 代替 x.