全国高等学校计算机教育研究会教材建设立项项目

离散数学

朱保平 陆建峰 金忠 张琨 编著

清华大学出版社

离散数学

朱保平 陆建峰 金忠 张琨 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是全国高等学校计算机教育研究会支持的立项教材，较全面地介绍了离散数学的基本理论及基本方法。本书以离散数学课程重要知识点为纽带，夯实程序设计思路，拓展数据和关系的表示方法，强化从实例计算到模型计算和问题—形式化—自动化（计算机化）等方法，旨在为后续的科学研究打下良好的基础。全书由命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合、关系、函数与集合的势、图论、树和有序树、群和环、格与布尔代数共12章组成。

本书可作为高等院校计算机科学与技术及相关专业离散数学课程教材，也可作为教师、研究生或软件技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/朱保平等编著．—北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-52031-3

Ⅰ．①离…　Ⅱ．①朱…　Ⅲ．①离散数学　Ⅳ．①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 008461 号

责任编辑：谢　琛　战晓雷
封面设计：常雪影
责任校对：李建庄
责任印制：董　瑾

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：18.75　　**字　　数**：433 千字
版　　次：2019 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

产品编号：081316-01

前言

离散数学是计算机科学与技术重要的理论基础课程，它不仅是计算机科学的核心课程，而且已成为电子信息类专业的热门选修课。离散数学与计算机科学有着十分密切的关系。无论是数字计算机雏形的图灵机，还是数字电路的布尔代数，以及程序设计语言、关系数据库、知识表示、人工智能等领域均离不开离散数学；同时两者的相互渗透推动了离散数学的发展。因此，学好离散数学对计算机科学与理论的研究有着重要的作用。

离散数学以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，旨在介绍离散数学各个分支的基本概念、基本理论和基本方法。本书以离散数学课程重要知识点为纽带，夯实程序设计思路，拓展数据和关系的表示方法，强化从实例计算到模型计算的应用能力，使读者充分掌握问题—形式化—自动化（计算机化）方法，为后续的学习和科学研究打下良好的基础。

本书基于全国高等学校计算机教育研究会的教材规范对离散数学教学内容进行编著，强化了离散数学的相关概念及其应用，注重相关课程内容的相互渗透。本书共 12 章，主要内容包括命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合、关系、函数与集合的势、图论、树和有序树、群和环、格与布尔代数。

本书第 1、2、3、5、7、9、10 章由朱保平编写，第 6、8、12 章由金忠编写，第 4 章由陆建峰编写，第 11 章由叶有培编写，第 6～12 章由叶有培统一策划。张琨教授参与了部分内容的编写。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

作者

2018 年 12 月

于南京理工大学

目录

Chapter 1

第 1 章　命题演算基础

数理逻辑也称数学逻辑，即用数学的方法研究逻辑问题。数理逻辑具体来说是研究前提和结论间的形式关系和推理的学科，它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、数据挖掘和程序设计理论密切相关。数理逻辑的主要内容包括命题演算、谓词演算、递归函数论、证明论、模型论和公理集合论等。本书只介绍命题演算、谓词演算和递归函数论。

1.1　命题和联结词

1.1.1　命题

定义 1.1：可以判断真假的陈述句称为命题。

命题具有两个特征。首先，命题应是一个陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等均不是命题；其次，这个陈述句所表达的内容可决定真或假，且真假不可兼，即它应有真假性。

如果一个命题取为真，则说该命题的值为真，用 T 表示真；如果一个命题取为假，则说该命题的值为假，用 F 表示假。

下面举例说明命题的概念：

(1) 微信是一种智能手机应用程序。

它是陈述句，可决定其真值为 T，所以为命题。

(2) 2012 年 12 月 21 日是玛雅人所说的世界末日。

它是陈述句，可决定其真值为 F，所以为命题。

(3) 这盆花真漂亮！

它不是陈述句，不是命题。

(4) 我正在说谎。

悖论，虽为陈述句，但不能判断其真值，不是命题。

(5) 太阳系外有宇宙人。

虽然至今还不知道太阳系外是否有宇宙人，但太阳系外要么有宇宙人，要么没有宇宙人，它的真值是客观存在的，而且是唯一的，因此它是命题。

(6) 微博是一种网络应用服务吗？

该语句是疑问句，不是陈述句，不是命题。

(7) $x+y=z$。

该语句不能确定真假性，不是命题。

命题具有两种类型：原子命题和复合命题。

定义 1.2：不可剖开或分解为更简单命题的命题称为原子命题。

例如，“5 为质数”“比特币是一种网络虚拟货币”“人工智能是计算机科学的一个分支”等就是原子命题。

定义 1.3：由成分命题利用联结词构成的命题称为复合命题。其中，成分命题是指原子命题或复合命题。

例如，“5 为质数且比特币是一种网络虚拟货币”“如果你是人工智能学院的学生，则你必须学习机器学习课程”等就是复合命题，其中语句中的“且”“如果……则……”等称为联结词。

注意，有些命题看似复合命题，但实际上为原子命题。

例如语句“Tom 和 John 是兄弟”就不能分解为“Tom 是兄弟”和“John 是兄弟”，因为一个人不能成为兄弟，故应把它理解为原子命题。

数理逻辑研究前提和结论间的形式关系，而不研究具体的内容，为此采用数学方法将命题符号化(也称为形式化)是十分重要的。约定用大写字母 P、Q、R 等表示命题变元。

例如：

P：表示“5 为质数”。

Q：表示“比特币是一种网络虚拟货币”。

定义 1.4：当 P 表示命题时称为命题变元。

注意，命题变元和命题是两个不同的概念。

命题指具体的陈述句，有确定的真值。

命题变元没有确定的真值，只有代以具体的命题时才能确定它的真值。换言之，命题变元是以真假为变域的变元。

1.1.2 联结词

下面介绍 5 个常用的联结词：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

1. 否定词$\neg$

否定词$\neg$是一个一元联结词，利用该联结词可由成分命题构成复合命题$\neg P$，读为非 P。

日常语言中的“非”“不”和“并非”等表示逻辑非。

$\neg P$ 的真假与 P 的真假关系定义如下：

$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

否定词的真值表如表 1.1 所示。

表 1.1 否定词的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1.1：P 表示“区块链是一种分布式数据存储技术”，$\neg P$ 表示“区块链不是一种分布式数据存储技术”。

2. 合取词 $\wedge$

合取词 $\wedge$ 是一个二元联结词，利用该联结词可由成分命题 P 和 Q 构成复合命题 $P \wedge Q$，读为 P 合取 Q。其中 $P \wedge Q$ 称为合取式，P、Q 称为 $P \wedge Q$ 的合取项。

日常语言中的“且”“与”等均表示合取。

$P \wedge Q$ 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真。

合取词的真值表如表 1.2 所示。

例 1.2：华为 P20 手机至少有 6GB 内存和 64GB 存储容量。

解：令 P 表示“华为 P20 手机至少有 6GB 内存”，Q 表示“华为 P20 手机至少有 64GB 存储容量”，则原句译为

$$P \wedge Q$$

例 1.3：你喜欢机器学习课程，但我喜欢数据挖掘课程。

解：令 P 表示“你喜欢机器学习课程”，Q 表示“我喜欢数据挖掘课程”，则原句译为

$$P \wedge Q$$

3. 析取词 $\vee$

析取词 $\vee$ 是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P \vee Q$，读为 P 析取 Q。其中 $P \vee Q$ 称为析取式，P 和 Q 称为 $P \vee Q$ 的析取项。日常语言中的“或”等可用析取词表示。

$P \vee Q$ 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P \vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 均假。

析取词的真值表如表 1.3 所示。

表 1.2　合取词的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1.3　析取词的真值表

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 1.4：今天下雨或下雪。

解：令 P 表示“今天下雨”，Q 表示“今天下雪”，则原句译为

$$P \vee Q$$

例 1.5：Tom 喜欢人工智能或机器学习是不对的。

解：令 P 表示“Tom 喜欢人工智能”，Q 表示“Tom 喜欢机器学习”，则原句译为

$$\neg(P \vee Q)$$

注意，语言中“或”在现实生活中有可兼和不可兼两种意思，但在数理逻辑中规定只有一种意思，即可兼的“或”。

4. 蕴含词→

蕴含词→是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\rightarrow Q$，读为 P 蕴含 Q。其中，$P\rightarrow Q$ 称为蕴含式，P 称为蕴含前件，Q 称为蕴含后件，蕴含词也可用⊃表示。

日常语言中的"如果……则……"等可用蕴含词表示。

$P\rightarrow Q$ 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P\rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 真 Q 假。

蕴含词的真值表如表 1.4 所示。

例 1.6 如果 Tom 没有学好离散数学，则他不可能学好数据结构。

解：令 P 表示"Tom 学好离散数学"，Q 表示"Tom 学好数据结构"，则原句译为

$$\neg P \rightarrow \neg Q$$

例 1.7：只有努力学习数据挖掘和机器学习，才能在大数据分析方面有所成就。

解：令 P 表示"努力学习数据挖掘"，Q 表示"努力学习机器学习"，R 表示"在大数据分析方面有所成就"，则原句译为

$$R \rightarrow (P \wedge Q)$$

注意，该语句不能译为 $(P\wedge Q)\rightarrow R$，翻译时一定要考虑条件的必要性和充分性。

从表 1.4 可看出，当蕴含前件 P 取 F 时，不管其后件 Q 取 T 或 F，蕴含式 $P\rightarrow Q$ 总取 T，故复合命题"如果 $1+1=3$，则雪是黑的"值为 T。也就是说，在形式推理中只要前件为假，就可推出任何命题，而此推理过程是正确的。

5. 等价词↔

等价词↔是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\leftrightarrow Q$，读为 P 等价于 Q。其中，$P\leftrightarrow Q$ 称为等价式。

日常语言中的"当且仅当"等可用等价词表示。

$P\leftrightarrow Q$ 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真或均假。

等价词的真值表如表 1.5 所示。

表 1.4 蕴含词的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 1.5 等价词的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例 1.8：你可以访问深网(Deep Web)当且仅当你是网络空间安全专业的研究生。

解：令 P 表示"你可以访问深网(Deep Web)"，Q 表示"你是网络空间安全专业的研究生"，则原句译为

$$P\leftrightarrow Q$$

例 1.9：当且仅当我玩完一局《王者荣耀》，我才休息。

解：令 P 表示“我玩完一局《王者荣耀》”，Q 表示“我才休息”，则原句译为

$$P \leftrightarrow Q$$

上面介绍了 5 个常用的真值联结词，其实真值联结词还有很多。为了能更好地表达其他真值联结词，引进真值函项概念，用真值函项的概念可以定义一元、二元甚至 n 元真值联结词。

定义 1.5：以真假为定义域并以真假为值域的函数称为真值函项。

有了真值函项的概念，就可以用它来表达联结词。

一元联结词有一个命题变项 P，它取 T 和 F 两种值，可定义 4 个不同的一元联结词 f_1、f_2、f_3、f_4，它们也称为真值函项。其真假关系如表 1.6 所示。

表 1.6　一元联结词的真值表

P	$f_1(P)$	$f_2(P)$	$f_3(P)$	$f_4(P)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

从表 1.6 可以看出：

$f_1(P)$：表示永真。

$f_2(P)$：表示恒等。

$f_3(P)$：表示否定，即$\neg P$。

$f_4(P)$：表示永假。

同理，二元联结词有 16 个，如表 1.7 所示。

表 1.7　二元联结词的真值表

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
T	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F	F

从表 1.7 可以看出：

f_5 为析取 $\vee$。

f_{15} 为合取 $\wedge$。

f_3 为蕴含 $\rightarrow$。

f_7 为等价 $\leftrightarrow$。

f_2 为与非：$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$。

f_{12} 为或非：$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$。

f_8 为异或：$P \oplus Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$。

1.1.3 合式公式

有了命题变元和联结词的概念，就可以利用括号讨论命题演算的合式公式。其中，括号可用来区别联结词运算的优先次序。

合式公式简称公式为如下定义的式子：

(1) 任何命题变元均是公式。

(2) 如果 P 为公式，则 $\neg P$ 为公式。

(3) 如果 P、Q 为公式，则 $(P \vee Q)$、$(P \wedge Q)$、$(P \rightarrow Q)$、$(P \leftrightarrow Q)$ 为公式。

(4) 只有有限次使用(1)、(2)、(3)组成的符号串才是公式，否则不是公式。

例如，P、$(P \vee \neg Q)$、$((P \rightarrow Q) \wedge R)$ 等是公式，$P \vee Q$、$(P \wedge \neg Q) \vee$、$(P \leftrightarrow Q$ 等不是公式。

为了方便起见，采用省略一些括号，保留一些括号的方式描述合式公式。例如，$((P \rightarrow Q) \wedge R)$ 写为 $(P \rightarrow Q) \wedge R$。

定义 1.6：若公式 α 中有 n 个不同的命题变元，则说 α 为 n 元公式。

例如 $((P \rightarrow Q) \wedge R) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow R)$ 中含有 P、Q、R 3 个命题变元，因此它为 3 元公式。

1.1.4 命题逻辑的应用

逻辑在数学、计算机科学和其他学科中有着许多重要的应用。数学、自然科学及自然语言中的语句通常不太精确，甚至有二义性。为了精确表达其意义，可以将它们翻译为逻辑语言。命题逻辑也可以用于软件和硬件的规范描述、计算机电路设计、计算机程序构造、程序的正确性证明和谜题求解等领域。下面是命题逻辑的若干应用。

1. 语句翻译

下面举一些例子来说明怎样把语句符号化成公式。注意，在语句符号化时，一定要分解至原子命题，而不能把某个复合命题直接用命题变元表示，否则不能完整表达语句的意思，也不便于计算机处理相关语句及其产生的知识。

例 1.10：如果只有懂得希腊文才能了解柏拉图，那么我不了解柏拉图。

解：令 P 表示“我懂得希腊文”，Q 表示“我了解柏拉图”，则原句译为

$$(Q \rightarrow P) \rightarrow \neg Q$$

例 1.11：如果 Tom 和 Alice 不都固执己见的话，John 也不会拂袖而去。

解：令 P 表示“Tom 固执己见”，Q 表示“Alice 固执己见”，R 表示“John 拂袖而去”，则原句译为

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg R$$

例 1.12：锲而不舍，金石可镂；锲而舍之，朽木不折。

解：令 P 表示“你锲”，Q 表示“你舍”，R 表示“金石可镂”，S 表示“朽木可折”，则原句译为

$$((P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow \neg S)$$