

一本书，带你步入大学生数学建模竞赛的成功之路

主 编 肖华勇
副主编 周吕文 赵 松

大学生数学建模 竞赛指南（修订版）

全方位**指导**，涵盖大学生数学建模竞赛的各方面
超实用**精华**，浓缩历年经典数学建模模型和赛题
接地气**分享**，来自优秀导师和获奖队员亲身经验

 中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

大学生数学建模 竞赛指南 (修订版)

主 编 肖华勇

副主编 周吕文 赵 松

電子工業出版社

Publishin

Industry

内 容 简 介

本书是《大学生数学建模竞赛指南》一书的修订版，是一本指导大学生全方位备战数学建模竞赛的辅导书。本书从多角度介绍了数学建模及相关竞赛的背景知识，按照参赛流程解答数学建模竞赛的常见问题，介绍了数学建模竞赛中常用的软件，讲解数学建模的常用模型，精选典型赛题进行详解；邀请获奖学生和优秀指导教师分享成功经验，介绍参加数学建模竞赛过程中常用的网站。

本书在解答数学建模竞赛中的常见问题时，不仅解答组建团队、赛前准备和时间安排等问题，还解答了文献检索、撰写论文及论文排版的相关问题，旨在使读者对数学建模的整个流程有非常清晰的认识。

本书不仅介绍历年数学建模竞赛中常用的方法，分析相关的赛题，还详解实现的程序代码，让学生真正做到学以致用，而不是纸上谈兵。本书还邀请获奖学生和优秀指导教师，从不同的角度分享比赛中的成功经验，为参赛学生和教师提供不同角度的参考。

本书主要面向参加数学建模相关竞赛的大学生和指导教师，可以作为数学建模竞赛的辅导教程；也可供数学建模爱好者、应用数学和数学模型的教育工作者选用。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学建模竞赛指南 / 肖华勇主编. —修订本. —北京: 电子工业出版社, 2019.5

ISBN 978-7-121-35572-1

I. ①大… II. ①肖… III. ①数学模型—高等学校—教学参考资料 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 253906 号

责任编辑: 张瑞喜

印 刷: 中国电影出版社印刷厂

装 订: 中国电影出版社印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 24.25 字数: 575 千字

版 次: 2015 年 4 月第 1 版

2019 年 5 月第 2 版

印 次: 2019 年 5 月第 1 次印刷

定 价: 55.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: zhangruixi@phei.com.cn。

前言

PREFACE

近几年来，数学建模竞赛已成为大学生参与的热门竞赛。每年一届的中国大学生数学建模竞赛已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛，也是世界上规模最大的数学建模竞赛。大学生数学建模竞赛正以其独特的魅力吸引着各种专业、各种背景的老师和学生参与。

数学建模竞赛不仅是一项比赛，也是一种过程，一种理念，更是一种哲学。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。在实际应用中，有些问题或许已经能够用已有的算法和公式来求解，但更多的问题没有固定答案，而且无法用简单的数学算法和公式来解决，因而，数学建模方法便是解决问题的有效途径。数学建模所培养的思维方式与技能，对于大学生在将来的工作中或读研生涯中都会起到很大的帮助。对于工作或研究过程中的新问题，数学建模的思维方式与技能可以帮助学生快速地了解问题的背景，并由定性的分析转至定量的计算，从而给出比较有建设性的结论和指导性的意见。数学建模在企业的生产经营中有着举足轻重的地位，它在解决企业的运营成本、经济效益和社会效益等实际问题中发挥了重要作用；数学建模在对培养学生的科研能力方面有着其他专业课程无法替代的重要作用。在建立模型的学习过程中，学生需要查阅大量的文献资料，将实际问题抽象成数学模型，通过设计算法、模拟求解、撰写论文等，迅速提升学生们的实践能力，特别是做科学研究和撰写论文的能力。

本书通过对常用数学建模方法的讲解和实际问题的分析，培训学生思考、归纳、分析、创新的能力和技艺，同时也旨在帮助学生在大学生数学建模比赛中获得好成绩。

本书不只简单地介绍数学模型和案例，还全面地介绍数学建模和数学建模竞赛中的各个环节，包括团队组建时间安排、模型建立、程序实现以及论文写作，让参赛者对数学建模和竞赛有一个全面的认识，并能在比赛中做到运筹帷幄。

结合历年数学建模竞赛中的赛题，本书不仅介绍方法，列举并分析与比赛相关的案例，还给出并讲解实现的程序代码，让参赛者真正做到学以致用，而不是纸上谈兵。

本书邀请了近几年国赛和美赛中表现最优秀的参赛队来分析当年的赛题，讲述他们的模型和模型的程序实现，并分享比赛中的成功经验。让参赛的读者在全面了解国赛和美赛最优秀论文的同时，吸取成功者的经验。



本书还邀请了全国优秀指导教师来分析平时数学建模教学活动以及比赛前后指导过程中的经验，帮助年轻的数学建模老师更好地扮演指导教师这一角色。

本书由肖华勇担任主编，周吕文、赵松担任副主编。本书共分6章，第1章由谭欣欣、刚家泰和汪晓银编写；第2章由周吕文编写；第3章由周吕文、任立峰编写；第4章由肖华勇、周吕文编写；第5章由李文然、肖华勇、周吕文、熊风、舒毅潇、张家华编写；第6章由谭欣欣、肖华勇、周登岳、熊风编写。全书由周吕文、赵松统稿，肖华勇进行终审。

作为本书的总策划，数学家网站（原校苑数学建模论坛 www.mathor.com）积极地协调了各方面资源，使得本书得以顺利出版。在本书编写过程中，大连大学数学建模工作室的指导老师和学生（尤其是何玮、李祥、冯舒婷、沈治强等同学），不仅参与了具体工作，还给予我们很多支持和鼓励，在此表示感谢。另外本书的顺利编写和出版，还离不开谭忠、王钰聪、刘世尧、韩志斌、丁文超、李晶玲、董瑶、李蔓蔓、郑小娟、宋彦丽、徐平、邓赛、张哲、杨晓、张晶、师建鹏、李淑娟、刘思思、刘雅珊、秦国振等人的支持，在此表示感谢。

本次修订，除对第3章~第5章进行了新的内容补充，还对全书内容进行了仔细更正和完善。书中可能仍有疏漏和不妥之处，欢迎大家批评指正，衷心希望广大读者与任课教师提出宝贵的意见和建议，以便再版时修正。读者可以发邮件到 book@mathor.com 与我们交流。

编者
2019年5月6日

目录

CONTENTS

第 1 章 数学建模基本知识	1
1.1 数学建模简介	1
1.1.1 什么是数学建模	1
1.1.2 初等数学模型案例	3
1.1.3 数学建模的基本步骤与论文写作	8
1.2 数学建模竞赛	12
1.2.1 美国大学生数学建模竞赛	12
1.2.2 中国大学生数学建模竞赛	14
1.2.3 其他数学建模竞赛简介	16
1.3 数学建模活动与能力培养	20
1.3.1 数学建模与就业、升学、出国	21
1.3.2 企业中的数学建模问题	21
1.3.3 数学建模对科研和工作的影响	22
本章参考文献	22
第 2 章 数学建模中的团队合作	23
2.1 组建团队	23
2.1.1 程序员	23
2.1.2 写手	24
2.1.3 第三人	25
2.1.4 团队合作	25
2.1.5 赛前模拟	26
2.2 时间安排	26
2.2.1 赛前准备	26
2.2.2 第一天：开始比赛	27
2.2.3 第二天：建立模型	27
2.2.4 第三天：写作和修改	27



2.2.5	第四天：写作和润色	27
2.3	文献管理器	28
2.3.1	Zotero 的安装和配置	28
2.3.2	文献条目的保存	28
2.3.3	文献分类	29
2.3.4	文献引用	29
2.4	撰写论文	29
2.4.1	标题 (Title)	29
2.4.2	摘要 (Summary)	30
2.4.3	引言 (Introduction)	30
2.4.4	模型 (The Model)	31
2.4.5	解决方案 (The Solutions)	31
2.4.6	方案的比较 (Solution Comparison Methods)	31
2.4.7	结果 (Results)	32
2.4.8	结论—模型评价—改进方案 (Conclusions-S&W-Future Work)	32
2.4.9	参考文献 (References)	33
2.4.10	论文的结构	33
2.5	论文排版	34
2.5.1	LaTeX 软件的安装和使用	35
2.5.2	简单示例	35
2.5.3	小节生成	36
2.5.4	公式输入	36
2.5.5	项目符号列表	36
2.5.6	图片插入	37
2.5.7	表格插入	38
2.5.8	引用文献	38
	本章参考文献	39
第 3 章	软件快速入门	40
3.1	MatLab 快速入门	40
3.1.1	引言	40
3.1.2	变量	40
3.1.3	矩阵和数组运算	42
3.1.4	控制结构语句	45
3.1.5	MatLab 文件	46
3.1.6	作图	47
3.2	Lingo 入门	50

3.2.1 Lingo 基础知识讲解	50
3.2.2 Lingo 实例	57
第 4 章 常用模型与算法	66
4.1 图论	66
4.1.1 图论中 TSP 问题及 Lingo 求解技巧	66
4.1.2 最短路线算法及在建模中的应用	74
4.1.3 状态转移与图论模型的巧妙结合	86
4.1.4 最优树问题及 Lingo 求解	103
4.1.5 竞赛图与循环比赛排名问题	107
4.2 排队论模型	119
4.2.1 排队论基本构成与指标	120
4.2.2 排队论的四种重要模型	121
4.2.3 排队论的计算机模拟	130
4.3 数据处理的方法与模型	138
4.3.1 Logistic 模型	138
4.3.2 灰色模型及预测	145
4.3.3 神经网络方法	150
4.3.4 模糊综合评判法	154
4.3.5 水道测量数据问题	160
4.3.6 电池剩余放电时间预测	163
4.3.7 葡萄酒的评价问题	176
4.4 元胞自动机简介及其在数学建模中的应用	190
4.4.1 引言	190
4.4.2 方法介绍	192
4.4.3 应用举例	197
4.5 启发式算法简介及其在数学建模中的应用	205
4.5.1 引言	205
4.5.2 模拟退火算法	208
4.5.3 遗传算法	213
本章参考文献	219
第 5 章 赛题解析	222
5.1 2013 CUMCM A	222
5.1.1 问题综述	222
5.1.2 分析与建模及求解	222
5.1.3 论文点评	246



5.2	2011 CUMCM B	247
5.2.1	问题综述	247
5.2.2	解答与程序	248
5.2.3	论文参考文献	284
5.3	2014 MCM A	284
5.3.1	引言	284
5.3.2	2014 MCM A 题特等奖论文	292
5.3.3	程序实现	304
5.3.4	论文点评	306
5.3.5	论文参考文献	306
5.4	2017 MCM B	308
5.4.1	引言	309
5.4.2	问题假设	311
5.4.3	仿蜂巢式收费站设计方案	311
5.4.4	模型设计	312
5.4.5	模型分析	321
5.4.6	结论	327
5.4.7	论文参考文献	327
5.5	2017 MCM D	328
5.5.1	摘要	333
5.5.2	引言	334
5.5.3	排队模型	334
5.5.4	模拟	340
5.5.5	评价/结果	342
5.5.6	改进模型	345
5.5.7	结论	346
5.5.8	附录	346
5.5.9	论文参考文献	357
第6章 经验分享：做一名成功的指导者和参赛者		358
6.1	优秀指导教师讲数学建模	358
6.1.1	数学建模活动是培养大学生创新能力的有效途径	358
6.1.2	谈谈我的数学建模路	363
6.2	获奖之路	366
6.2.1	成长比成功更重要	366
6.2.2	如何准备美国大学生数学建模竞赛	373
6.3	本章小结	380

第1章 数学建模基本知识

1.1 数学建模简介

1.1.1 什么是数学建模

提到数学，也许你的脑海里会浮出这样一幅画面：鸦雀无声的教室，监考老师用警惕的目光扫视着全场，考生们分秒必争，疯狂地写下心中那一道道数学难题的答案。

那什么是“数学建模”？

数学建模是指对现实世界的某一特定对象，为了特定的目的，做出一些重要的简化和假设，运用适当的数学工具得到一个数学结构，用它来解释特定现象的现实性态，预测对象的未来状况，提供处理对象的优化决策和控制，设计满足某种需要的产品等。

你玩过“人鬼过河”的游戏吗？三个人和三个鬼要过河，只有一条船，船上最多可以乘两个人或两个鬼或一人一鬼，但河岸上鬼的数量不能大于人的数量，否则人会被鬼所吞噬。那么，怎样合理设计过河路线才能保证这三个人安全渡到河的对岸呢？显然这是一个锻炼人的逻辑思维的游戏，也许你会一遍遍地尝试，寻找合理的过河方法。而它，从逻辑思维角度分析就是一道数学建模题目。因此，我们可以通俗地说，数学建模是生活中的智力游戏。

你喜欢旅游吗？你想把全中国的每个省市的名胜景点都走一遍吗？那么怎样设计一条旅行路线才能让我们的行程最短，所需费用最少呢？或许你会打开百度地图，一遍遍地计算，寻找最短行程。但是走进数学建模的世界，你会发现只需要在电脑上敲出几行代码，做一个小程序，就可以轻松地计算出最短距离。这就是数学建模里面著名的“TSP”问题。显然，我们也可以说数学建模是帮助我们解决生活中的小问题，让我们更好地享受生活。

你们班有 60 人，现有一个出国留学的名额，那么你能够拥有这个机会的可能性有多少？也许你会不假思索地给出答案： $1/60$ 。也许你的答案是正确的，但是从数学建模的角度分析，你的答案就不是那么有说服力了，因为你忽略了事情的前提条件。考虑到每个同学的家庭经济状况及同学的性别、年龄、意愿等诸多因素，你出国留学的概率又会是多少呢？数学建模可以帮助我们解决这些学习或工作中的问题。

讲述了这三个生活中常见的小事，不知你对建模是否有了更进一步的了解。从理论上讲，数学建模，虽名曰数学，但又与纯数学竞赛有着天壤之别。它既不是纯粹的数学竞赛，也不是纯粹的计算机竞赛，而是涉及多学科、多领域，考查学生处理实际问题的综合能力。





它不像考试，更像是一个课题小组在规定的时间内完成一项任务。

郑州大学的石东洋教授解释道：“数学建模就是以各学科知识为基础，利用计算机和网络等工具，来解决实际问题的一种智力活动。它既不是传统的解题，也不同于其他赛事，而是更重视应用与创新，以及动手能力的考查。”

随着社会的发展，数学在社会各领域中的应用越来越广泛，不仅运用于自然科学的各个领域，而且渗透到经济、军事、管理及社会活动的各个领域。但社会对数学的需求并不只是需要专门从事数学研究的人才，而且需要在各部门中从事实际工作的人善于运用数学的思维方法来解决他们每天面临的大量的实际问题。对于生活中复杂的实际问题，发现其内部规律，用数学语言将其描述出来，进而把这个复杂的实际问题转化为一个简化的数学问题，这就是数学模型，建立数学模型的过程就是数学建模。当然，复杂的实际问题中有许多因素，在建立模型中不可能毫无遗漏地将其全部考虑在内，只考虑其中最主要的因素就可以了，这样就可以用数学工具和数学方法去解答工作中的实际问题。

那么你见过数学建模竞赛的场面是什么样的吗？它和常规的数学竞赛一样两个小时一张试卷吗？当然不是。有人这样描述：全国乃至世界范围内的大学生，来自不同学院、不同专业的建模爱好者们，三人一队，一起参加历时三天三夜或四天四夜的建模比赛。他们有的在娴熟地操作着电脑，聚精会神地凝视着电脑屏幕上的一篇篇文献；有的两眼紧紧盯着屏幕上来回滚动的数字和符号，仿佛在看武侠小说、侦探片、世界杯；有的则在堆积如山的建模书里翻来覆去地搜索着。每位建模者都有对赛题的独特观点和见解，他们彼此交流，只为找到自己建模思路中的某个“元件”，从而完善自己的建模大厦。当然，数学建模竞赛并没有一个固定的答案，完成数学建模赛题的关键在于团队的创新能力。而人的创造力是没有顶峰的，每个团队都应竭尽全力，没有最好，只有更好。因此每年全国评出的优秀答卷几乎都有不足之处，这并不奇怪，因为答卷的优秀与否是相对而言的。

数学建模的益处当然不仅仅在于比赛的过程使人增长知识，开阔视野，更在于对我们日后的学习或工作也有很大帮助。中国科学院攻读空间物理博士学位的一位建模爱好者说：“我目前的工作是分析卫星数据，从中抽取相关物理规律。这是个非常烦琐的过程，并且还需要学习一些计算机语言、编程序、看大量英文文献、和导师及一些专家合作讨论。可以说，在数学建模活动中锻炼的这几年，让我对目前的这些困难能够应付自如。”

毕业后走入工作岗位的一位建模爱好者这样描述：“目前我在一家大型电子商务公司做平台运营，负责七个店铺在四个平台中的日常销售。电子商务中无数的数据之间相互影响、相互依托，让我更乐于用建模的思维去思考因子之间的相关性，进行客户的行为分析、地域分析，分析访客量、浏览量、转化率对成交金额的影响，提升店铺 DSR 评分，提高转化率，促进成交金额，使我在平凡的工作中表现得更加自信，在复杂的数据之间更加从容。”

21 世纪以来，人类已经进入到以计算机、网络、数码、光纤、多媒体为主要标志的信息时代，量化、数字化的技术得到了飞速发展，并应用于各个领域，培养应用型数字人才已迫在眉睫。数学建模，不仅丰富了大学生的课余生活，开拓了他们的视野，让全国乃至世界的大学生站在同一个平台上角逐，更为他们以后顺利走入工作岗位奠定了基础。

现在，你该知道什么是数学模型和数学建模了吧！从错综复杂的实际问题中，经过合理的分析、假设，抓住主要矛盾、忽略次要矛盾，得到一个用数学的符号和语言描述的表

达式，这就是数学模型。综合运用所学知识，选择适当的方法加以解决就是数学模型的求解。这种从实际中提出问题、建立数学模型到模型求解的完整过程就是数学建模。

1.1.2 初等数学模型案例

数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实；只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时，才可以用来指导实际，完成实践—理论—实践这一过程。

现实世界中有很多问题，它的机理比较简单，一般用静态、现态、确定性模型描述就能达到建模的目的，基本上可以用初等数学模型的方法来构造和求解模型。

初等数学模型中的大多数问题都是很早就提出来了，这些问题简直像天方夜谭似的极其有趣，表面上看无从下手。而数学建模则是将原型进行适当的简化、提炼而构成的一种原型代替物。这种代替物并不是原型原封不动的复制品。原型有各个方面和各种层次的特征，模型只反映了与某种目的有关的那些方面和层次的特征，从而达到解决某个具体问题的目的。

例 1：人、猫、鸟、米均要过河，船上除 1 人划船外，最多还能运载 1 物，而人不在场时，猫要吃鸟，鸟要吃米，问人、猫、鸟、米应如何过河？

模型假设

人、猫、鸟、米要从河的南岸到河的北岸，由题意，在过河的过程中，两岸的状态要满足一定条件，所以该问题为有条件的状态转移问题。

模型建立

我们用 (w, x, y, z) , $w, x, y, z = 0$ 或 1 ，表示南岸的状态，例如 $(1, 1, 1, 1)$ 表示它们都在南岸， $(0, 1, 1, 0)$ 表示猫、鸟在南岸，人、米在北岸；很显然有些状态是允许的，有些状态是不允许的，用穷举法可列出全部 10 个允许状态向量， $(1, 1, 1, 1)(1, 1, 1, 0)(1, 1, 0, 1)(1, 0, 1, 1)(1, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 1)(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0)(0, 1, 0, 1)$ 。

模型求解

将 10 个允许状态用 10 个点表示，并且仅当某个允许状态经过一个允许决策仍为允许状态，则这两个允许状态间存在连线，从而构成一个图，如图 1-1 所示。在其中寻找一条从 $(1, 1, 1, 1)$ 到 $(0, 0, 0, 0)$ 的路径，这样的路径就是一个解，可得下述路径图。

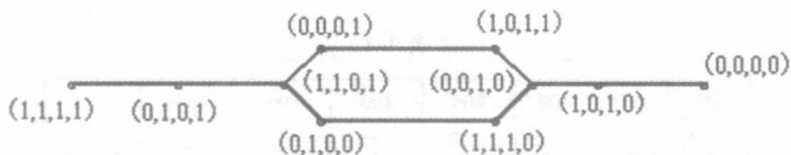


图 1-1

由图 1-1 可见，以上两个解都是经过 7 次运算完成的，均为最优解。



模型推广

这里讲述的是一种规格化的方法,所建立的多步决策模型可以用计算机求解,从而具有推广的意义,适当地设置状态和决策,确定状态转移律,建立多步决策模型,是有效解决很广泛的一类问题的方法。

例 2: 某新婚夫妇急需一套属于自己的住房。他们看到一则房产广告:“名流花园之高尚住宅公寓,供工薪阶层选择。一次性付款优惠价 40.2 万元。若不能一次性付款也没关系,只付首期款为 15 万元,其余每月 1977.04 元等额偿还,15 年还清(公积金贷款月利息为 3.675‰)。问贷款额为多少?

模型假设

贷款期限内利率不变;银行利息按复利计算。

符号定义

A (元): 贷款额(本金); n (月): 贷款期限; r : 月利率; B (元): 月均还款额; C_k : 第 k 个月还款后的欠款。

模型建立

将该递推数列变形为:

$$C_k - \frac{B}{r} = (1+r) \left(C_{k-1} - \frac{B}{r} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

利用等比数列得到一般项公式为:

$$C_n - \frac{B}{r} = \left(C_0 - \frac{B}{r} \right) (1+r)^n$$

由 $C_n = 0$ 有:

$$A = \frac{B}{r} - \frac{B}{r} (1+r)^{-n} = \frac{B}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

模型求解

带入: $n=180$ 、 $r=0.003675$ 、 $B=1977.04$

则: $A=260000$ (元) (因每月还款 1977.04 只能精确到分,实际计算结果为 259999.4 元)。

例 3: 世界纪录的赛跑数据如表 1-1 所示。

表 1-1

距离 x (m)	100	200	400	800	1000	1500
时间 t	9.95"	19.72"	43.86"	1'42.4"	2'13.9"	3'32.1"

研究运动员跑过的距离长度是怎么影响其成绩的?

模型假设

运动员的成绩仅与跑过的距离长度相关,即不考虑运动员的自身差异及场地、环境等差异的影响。

模型建立

在坐标系上将数据对应的点一一标出来,如图 1-2 所示,这些点大致分布在一条直线附近,猜想两者之间有线性关系。

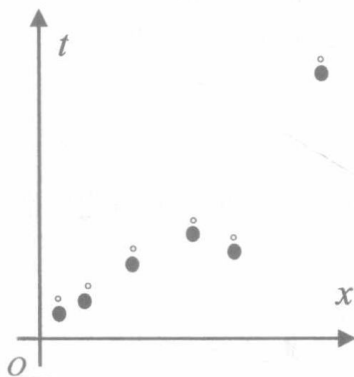


图 1-2

模型修正

由于数据点并不严格在一条线上,设想其误差由长度以外的其他因素所导致,因此,模型修改为

$$t_i = f(x_i) + \varepsilon_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

模型求解

利用二元函数最小值的方法,不难求得:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i t_i - n \bar{x} \bar{t}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = 0.1455$$

$$a = \bar{t} - b \bar{x} = -9.99$$

$$t = -9.99 + 0.1455x$$

例 4: 投掷铅球的最佳角度问题。

用数学方法研究体育运动是从 20 世纪 70 年代开始的。1973 年,美国的应用数学家 J·B·开勒发表了赛跑的理论,并用他的理论训练中长跑运动员,取得了很好的成绩。几乎同时,美国的计算专家艾斯特运用数学和力学,并借助计算机研究了当时铁饼投掷世界冠军的投掷技术,从而提出了他自己的研究理论,据此改进了投掷技术的训练措施,并使这位世界冠军在短期内将成绩提高了 4 m。这些都说明了数学在体育训练中发挥着越来越明显的作用。



在铅球投掷训练中,教练关心的核心问题是投掷距离。而距离的远近主要取决于两个因素:速度和角度。在这两个因素中,哪个更为重要呢?

模型假设

铅球投掷训练涉及的变量很多,为简化问题,我们在下面的模型中,将不考虑铅球运动员在投掷区域内身体的转动,只考虑铅球的出手速度与投射角度这两个因素。并作如下假设:

- (1) 忽略铅球在运行过程中的空气阻力作用;
- (2) 投射角度与投射初速度是相互独立的两个量;
- (3) 将铅球视为一个质点。

模型建立

先考虑铅球从地平面以初速度 v 和角度 θ 投掷出的情形。如图 1-3 所示,铅球在点 P 处落地。

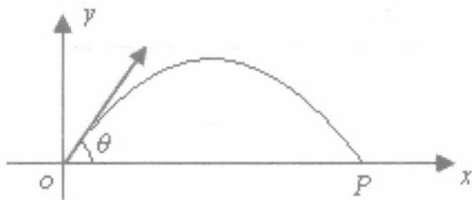


图 1-3

先来求铅球的运动方程。

设铅球在时刻 t 的动点坐标为 (x, y) , 得运动方程:

$$\begin{cases} x = v \cos \theta \cdot t \\ y = v \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去方程中的参变量 t , 得到关于 x, y 的关系式:

$$y = \frac{g}{2v^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x$$

为了求出铅球落地处的坐标, 只需令 $y=0$, 解得:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

其中 x_1 是铅球起点的坐标, x_2 是铅球落地时点 P 的坐标。

若 v 固定, 则投掷距离是投射角 θ 的函数。当 $\theta=45^\circ$ 时, 投掷距离达到最大值, 这时的投掷距离为 $\frac{v^2}{g}$ 。这就是说, 按 45° 角投掷时, 投掷的距离最远。

然而, 上述模型与实际是有差距的。这是因为, 铅球不是从地面上出手的, 而是从一定的高度处出手的。因而上面的方程应调整为:

$$\begin{cases} x=v\cos\theta\cdot t \\ y=v\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2+h \end{cases}$$

消去 t ，得到：

$$y=-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+h$$

令 $y=0$ ，得方程：

$$-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+h=0$$

解之得：

$$x_{1,2}=\frac{v^2\sin2\theta}{2g}\pm\sqrt{\left(\frac{v^2\sin2\theta}{2g}\right)^2+\frac{2v^2h\cos^2\theta}{g}}$$

舍去负根，得到点 P 的坐标为：

$$x=\frac{v^2\sin2\theta}{2g}+\sqrt{\left(\frac{v^2\sin2\theta}{2g}\right)^2+\frac{2v^2h\cos^2\theta}{g}}$$

即铅球的射程为：

$$\frac{v^2\sin2\theta}{2g}+\sqrt{\left(\frac{v^2\sin2\theta}{2g}\right)^2+\frac{2v^2h\cos^2\theta}{g}}$$

数值模拟：

取 $g=10\text{ m/s}^2$ ， $h=1.6\text{ m}$ ，利用这一公式，列表给出速度与角度对投掷距离的影响，如表 1-2 所示。

表 1-2

速度 v (m/s)	角度 α	距离 x (m)
11.5	47.5	14.929
11.5	45.0	15.103
11.5	42.5	15.182
11.5	41.6	15.189
11.5	40.0	15.169
11.5	38.0	15.092
11.5	36.0	14.960
11.0	41.6	14.032
12.0	41.6	16.395

从表 1-2 可以看出，当 $v=11.5\text{ m/s}$ 时，最佳角度为 41.6° （可用微积分知识得到）。当角度在 38° 到 45° 之间变化时，产生的距离差是 0.097 m ，角度 $\frac{45-38}{38}\approx 16\%$ 的偏差引起距离 0.06% 的偏差。速度从 11 m/s 变到 12 m/s 引起了距离从 14.032 m 到 16.359 m 的偏差，也就是说，速度 9% 的增加导致了距离 16.8% 增加。这个结果表明，教练在训练运动员时，



应集中主要精力来增加投掷的初始速度。

模型评价

(1) 上面的模型比较粗糙,还有许多因素没有考虑到,例如运动员的身体转动,投掷者的手臂长度,肌肉的爆发力、铅球的质量,等等。加上以上诸因素后,得出的公式自然会更精确,但处理起来会复杂得多。

(2) 关于速度与角度的偏差百分率的计算,是否可以比较还值得商榷。

(3) 铅球投掷问题的数学模型,可以应用于铁饼、标枪或篮球投篮等投掷问题,读者不妨用类似上面的方法进行研究。

当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时,往往都离不开数学的应用,而建立数学模型则是这个过程的关键环节。

1.1.3 数学建模的基本步骤与论文写作

1.1.3.1 数学建模的基本步骤

通过以上几个例子,我们发现,建立数学模型的基本步骤就是解决一个实际问题的基本步骤。由于实际问题的背景、性质、建模的目的等方面不同,因此,建模要经过哪些步骤并没有固定的模式和标准。数学建模的基本步骤包括以下7个主要部分。

1. 模型准备及问题分析

当看到竞赛题目时,首先,需要剖析问题,抓住问题本质和主要因素,确定问题的关键词,查阅资料和文献,了解问题的实际背景、相关数据或相关研究进展情况,获得关键资料,并初步确定研究问题的类型。竞赛的问题都是来自实际生活中的各个领域,并没有固定的方法和标准的答案。所以,要明确问题中所给的信息点,把握好解决问题的方向和目的,仔细分析问题关键词和数据信息,可适当补充一些相关信息和数据(具有一定权威性),为接下来的模型建立奠定基础。

2. 模型假设

竞赛题目都是来自实际生活,所涉及的方面较广,受影响的因素较多,而在建模过程中不可能面面俱到,故需结合问题的实际意义,适当地将一些因素简化,但不能对问题主要因素影响太大。抓住问题关键、忽略次要因素,进行合理化的简要假设,这是为建模过程中排除一些较为难处理的情况,使建立的模型更趋优化和合理,也是评价一个模型优劣的重要条件。

3. 模型建立

通过所做的分析和假设,结合相关的数学基本原理和理论知识,将实际问题转化为数学模型,可以用数学语言、符号进行描述和表示问题的内在现象和规律。结合相关学科的专门知识,根据所提供的要求和信息,建立一个关于问题中主要变量与主要因素间的数学规律模型,可以以数学方程式、图形、表格、数据和算法程序等形式表示。但在建模过程