

NUMERICAL
OCEAN ACOUSTICS

数值海洋声学

刘 巍 王勇献 张理论 著



科学出版社

数值海洋声学

Numerical Ocean Acoustics

刘 巍 王勇献 张理论 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书共五章,第1章梳理海洋声学控制方程族谱,从流体力学控制方程开始,在各种简化假设下,逐步推导出 Helmholtz 方程,使方程各项的含义更加清晰;第2章推导波数积分法与镜像法,并提供相应的 Fortran 程序代码,二者可为 Helmholtz 方程数值求解提供声源区解或为抛物方程提供初始场;第3章建立 Helmholtz 方程直接有限差分数值求解算法,此部分是整本书的核心内容;第4章简要推导抛物方程法,并对其开源程序 FOR3D 进行性能优化以及并行算法设计与分析;第5章整理出一套海洋声学环境数据库,并发展与其匹配的声学参数模型。此外,附录部分提供基于 Helmholtz 方程直接数值求解的 11 个典型海洋声学算例。

本书可供计算海洋声学方向(偏高性能数值求解)的研究生与科研人员阅读,掌握基础的计算数学知识对理解本书内容更为有利。

图书在版编目(CIP)数据

数值海洋声学 / 刘巍, 王勇献, 张理论著. —北京: 科学出版社, 2019.3
ISBN 978-7-03-060673-0

I. ①数… II. ①刘… ②王… ③张… III. ①海洋学-声学-数值计算
IV. ①P733.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 038543 号

责任编辑: 闫 悦 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 16 插页: 5

字数: 304 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

声波能够在海水介质中远距离传播,是目前获取水下信息的主要方式,这使水下声传播计算与分析成为水下声信息对抗的核心内容。水声传播的物理过程受波动方程控制,声压(流体压强扰动)是空间与时间的四维变量,现阶段在时域内直接采用数值方法求解大范围海洋声场波动方程暂不可行。以潜艇为代表的水下兵器的声频谱一般具有窄带特性,时域内的波动方程可通过傅里叶变换转换为频域内空间三维的 Helmholtz 方程(Helmholtz equation, HE),每次只针对特定频率的声场进行计算,使声场求解难度显著降低,但在水声学发展的早期阶段,受当时计算机水平的限制,HE 计算量仍显过大。进一步对 HE 中的声学参数进行限定后,发展出多种水声模型,如射线法(高频)、简正波法与快速场(参数水平分层)、抛物方程(parabolic equation, PE, 假设距离方向密度不变,远场近似,只考虑向外辐射波)法等。这些传统水声模型具有计算稳定、速度快的突出优点,已获得广泛应用;但当超出模型限定条件时,传统水声模型的模型误差与海洋声学参数的不确定性混合在一起,使水声传播计算结果的可信度降低。

事实上,传统水声模型在 20 世纪 90 年代就已经趋于成熟,以 Bellhop(射线)、Kraken(简正波)、FFP(快速场)、FOR3D(PE)为代表的开源软件也已被业界认可,此后模型算法发展相对缓慢。近二十多年来,高性能计算机内存与计算速度持续提升(超级计算机峰值速度每 10 年提升约 1000 倍),基于有限差分模板计算的偏微分方程隐式迭代数值算法也紧随硬件获得相应发展,促使航空航天数值风洞、气象与海洋数值预报等众多行业领域的数值模型精细度、时空分辨率显著提高。可以预见,以高性能计算机为硬件平台,以高分辨率海洋环境数据库(含历史数据和预报数据)为应用基础,以 HE 高阶精度离散算法为数学原理的数值海洋声学必将成为未来计算海洋声学(以传统水声模型为核心,并包含海洋环境噪声、声呐方程等多方面内容)发展的新分支,并带动海洋声学模型体系向精细化、量化深入发展。

数值海洋声学是海洋声学、计算数学、计算机科学的交叉学科,通过将海洋声学 HE(以及 PE)纳入科学计算体系中,从而借助计算数学、计算机科学领域最新成果获得持续发展的不竭动力。HE 形式虽然简单,但当求解区域包含辐射边界条件且计算区域内的波长个数较多时,不仅声场结构复杂,而且隐式迭代收敛速度很慢,即“易离散、难求解”,如何精确、快速地求解 HE 一直是计算数学

领域的经典课题。对海洋声学 HE 直接数值求解的思想,即来源于计算数学领域最新研究成果以及作者之前在计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)领域求解 Navier-Stokes 方程的工作经历,因此本书中的 HE 直接求解算法已经融入了在 CFD 中被成功运用的先进方法,并结合了部分计算数学领域 HE 加速求解技术,但海洋声学 HE 高波数情况下的三维海量网格、数值误差传播与进一步加快收敛速度仍是具有挑战性的课题。

本书有三个鲜明特色,一是较为细致、详细地理清海洋声学控制方程推导脉络,从流体力学控制方程开始,经 Euler 方程、时域波动方程到达频域 HE,再从三维直角坐标 HE 推导出二维柱坐标非齐次 HE(波数积分法求解)与三维柱坐标 PE(抛物方程法求解);二是多学科深度交叉,针对 HE 高阶精度有限差分直接求解这一数值海洋声学的核心问题,将当前 CFD 成套的先进技术融入其中,并将计算数学领域流行的 Jacobian-Free-Krylov 方法应用到 HE 隐式方程组求解,使得 HE 直接求解技术起点较高;三是构建的数值海洋声学体系较为完整,不仅建立了 HE 直接求解核心算法,并以 FOR3D 程序(PE)为例研究基于目前高性能计算机体系结构的海洋声学程序性能优化与并行算法,而且整理、发展出一套海洋水声环境数据库与声学参数模型,形成算法+平台+数据的数值海洋声学体系。

本书得到了湖南省自然科学基金项目(2017JJ2305)、国家自然科学基金项目(11272352, 61379056, 61702531, 51709267)、国防科技大学科研计划项目(ZK16-03-46)、国家重点研发计划(2016YFC1401800)、航天支撑技术基金(2014)的支持与资助。感谢国防科技大学气象海洋学院的王文珂、程兴华、肖汶斌、包长春、马树青、吴艳群、陈羽、周泽民、张振慧、赵云、张文、王得志等老师在平日工作中与作者进行的有益学术探讨,感谢研究生徐闽在 FOR3D 性能优化与并行算法设计、测试、分析等方面所做的工作。

由于作者水平有限,书中难免存在不足,恳请读者斧正,并真诚欢迎相关的学术探讨与交流,作者邮箱为 liuwe@nudt.edu.cn。

作 者

2018 年 7 月于长沙

国防科技大学

符 号 表

英文字母

A	线性方程组系数矩阵
A	平面波复声压幅值
B	波数积分法上、下边界声压与垂直振速（核函数）之比
c	声速
D	左手项对角矩阵
d	距离
$\hat{F}$	三维曲线坐标系 Helmholtz 方程 ξ 方向通量
f	x 方向通量，或所有网格点变量的 HE 函数
$\hat{G}$	三维曲线坐标系 Helmholtz 方程 η 方向通量
g	y 方向通量，或重力加速度矢量
$\hat{H}$	三维曲线坐标系 Helmholtz 方程 ζ 方向通量
h	z 方向通量
h	通用网格步长
I	单位矩阵
I	积分值
i	结构网格 ξ 方向索引
J	坐标变换的 Jacobian 行列式
j	结构网格 η 方向索引
K	考虑介质吸收的无量纲波数 $K = k\sqrt{1 + i\beta / 27.287527}$ ，或介质体积模量
k	无量纲波数 $k = L_{\text{ref}}\omega / c$ ，或结构网格 ζ 方向索引，或代表 ξ 、 η 、 ζ 中的任一方向

k'	波数 $k' = \omega / c$
L	左手项下三角矩阵
L	长度
M	预条件矩阵, 一般基于精确或近似 Jacobian 矩阵构造, 并进行适当调整
n	笛卡儿坐标系下的边界外法向单位矢量
P	时域波动方程中的声压, 或流体力学方程中的流体绝对压强
p_d	动力学压强(流体绝对压强 p 分解为静压强 p_s 与动力学压强 p_d , 即 $p = p_s + p_d$)
Q	流体力学守恒变量, $Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w)^T$
R	声源点到声场中某点的有向距离(矢径)
RHS	右手项, 即线性方程组等号右侧部分
R	声源点到声场中某点的距离(标量)
T	温度
t	时间
U	左手项上三角矩阵
u	x 方向速度
V	速度矢量
V	体积
v	y 方向速度
w	z 方向速度
x	直角坐标系坐标(轴), 或函数自变量
y	直角坐标系坐标(轴)
z	直角坐标系坐标(轴), 与 x 轴、 y 轴组成右手系

希腊字母

α	平面波的介质吸收(衰减)系数, 以 Neper/m 为单位
β	以 dB / λ 为单位的声介质吸收系数

λ	波长、矩阵特征值
ρ	密度
τ	虚拟时间
ϕ	复数相位角, 或波数积分法中频域无量纲声压的核函数
φ	单向声波程函 $p = Ae^{-i(\omega t - k_0 \varphi)}$, 或 $\varphi = kr$
ξ	曲线坐标系坐标(轴), 方向指向 i 向索引增大的方向
η	曲线坐标系坐标(轴), 方向指向 j 向索引增大的方向
ζ	曲线坐标系坐标(轴), 方向指向 k 向索引增大的方向
Ω	球体积
上标	
$\sim$	频域量
$-$	复共轭
$\wedge$	计算坐标系下的物理量
$*$	无量纲物理量, 或初始值
下标	
0	声源点值
b	边界, boundary
d	有量纲量的动态(dynamic)分量, 如有量纲压强 $p = p_s + p_d$ 、密度 $\rho = \rho_s + \rho_d$
n	垂直于边界的分量, normal
s	有量纲量的静态(static)分量, 或近声源的无量纲球面波(sphere), 如声压 $P_s = e^{ikR} / R$
∞	无穷大, 或无穷远
ref	特征量(或称参考量)

目 录

前言

符号表

第 1 章	海洋声学控制方程	1
1.1	流体力学控制方程	2
1.1.1	质量守恒方程	3
1.1.2	动量方程(N-S 方程)	4
1.1.3	状态方程	7
1.1.4	N-S 方程组	9
1.1.5	Euler 方程组	12
1.2	波动方程(时域)	12
1.2.1	波动方程	12
1.2.2	方程无量纲化	14
1.3	HE(频域)	15
1.3.1	变密度方程形式	15
1.3.2	标准方程形式	16
1.4	点源球面声场	18
1.4.1	近声源球面声场	18
1.4.2	特征声压	20
1.5	非齐次 HE	21
1.5.1	狄拉克 δ 函数	21
1.5.2	非齐次项形式	23
1.5.3	非齐次项处理	25
1.6	声强与传播损失	28
1.6.1	时间平均声强	28
1.6.2	声传播损失	31
1.7	实用原理	35
1.7.1	相似原理	35
1.7.2	互易原理	36
1.7.3	能量守恒律	39

1.7.4	介质吸收	40
第 2 章	波数积分法	42
2.1	深度分离方程	42
2.1.1	柱坐标下非齐次 HE	42
2.1.2	傅里叶-贝塞尔变换	44
2.1.3	深度方程	47
2.2	深度方程求解	51
2.2.1	垂直振速	51
2.2.2	非声源位置解	52
2.2.3	传递矩阵	54
2.2.4	声源界面条件	56
2.2.5	深度方程辐射条件	57
2.2.6	单向求解声矢量	60
2.2.7	双向求解声矢量	61
2.2.8	应力-位移势法	63
2.3	积分参数	66
2.3.1	水平距离	66
2.3.2	水平波数	67
2.3.3	积分路径偏移	68
2.3.4	最大截止波数	70
2.3.5	声源点附近的误差	73
2.4	快速场	75
2.4.1	近似 Bessel 函数	75
2.4.2	快速傅里叶变换	77
2.4.3	需要注意的问题	79
2.4.4	快速场改进模型	81
2.5	镜像法	85
2.5.1	单层均匀介质核函数	85
2.5.2	自由空间 Sommerfeld-Weyl 积分	89
2.5.3	镜像法数学原理	91
2.5.4	镜像法几何解释	102
2.6	波数积分法程序与算例	104
第 3 章	Helmholtz 方程数值算法	118
3.1	点声源三维 HE 隐式算法	118
3.1.1	直角坐标系隐式求解方法	119

3.1.2	曲线坐标系隐式求解方法	126
3.1.3	几何守恒律的几何解释	135
3.2	点声源二维 HE 隐式算法	144
3.2.1	直角网格隐式求解方法	145
3.2.2	曲线网格隐式求解方法	149
3.3	线性方程组求解	157
3.3.1	直接求解法	158
3.3.2	经典迭代法	160
3.3.3	投影类迭代法	162
3.4	预条件技术	163
3.4.1	预条件形式	163
3.4.2	预条件矩阵	164
3.5	定解条件	166
3.5.1	声源区处理	166
3.5.2	边界条件	167
3.5.3	收敛条件	173
第 4 章	抛物方程模型及其并行算法	175
4.1	柱面波与 Hankel 函数	175
4.1.1	无限自由空间下的声场	176
4.1.2	无穷远处声场渐进性分析	180
4.1.3	Hankel 函数拟合表达式	181
4.2	三维柱坐标抛物方程模型(PE)	183
4.2.1	数学模型	183
4.2.2	隐式迭代	186
4.2.3	离散格式	188
4.2.4	边界条件	189
4.3	FOR3D 性能优化与并行算法	190
4.3.1	高性能计算平台简介	191
4.3.2	单核上的串行优化	192
4.3.3	多核处理器上的多线程并行	197
4.3.4	串行优化与多线程并行综合运用	203
4.3.5	宽带声场 MPI+OpenMP 混合并行计算	204
第 5 章	海洋数据库与声学参数模型	207
5.1	地形数据库	207
5.1.1	ETOPO1 简介	207

5.1.2	数据格式	208
5.1.3	地形插值算法	210
5.2	沉积层声学厚度	211
5.3	海洋水文数据	213
5.3.1	深度转换压强	213
5.3.2	海水位温计算	214
5.3.3	海水密度计算	216
5.3.4	海水声速计算	218
5.3.5	海洋水文插值	219
5.4	地声参数模型	222
5.4.1	沉积层平均粒径	223
5.4.2	吸收系数模型	223
5.4.3	高频地声参数	224
5.4.4	中频地声参数	225
5.4.5	沉积层数据库	227
附录	COACH 软件结构与算例测试	228
参考文献		240
彩图		

第 1 章 海洋声学控制方程

声波动是声传播介质的物质运动，而声波动的数学方程(控制方程)描述了声学变量之间的关系，是计算与解释声学现象的理论基础。对于流体介质，声压实质上是由声传播引起的流体压强扰动，而流体压强本身满足流体力学方程，因此海洋声学控制方程需要向上追溯到流体力学方程。流体力学方程(Navier-Stokes 方程，简称 N-S 方程)忽略黏性、传热可得到 Euler 方程，Euler 方程在海水宏观静止、密度梯度为小量、声场小扰动假设(此时压强扰动量正比于密度扰动量)下可导出时域波动方程，时域波动方程经过傅里叶变换(或单频简谐波)可得到频域 Helmholtz 方程(Helmholtz equation, HE)，HE 在不同简化假设下可得到波数积分法、简正波法、射线法、抛物方程(parabolic equation, PE)法等水声模型，其中，波数积分法在单层均匀介质、软海底(沉积层声源不大于水体声速)情况下又可导出镜像法。一般来讲，上游声学控制方程(如 N-S 方程)计算量比下游方程大，对于海洋尺度的声学问题，HE 下游的水声模型实际应用较多。海洋声学控制方程族谱如图 1.1 所示。

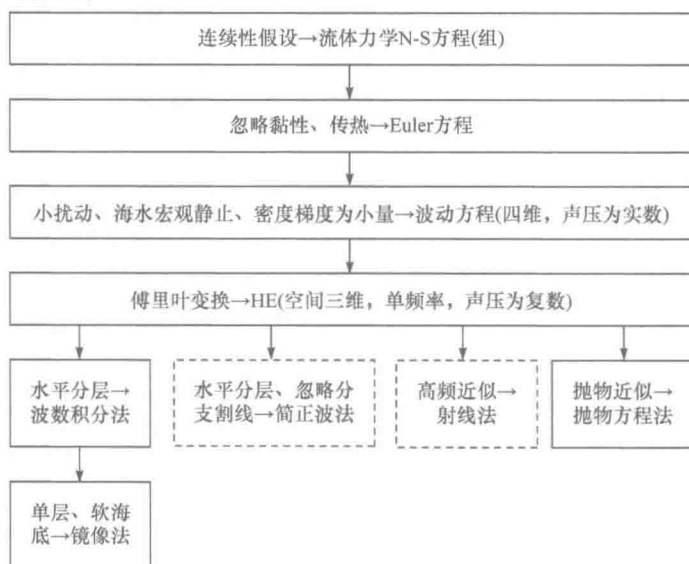


图 1.1 海洋声学控制方程族谱(本书未涉及虚框内容)

从方程的求解途径来看，HE 及下游水声模型可分为理论解法与数值算法，虽然二者最后都借助计算机完成声场计算，但还是有本质的不同。以波数积分、

简正波、射线等为代表的理论解法均是针对特殊的水声环境或频率导出的方法,如声场介质水平分层(层内介质参数均匀)、声波频率较高等,这些算法一般具有物理解释(可用于指导声学实验与计算),而且这些方法可“自启动”,即算法自身不需借助外部信息即可实现声场计算。相对而言,HE 与 PE 的求解与其他模型有所不同:①计算区域需要划分网格,采用有限差分等数值方法求解声场,而且网格尺寸与差分格式精度对计算结果有重要影响;②声源点的声压存在奇异性,使有限差分等数值算法需要借理论解法(如波数积分)提供声源附近区域的声压(HE)或初始场(PE),相当于需要提出声源边界条件(或称为源场),数值算法负责计算声源区之外的声压;③HE 对声学环境参数没有限制(PE 除了忽略距离方向密度变化对声学环境参数也没有限制),属于通用计算方法,而且 HE 解是没有模型误差(仅含数值误差)的“精确解”。

鉴于海洋声学 HE(与 PE)具有网格计算的特殊性,可将其与科学计算技术进行深度融合,构建高分辨率海洋声学数据库+高精度 HE 直接数值求解算法+高性能计算的数值海洋声学技术体系。从本质上讲,数值海洋声学可归属为计算海洋声学的新分支:计算海洋声学包含的内容较为广泛,其以波数积分、简正波、射线、抛物方程等传统水声模型为核心算法,强调快速、高效、实用,同时涉及海洋环境噪声、声呐方程、波束形成、匹配场处理等与海洋声学实际应用相关的多方面内容;而数值海洋声学在计算海洋声学的基础上,重点向上游 HE 直接求解发展(并兼顾三维 PE 数值算法),强调精确、通用,同时涉及海洋环境数据库与高性能计算等内容,如图 1.2 所示。

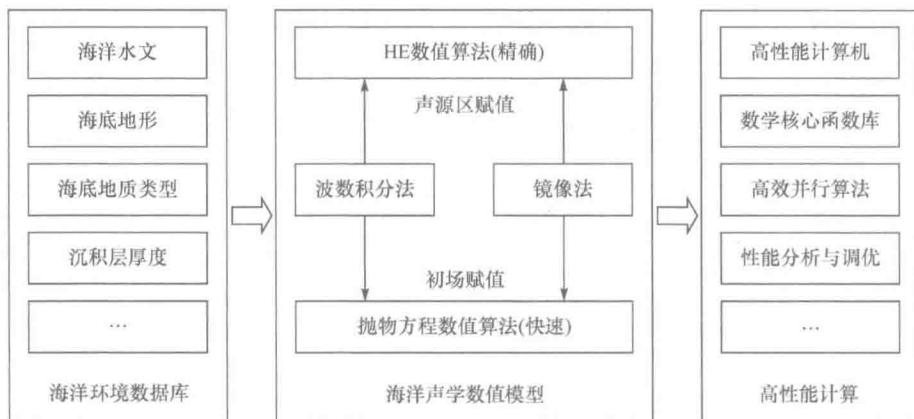


图 1.2 数值海洋声学主要内容示意图

1.1 流体力学控制方程

流体运动满足质量、动量(三个方向)与能量三大守恒定律,变量包括密度、

速度(三维矢量)、压强与温度共六个未知量,守恒律可提供五个方程,再补充一个状态方程可使方程组封闭^[1]。在流体力学方程中,温度一般作为计算环境声速与密度的参数(不是方程变量),换句话说,温度在控制方程解算流体速度、压强(与密度关联)时被视为“冻结”的不变参数,此时变量数减少一个,去掉能量方程(温度方程)即可封闭,因此流体力学 N-S 方程组仅包含质量守恒方程(也称连续性方程)、动量方程(也称 N-S 方程、矢量方程)与状态方程。

温度(与盐度)虽然没有出现在流体力学 N-S 方程组中(不与 N-S 方程组耦合求解),但可建立单独的输运方程,从而间接参与到 N-S 方程组的求解。对于非定常流动问题,在计算出某个物理时间步的流体力学变量后,将流体变量代入温度(与盐度)输运方程,求解下一时间步的温度(与盐度),再通过经验公式更新海水密度与声速,然后继续求解下一物理时间步的 N-S 方程组。

1.1.1 质量守恒方程

在连续介质假设下,流体微团集合的运动状态可采用流体动力学方程描述。当采用 Euler 法描述流体运动时,网格(流动区域)的位置固定,网格点的运动速度为零,流体微团穿过网格区域或网格单元构成的控制体。不失一般性,在直角坐标系内任意位置取一个长方体形状的控制体(图 1.3),此长方体的各条棱分别与 x , y , z 三条坐标轴平行,长方体在三个方向的长度分别为 Δx 、 Δy 、 Δz 。令该长方体体积无穷小,即 $\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$, $(\Delta x)^2$ (简记为 Δx^2)等二阶小量可忽略,则空间物理量在小长方体内可近似为线性分布,根据积分中值定理,长方体各个面上的物理量面积分等于面中心值乘以面积,体积分值等于体中心值乘以体积。

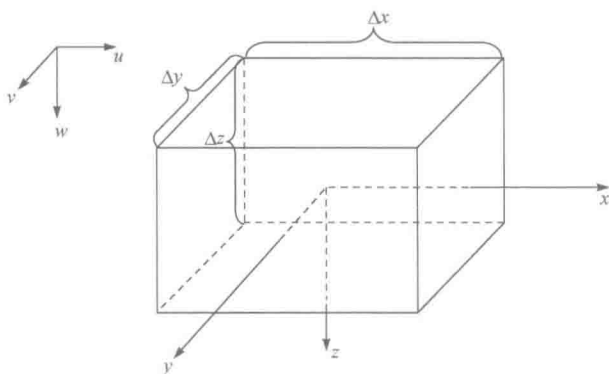


图 1.3 控制体示意图

将物理量保存在控制体中心,若定义流出控制体的 ϕ 通量为正,则 x 方向 ϕ 的净流出量等于 x 方向两个面上的通量之差:

$$\left[\phi u + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z - \left[\phi u - \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.1)$$

式中, u 、 v 、 w 分别为平行于坐标轴方向的三个速度分量。同理, y 方向与 z 方向的净流出量分别为

$$\frac{\partial(\phi v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad \frac{\partial(\phi w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.2)$$

设 ϕ 的产生项为 ϕ_p , 则守恒变量 ϕ 的通用方程形式为

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \phi_p \quad (1.3)$$

再定义梯度算子

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.4)$$

则

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (\phi u, \phi v, \phi w) = \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi w)}{\partial z} \quad (1.5)$$

因此通用方程形式也可化为

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \phi_p \quad (1.6)$$

根据通用方程可直接获得质量守恒方程。虽然海水密度对时间变化率是小量, 但并不为零, 而且密度在不同空间位置也可能不同, 即海水密度是时间与空间的函数。在质量方程(或称为连续性方程)中, 守恒变量 $\phi = \rho$ 、 $\phi_p = 0$, 质量方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

1.1.2 动量方程(N-S 方程)

1. 动量方程推导

根据动量定理, 封闭系统的动量增加率等于系统所受的外力, 开放系统的动量增加率加上流出系统的动量净流量等于系统所受的外力。动量方程按 x 、 y 、 z 方向分为三个方程, 守恒变量分别为三个方向的动量: $\phi_x = \rho u$ 、 $\phi_y = \rho v$ 、 $\phi_z = \rho w$, 守恒变量的产生项为三个方向的合外力: $\phi_{p,x} = F_x$ 、 $\phi_{p,y} = F_y$ 、 $\phi_{p,z} = F_z$ 。

作用于控制体上的力可分为体积力与表面力: 体积力直接作用在整个控制体上, 如重力、电磁力等; 表面力由外部流体直接作用在控制体表面, 由两部分组

成, 一是表面压力(流体运动与否均存在), 二是以黏性的方式作用于表面的切应力与正应力(由流体相对运动引起)。控制体 x 方向的受力情况如图 1.4 所示。

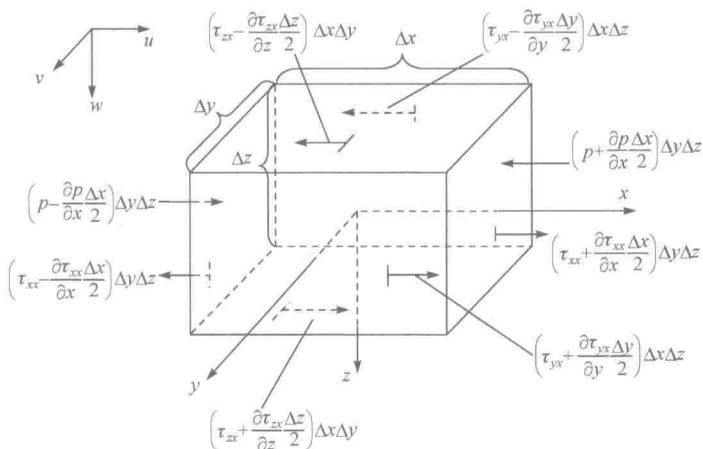


图 1.4 控制体 x 方向的受力示意图

其中, x 方向的合力为

$$\begin{aligned}
 F_x = & \rho f_x \Delta x \Delta y \Delta z + \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \Delta z \\
 & + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \Delta z \\
 & + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \Delta z \\
 & + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y \\
 = & \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \right) \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

式中, f_x 为单位质量流体所受的体积力; p 为流体(绝对)压强; τ_{xx} 为作用在垂直于 x 轴表面的正应力; τ_{yx} 为作用在垂直于 y 轴表面的 x 方向切应力; τ_{zx} 为作用在垂直于 z 轴表面的 x 方向切应力。根据守恒变量通用方程形式(1.3), x 方向的动量方程为

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = F_x \tag{1.9}$$

两端约去小长方体体积($\Delta x \Delta y \Delta z$):