初等代数

湖南师范学院数学系编

一九七八年二月

初 等 代 数

湖南师范学院数学系编

一九七八年二月

初等代数　目录

第一章　有理数、实数…………………………………（ 1 ）

§1 有理数…………………………………………………（ 1 ）

§2 用轴上的点表示数、有理数的大小比较……（ 6 ）

§3 有理数的运算…………………………………………（ 8 ）

§4 实数………………………………………………………（ 21 ）

§5 数的开方…………………………………………………（ 28 ）

习题………………………………………………………（ 30 ）

第二章　有理式………………………………………………（ 32 ）

§1 有理式的概念…………………………………………（ 32 ）

§2 多项式……………………………………………………（ 35 ）

§3 含一个字母的多项式的带余除法……………（ 41 ）

§4 因式分解…………………………………………………（ 43 ）

§5 最高公因式与最低公倍式………………………（ 47 ）

§6 有理分式…………………………………………………（ 49 ）

习题………………………………………………………（ 56 ）

第三章　根式与无理式………………………………………（ 62 ）

§1 算术根与根式…………………………………………（ 62 ）

§2 无理式与根式的变形……………………………（66）
§3 有理化因式……………………………………（72）
习题………………………………………………（75）

第四章 一次函数与二次函数……………………（79）

§1 函数概念……………………………………（79）
§2 一次函数……………………………………（89）
§3 二次函数……………………………………（91）
习题………………………………………………（103）

第五章 方程和方程组…………………………（108）

§1 方程的概念…………………………………（108）
§2 一元一次方程和一元二次方程……………（110）
§3 分式方程……………………………………（124）
§4 无理方程……………………………………（126）
§5 方程组………………………………………（131）
§6 关于方程同解与方程组同解的一般理论……（151）
习题………………………………………………（168）

第六章 不等式…………………………………（185）

§1 不等式和它的性质…………………………（185）
§2 不等式的同解性……………………………（188）
§3 不等式的解法………………………………（191）
§4 不等式的证明………………………………（202）
§5 特殊的极值问题……………………………（207）

§6 函数、方程、不等式之间的关系……………… (212)
习题………………………………………………………… (219)

第七章 数列……………………………………………… (226)

§1 数列………………………………………………………… (226)
§2 等差数列…………………………………………………… (227)
§3 等比数列…………………………………………………… (232)
习题………………………………………………………… (242)

第八章 排列、组合和二项式定理………………… (245)

§1 排列………………………………………………………… (245)
§2 组合………………………………………………………… (251)
§3 数学归纳法、二项式定理……………………………… (255)
习题………………………………………………………… (264)

第九章 指数和对数…………………………………… (268)

§1 幂概念的扩张……………………………………………… (268)
§2 对数………………………………………………………… (277)
§3 常用对数与自然对数……………………………………… (282)
习题………………………………………………………… (287)

第十章 幂函数 指数函数和对数函数………… (291)

§1 幂函数……………………………………………………… (291)
§2 指数函数…………………………………………………… (299)
§3 对数函数…………………………………………………… (302)
习题………………………………………………………… (306)

第十一章　三角函数和反三角函数……………………（309）

§1 正弦函数的性质和图象……………………………（310）

§2 余弦函数的性质和图象……………………………（321）

§3 正切函数、余切函数的性质和图象…………（323）

§4 反三角函数……………………………………………（326）

习题………………………………………………………（337）

附录一　整数的整除性……………………………………（341）

附录二　关于实数理论的补充……………………………（352）

第一章　有理数 实数

§1　有理数

一、负数的引入

算术中遇到的数有自然数1，2，3，……和数0以及分数$\frac{m}{n}$（m，n都是自然数，且$n \neq 1$）。这些数统称算术数，都是人们从现实世界中抽象出来的概念，为了表示某类物体的个数，人们创造了自然数．为了表示没有某种物体，引进了数0．分数的概念也是由于实际的需要而产生的．如某工程队完成某项工程需要五天时间，那末平均每天应完成的工作量是整个工程工作量的五分之一．按这一进度施工，两天完成整个工作量的五分之二，三天完成整个工作量的五分之三，……

实践不仅要求有数，还要求对数进行计算．对数进行计算，正是对具体事物作实在计算的反映．在计算过程中，人们还逐渐地发现了计算的某些规律．例如，把几个数相加，计算的结果与按怎样的顺序进行无关．因此，在算术中还讲了数（算术数）的加法和乘法，并且这两种运算具有以下的基本性质：

Ⅰ、加法的交换律：$a+b=b+a$；

Ⅱ、加法的结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

Ⅲ、乘法的交换律：$ab=ba$；

Ⅳ、乘法的结合律：$(ab)c=a(bc)$；

Ⅴ、乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$；

这里a，b，c 都代表算术数．除此以外，算术中还讲了数的减法与除法．但应注意的是，在算术中，减法不是对任何两个数都可以施行的，只有在被减数不小于减数时，才能进行减法．例如，我们可以从 5 减去 2，但不能从 2 减去 5．在进行除法时，应注意 0 不能做除数．

随着人类在实践中对自然界和社会认识的不断深化，人们认识到现实世界中存在着一类具有相反方向的量．例如，今天的气温比昨天升高了5°C，或者今天的气温比昨天降低了5°C．在这两种情况下，虽然这两天气温变化的度数都是5°C，但变化的方向是相反的，反映着完全不同的两回事．如果不加“升高”和“降低”两个字，就反映不出它们之间的差异．这“升高5°C”与“降低5°C”就是具有相反方向的两个量．还有，为了说明某一天的气温，我们规定某一一定的温度为 0°C，当温度高于 0°C时，称零上多少度，温度低于 0°C 时，称零下多少度．如“零上40°C”，“零下40°C”．相对于0°来说，它们也是一对具有相反方向的量．还可以从实践中经常遇到的量中举出许多这样的例子．如河水水位上涨和下降的高度，或以某一定水位为标准，高于与低于这一标准水位的水位；物体作直线运动时，向左和向右移动的距离，等等．如果要用数表示出这种具有相反方向的量，单有算术数就不够了．于是就产生了一种新的数——负数．

“客观的矛盾反映入主观的思想，组成了概念的矛盾运动，推动了思想的发展，不断地解决了人们的思想问题。”为

了区别具有相反方向的两个量，人们把其中一个方向（如升高、零上、上涨、向右等）的量规定为正的量，并用算术数来表示度量它的结果；而把另一个相反方向（如降低、零下、下降、向左等）的量规定为负的量，并引进新数——“负数”来表示度量它的结果．

在每一个不为零的算术数的前面放上符号“—”（读做负），我们把它看作新的数叫做负数．如 -40，-400，-1.5，$-1\frac{1}{2}$都是负数．相对地把算术数（零除外）叫做正数．如40，400，1.5，$1\frac{1}{2}$都是正数．有时我们也在算术数前面放上符号“+”（读做正）以表示它是正数．如40，400，1.5也可以分别写成 $+40$，$+400$，$+1.5$．不过通常写正数时，符号“+”可省略．

零既不是正数，也不是负数．

引入了负数之后，对于具有相反方向的两个量，就可以用正、负数来刻划它们了．例如，气温升高 $5°C$，记作 $5°C$，降低 $5°C$ 记作 $-5°C$；零上 $40°C$ 记作 $40°C$，零下 $40°C$ 记作 $-40°C$；水位上涨 2 米记作 2 米，下降 2 米记作 -2 米，等等．

所有上述的正数、负数和零组成一个新的数的集合，叫做有理数集．有理数集中每一个元素（数）都叫做有理数．其中的正数叫做正有理数；负数叫做负有理数．对于有理数这一概念所包括的所有数，可按下列两种方法分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正（有理）数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负（有理）数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数；}\end{cases}\end{cases}$$

或

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数.}\end{cases}\end{cases}$$

在算术中，我们学习过把分数化为小数．所得的结果，或是有限小数，或是无限循环小数．例如$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{2}{3}=0.666\cdots=0.\dot{6}$．反过来，每一个有限小数或无限循环小数也都可以化为分数．例如$2.46=\frac{246}{100}$，$0.\dot{3}\dot{2}=\frac{32}{99}$．因此，分数与有限小数及无限循环小数是同一种数的不同表现形式．因此，有限小数与无限循环小数都是有理数．

二、反数 有理数的绝对值

正数和负数是现实世界中具有相反方向的量反映入人们的思想而产生的矛盾着的两个概念．对于每一个正数 a，有唯一的负数 $-a$与它对应，反之，每一个负数 $-a$也一定有一个正数 a 对应于它。这一对数互相对立着，又因一定条件而互相联系着．例如，在东西方向公路上行驶的汽车，规定向东的方向为正方向，那末，要分清汽车向东行驶5公里和向西行驶5公里，就必须用+5（公里）和-5（公里）来表示．但如果只考虑汽车走了多少路程，就不论是行驶+5公里还是-5公里，走过的路程都是5公里，只需用一个正数5来表示．我们把+5与-5叫做互反数，而正数5叫做它们的绝对值．一般

的，我们有

定义1　相互对应的正数a与负数$-a$，我们称它们是互为反数．数0的反数规定为它自身．

例如，-5是5的反数，5是-5的反数．

从定义1中看到，正数a的反数就是在它前面放上符号"$-$"所表示的负数．对于负数$-a$与数0，我们也约定在它前面放上符号"$-$"来表示它的反数．这样一来，如果字母a表示任一有理数（正数、负数或0），$-a$就表示a的反数，而符号"$-$"又有了新的意义，它起着把一个数改成它的反数的作用．并且我们总有

$$-(-a)=a.$$

注意，如果a表示任意的有理数，$-a$不一定表示负数．当a是正数时，$-a$是负数；当a是负数时，$-a$是正数；当a是零时，$-a$也是零．例如，$-(+5)=-5$，$-(-5)=5$，$-0=0$．

绝对：定义2　对任何非零有理数a，a与$-a$中正的那一个叫做a的绝对值．因此，正数的绝对值是这个正数本身；负数的绝对值是作为它的反数的那个正数．零的绝对值规定为零．

一个数a的绝对值，用符号$|a|$来表示．例如：

$$|+3|=3,\quad |-3|=-(-3)=3,\quad |0|=0.$$

如果a表示任意的有理数，那末

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\text{是正数时，}\\ 0, & \text{当}a\text{是零时；}\\ -a, & \text{当}a\text{是负数时．}\end{cases}$$

由定义2，互为反数的两个数有相同的绝对值：

$$|a|=|-a|.$$

§2 用轴上的点表示数 有理数的大小比较

我们知道，算术数可以比较大小．如果用符号“$<$”表示“小于”（例如 $3<5$），那末它适合以下的基本规律：

Ⅰ 三歧律：对于任意两个数 a 与 b，关系 $a=b$，$a<b$ 或 $b<a$ 中，有且只有一种成立；

Ⅱ 传递律：如果 $a<b$，$b<c$，那末 $a<c$．

有理数也可以比较大小．为了更直观的说明这种关系，先用轴上的点来表示有理数．

取一条直线，选定它的一个方向（如下图 1—1，通常选

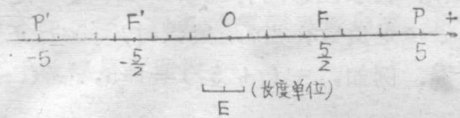

图 1—1

定由左向右的方向）作为正方向，用箭头表示出来．（相应地把另一方向叫做负方向）这样选定了正方向的直线叫做轴．在轴上取定一点 o 叫做原点，再取一条适当的线段 E 作为长度单位．

按照下面规定的度量方法，把有理数用轴上的点表示出来．对于每一个正整数 p，从 o 点出发，用线段 E 向右连续截取 p 次，得线段 op．规定数 p 对应于端点 P．而 oP 的长度就是 p．例如，$p=5$，那末，用线段 E 从 o 向右连续截取 5 次，得点 P（图 1—1），oP 的长度是5，而数5对应于点 P．对于负整数 $-p$，就从 o 点出发用 E 向左截取 p 次，得点 P' 规定数 $-p$ 对

应于P'.oP'的长度也是p，但方向是负的. 对于每一个正分数$\frac{m}{n}$（$n>1$），先将E分为n等分，取一等分作度量单位从O向右截取m次，得线段OF，规定数$\frac{m}{n}$对应于点F. 数$\frac{m}{n}$就是OF的长度. 例如，如图1—1，分数$\frac{5}{2}$就对应于点F. 对于负分数$-\frac{m}{n}$，与上面一样，只改变度量方向，得点F'. 规定$-\frac{m}{n}$对应于点F'.OF'的长度也是$\frac{m}{n}$. 对于数0，就规定它对应于原点O.

这样一来，对于每一个有理数a，都对应于轴上的唯一点A.a的绝对值就是线段OA的长度（点A到原点O的距离.）（见图2）

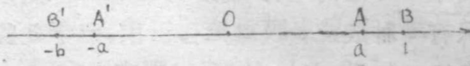

图 1—2

并且：

1° 对于每一对互反数a与$-a$（a是正数），轴上的相应点A与A'是关于原点对称（即到原点距离相等）的两点.

2° 设a，b是两个正数，且$a<b$. 那末它们的相应点B在A的右边，而与$-a$相应的点A'在与$-b$相应的点B'的右边.如果我们对轴上的点也规定在右边的点大于在左边的点，那末，对算术数来说，数的大小关系与其相应点的大小关系是一致的.

这启示我们规定有理数的大小关系如下：

1） 两个非负有理数（即算术数）的“相等”、“小于”和“大于”关系采取算术里的规定；

2） 每一个负数都小于零和每一个正数．即

$$-a<0,\ -a<b,\ (a,\ b\text{都表示正数}).$$

如果还用符号“>”（大于）的话，相应的：正数和零都大于负数：

$$0>-a,\ b>-a.\ (a,\ b\text{都表示正数}).$$

3） 对于两个负数 $-a$，$-b$（a，b 都是正数），规定：绝对值相等时，两数相等；绝对值不相等时，绝对值较大的那个数较小，绝对值较小的那个数较大．即

$a=b$时，$-a=-b$；

$a<b$时，$-b<-a$；

$b<a$时，$-a<-b$．

不难检验，有理数的大小关系仍适合下面的规律：

Ⅰ 三歧律 对任何二有理数 a与b，关系$a=b$，$a<b$ 或 $b<a$中有且只有一种成立；

Ⅱ 传递律 如果$a<b$，$b<c$，那末$a<c$．

这样规定有理数的大小关系以后，零这个数又有了新的意义，因为一切负数都小于零，一切正数都大于零，所以零是所有负数和正数的分界点．它刻划着“物质的十分确定的状态．”例如，我们说某一天的气温是0°C，这并不是说这一天没有温度，而是说这一天的气温处于在一个大气压下，水由液态转化为固态的临界温度．

§3 有理数的运算

§1中说过，对数进行计算，正是对具体事物作实在计算

的反映．有理数概念是在算术数的基础上为了解决具有相反方向的量这一矛盾而产生的．因此，有理数的运算法则，必然与算术数的运算法则有某些类似之处，但又因这一矛盾的特殊本质而取特殊的运动形式．不能抽象地，形而上学地用对于算术数的运算法则的解释来解释有理数的运算法则．下面我们根据实践中经常遇到的一些具体事例所揭示的规律来建立有理数的运算法则．

一、有理数的加法

考察某粮仓收存和支付稻谷的情况．规定收进的稻谷用正数表示，支出的稻谷用负数表示．

1° 某天上午收进稻谷5千斤，下午又收进3千斤．合计这一天共收进稻谷8千斤．用正、负数列成算式，就是

$$(+5)+(+3)=+8.$$

2° 某天上午收进稻谷8千斤，下午支出3千斤．合计这一天收进稻谷5千斤．用正、负数列成算式，就是

$$(+8)+(-3)=+5.$$

3° 某天上午付出稻谷8千斤，下午收进3千斤．合计这一天付出稻谷5千斤．列成算式：

$$(-8)+(+3)=-5.$$

4° 某天上午付出稻谷5千斤，下午又付出3千斤．合计这一天付出稻谷8千斤．列成算式：

$$(-5)+(-3)=-8.$$

概括上面例子所揭示的规律，规定有理数的加法法则：

1、正有理数与零（即算术数）的加法法则仍按算术中的规定；

2、两个负数相加，和还是一个负数，它的绝对值等于两相加数的绝对值之和；

$$(-a)+(-b)=-(a+b)，(a，b\text{ 表正数})；$$

3、符号相反的两个数相加，和的绝对值等于两相加数绝对值的差，符号与绝对值较大的那个相加数相同；互反两数的和等于零：

$$a+(-b)=(-b)+a=\begin{cases} a-b(\text{若}a>b)；\\ -(b-a)(\text{若}b>a)；\\ 0 \quad (\text{若}a=b). \end{cases}$$

4、任一有理数与零相加，和还是这个有理数：

$$a+0=a，(-a)+0=-a，0+0=0.$$

根据上面的规定，可以证明有理数的加法适合结合律与交换律.

Ⅰ　交换律：$a+b=b+a$；

Ⅱ　结合律　$a+(b+c)=(a+b)+c$，

其中a，b，c都是任意的有理数.

交换律的成立很容易证明，因为在定义中两数相加的结果与顺序无关.结合律的证明较繁，我们只举一个例子来说明.

例　取三个数$-\frac{3}{2}$，$+\frac{1}{2}$，-1，

$$\left[\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right]+(-1)=(-1)+(-1)=-2,$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left[\left(+\frac{1}{2}\right)+(-1)\right]=\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$

$$\therefore \left[\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right]+(-1)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)+\left[\left(+\frac{1}{2}\right)+(-1)\right].$$

二、有理数的减法

在有理数中，减法运算是由加法运算所规定的，它是加法的逆运算．在算术数中，减法与加法有下面的联系．例如，$5-2=3$，而$2+3=5$．但是，并不是任何两个数都可以相减．例如$2-5$就没有意义，因为找不到一个正数c，使$c+5=2$．而在有理数中就完全不同了．下面说明：

对任何二有理数a与b，存在唯一的有理数c，使得

$$b+c=a. \tag{1}$$

证明i)　令$c=a+(-b)$那末，

$$b+c=b+[a+(-b)]=b+[(-b)+a]=[b+(-b)]+a$$
$$=0+a=a.$$

ii)　反之，若(1)式成立，在等式两边都加上$-b$（b的反数），得

$$(-b)+(b+c)=a+(-b),$$
$$c=a+(-b).$$

由证明中看出，满足式(1)的数c就是$a+(-b)$．据此我们规定数$c=a+(-b)$为a减b的差，记作$a-b$．即

$$a-b=a+(-b). \tag{2}$$

有理数的减法法则：两个有理数之差等于被减数与减数的反数的和．

例　$5-2=5+(-2)=3$，$2-5=2+(-5)=-3$，

$(-5)-2=(-5)+(-2)=-7$，

$(-5)-(-2)=(-5)+2=-3$．