美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

105个代数问题:
来自AwesomeMath夏季课程

105 Algebra Problems：from the AwesomeMath Summer Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

105个代数问题:

来自AwesomeMath夏季课程

105 Algebra Problems: from the AwesomeMath Summer Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

余应龙 译

黑版贸审字 08 - 2017 - 031 号

内 容 简 介

本书从解题的视角来举例说明初等代数中的基本策略和技巧，书中涵盖了初等代数的众多经典论题，包括配方和二次方程、因式分解和代数恒等式、构造线性组合、不动点和单调性、地板函数、利用对称性等内容. 为了让读者能够对每章中讨论的策略和技巧进行实践，除例题之外，作者精选了 105 个问题，包括 52 个入门问题和 53 个提高问题，给出了所有这些问题的解答，并对不同的方法进行了比较.

本书适用于数学竞赛的教师及学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

105 个代数问题：来自 AwesomeMath 夏季课程/（美）蒂图 · 安德雷斯库（Titu Andreescu）著，余应龙译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019. 2

书名原文：105 Algebra Problems：from the AwesomeMath Summer Program
ISBN 978 - 7 - 5603 - 7796 - 4

Ⅰ. ①1… Ⅱ. ①蒂…②余… Ⅲ. ①初等代数
Ⅳ. ①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 267120 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张永文
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm × 1092mm　1/16　印张 12. 25　字数 220 千字
版　　次　2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 7796 - 4
定　　价　58. 00 元

（如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换）

序　言

写这本书的主要目的是从解题的角度为初等代数的一些重要的章节提供一本入门书.在培训准备参加各种数学竞赛和考试的学生时,我观察到他们对于一些基本的代数技巧并不擅长.因为代数技巧不仅对代数本身至关重要,而且还涉及数学中的其他许多领域,缺乏这些知识会严重阻碍学生的发展.基于上述考量,我在这本入门书里采用了既简单,又具有挑战性的一些例题,并将此应用于各种不同类型的有意义的问题,目的是用来阐明一些重要的策略和技巧.本书是一系列此类书籍中的第一本.

考虑到本书的结构,一些有特色的内容是初等的,但也是经典的,包括分解因式、代数恒等式、不等式、代数方程和方程组.大体上避开了像复数、指数、对数等更进一步的概念,以及其他一些内容.但是有些问题由复数的性质构成,这些问题既具有挑战性,也使读者开阔了数学的眼界.每一章都关注一些特殊的方法和策略,并提供一定数量的有关例题,逐步加深复杂性和难度.为了帮助读者验证是否掌握理论部分的内容,在本书后面的一些章节中,收集了 52 道入门题和 53 道提高题.所有这些问题都有解答,其中有些问题采用多种解法,这些解法后面还提出了为何这样解的依据.

让我们共享这些问题吧!

余应龙

译　者　序

本书共分两部分，前一部分展示了初等数学中常用的方法，用较高的观点分析各种类型的例题的解法；后一部分收集了美国数学夏令营的许多集训题，并给出详尽的解答．

全书内容广泛，题型新颖、丰富，解答深入浅出，推理严密，方法各异．本人译完全书后，真有大开眼界之感．深感该书不失为一本优秀的著作，值得我国数学竞赛辅导教师、数学爱好者和对数学竞赛有兴趣的学生学习和参考．

读者在阅读后一部分的问题时，请先不看解答，仔细审题，独立思考一下，然后对照解答，这将会有更大的收获．

为保持原著的风格，有些数学名称仍采用原著的提法，如韦达（Vieta）关系式、韦达公式，我国教材和一般书籍中的提法是韦达定理．

考虑到读者查阅的方便，对一些人们熟知的外国人名采用中文译名，如牛顿（Newton）、韦达、柯西（Cauchy）、拉格朗日（Lagrange）等，其余人名均保留英文译名，如Hölder，Schwarz，Hermite 等．

对刘培杰先生提供英文原著表示衷心感谢．对于译作中出现的疏漏和不足，希望读者不吝指正．

此外，对原著中的个别印刷错误做了更正．

余应龙

目　录

第 1 章　配方和二次方程

容易验证恒等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$成立(只要把$(a+b)^2$看作$(a+b)(a+b)$，将等式的左边展开即可).实际上，问题并没有那么简单，在大多数情况下恰恰需要我们做的是相反的事情：将给定一个二次式表示为平方和的形式(几个平方的一个线性组合).这种想法十分简单：确定表达式中的一个变量，譬如说x，变为某实系数a,b,c(可能是另一些实数的复杂表达式)的关于x的二次三项式ax^2+bx+c.于是我们进行配方

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

这里$\Delta=b^2-4ac$是二次三项式ax^2+bx+c的判别式.由于所有的x都出现在$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$中，所以这样就可以消去其他处的变量$x$，但是$-\dfrac{\Delta}{4a}$本身也许是(也许不是)不同变量的某个二次式，所以我们能够以同样的理由将它写成平方和的形式.

特别地，前面的讨论还可以应用于二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

这里a,b,c是给定的实数，a是非零实数(如果$a=0$，那么就得到线性方程)，在配方过程中，应该是

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

的形式.

如果该方程有实数解，那么左边必须是非负的(因为左边是实数的平方)，于是右边也是非负的，这就意味着$\Delta\geqslant 0$.在这种情况下，我们可以利用求平方根的方法解该方程了.最后得到该方程的解为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

当且仅当$\Delta=0$时，这两个根相等.这样我们可以将上面的讨论做以下总结：

定理 1.1　设a,b,c是实数，$a\neq 0$，再设$\Delta=b^2-4ac$，那么二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

(1)当$\Delta<0$时，方程没有实数根.

(2)当 $\Delta=0$ 时,方程恰有一个实数根.

(3)当 $\Delta>0$ 时,方程有两个实数根.

注意到上面的讨论也给出解二次不等式,或证明二次不等式的很好的方法:

由于

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

所以可以看出当 $\Delta\leqslant 0$ 时,表达式 ax^2+bx+c 的符号不变(与 a 同号). 另一方面,如果 $\Delta>0$,并且 $x_1\leqslant x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数解,那么不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 等价于 $a(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0$. 如果 $a>0$,等价于 $x\in[x_1,x_2]$. 如果 $a<0$,等价于 $x\notin(x_1,x_2)$. 为了总结方便,假定 $a>0$,于是:

(1)如果 $\Delta=b^2-4ac<0$,那么对一切实数 x,有 $ax^2+bx+c>0$.

(2)如果 $\Delta=0$,那么对一切实数 x,有 $ax^2+bx+c\geqslant 0$,当且仅当 $x=-\frac{b}{2a}$时,等号成立.

(3)如果 $\Delta>0$,那么方程有两个实数根,设 $x_1<x_2$,当且仅当 $x\in(x_1,x_2)$时,$ax^2+bx+c<0$.

这一系列的讨论基于以下重要事实(这是分析中的一般定理的特殊情况):

定理 1.2 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一个二次多项式,再设 $u\leqslant v$ 是实数,且有 $f(u)f(v)<0$,那么方程 $f(x)=0$ 至少有一个解属于 (u,v).

证明 因为 $f(x)$ 在 u,v 之间改变符号,其判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 必为正,于是方程 $f(x)=0$ 有两个不同的解 $x_1<x_2$. 如果这两个解都不属于 (u,v),那么由前面的讨论表明 $f(u),f(v)>0$,或者 $f(u),f(v)<0$(由 a 的符号而定). 但是这与假定 $f(u)$ 和 $f(v)$ 异号矛盾.

实际上,上面的定理对于任何多项式函数(更一般地说,对于连续函数)都成立,但是证明已超出本书的范围. 关于二次方程的另一个很重要的结果是:

定理 1.3 (二次方程的韦达关系)设 a,b,c 是实数,$a\neq 0$,x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$$

证明 由于方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两根 x_1,x_2,所以必满足多项式的等式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

比较对应项的系数相等,得到

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$$

这就是我们要证明的.

要指出的是,上面的证明对于复数根、重根也成立,证明也相同.

现在是该实践的时候了:我们将会看到上面一些理论是怎样应用于实际的.

例 1.1 解方程

$$\frac{(2x-1)^2}{2}+\frac{(3x-1)^2}{3}+\frac{(6x-1)^2}{6}=1 \tag{1}$$

解 将方程(1)中的各项展开,然后按照降幂排列得到以下一些等价的方程

$$2x^2-2x+\frac{1}{2}+3x^2-2x+\frac{1}{3}+6x^2-2x+\frac{1}{6}=1$$

$$11x^2-6x=0 \text{ 或 } x(11x-6)=0$$

于是,解出 $x=0$ 或 $x=\frac{6}{11}$.

例 1.2 已知方程

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{nx}+\frac{1}{x+1}=0$$

有实数解,求整数 n 的最大值.

解 将方程连续变形

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{nx}$$

于是$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{nx}$,$(-2n+1)x^2=1$. 因为 $x^2\geqslant 0$ 对一切实数 x 都成立,所以 $-2n+1>0$,于是 $n\leqslant 0$. 但是 $n\neq 0$,否则$\frac{1}{nx}$无意义,所以 n 的最大值至多是 -1. 而且 $n=-1$ 的确给出实数解 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$和 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以答案是 $n=-1$.

例 1.3 解方程组

$$\begin{cases}x-y=3\\x^2+(x+1)^2=y^2+(y+1)^2+(y+2)^2\end{cases}$$

解 利用这样一个事实,即第一个方程很简单,且有表达式 $x=y+3$,于是将它代入第二个方程,得到

$$(y+3)^2+(y+4)^2=y^2+(y+1)^2+(y+2)^2$$

展开后,合并同类项,得到等价的方程

$$2y^2+14y+25=3y^2+6y+5 \text{ 或 } y^2-8y-20=0$$

解这个方程得到 $y=-2,10$,由于 $x=y+3$,所以得到解:$(x,y)=(1,-2)$和$(13,10)$.

例 1.4 求值

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$$

其中 $1 \leqslant x < 2$.

解 首先将每个分式化简,再将分母配方,得到

$$x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2$$

和

$$x-2\sqrt{x-1}=x-1-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}-1)^2$$

于是,注意到$\sqrt{a^2}=|a|$和$\sqrt{x-1}-1<0$这一事实(由于$x<2$),得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}&=\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{1-\sqrt{x-1}}\\&=\frac{2}{(1+\sqrt{x-1})(1-\sqrt{x-1})}\\&=\frac{2}{1-(x-1)}=\frac{2}{2-x}\end{aligned}$$

例 1.5 解方程组

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=-1\\ y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\\ z+\dfrac{1}{x}=2\end{cases}$$

解 思路很简单:一切方程都用同一个变量表示,即第一个方程中的 x 可以用 y 表示,得到 $x=-1-\frac{1}{y}$. 由第二个方程得到

$$z=\frac{2}{1-2y}$$

把这两个式子代入最后一个方程,得到

$$\frac{2}{1-2y}-\frac{y}{1+y}=2$$

对所得方程去分母,化简后,得 $y+2y^2=0$.

注意到 $y\neq0$,否则$\frac{1}{y}$无意义. 最后得到 $y=-\frac{1}{2}$. 回到 $x=-1-\frac{1}{y}$,$z=\frac{2}{1-2y}$,得 $x=z=1$,于是该方程组有唯一解$(x,y,z)=(1,-\frac{1}{2},1)$.

例 1.6 解方程

$$\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{4x-1}+\frac{1}{7x-1}=1$$

解 如果我们想去分母,那么就会变得很复杂,于是把原方程改写为

$$\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{4x-1}=1-\frac{1}{7x-1}$$

或者等价于

$$\frac{4x-1+3x-1}{(3x-1)(4x-1)}=\frac{7x-1-1}{7x-1}$$

注意到公因式 $7x-2$ 已经给我们一个解：$x=\frac{2}{7}$. 假定 $x\neq\frac{2}{7}$ 是另一个解，两边除以 $7x-2$，得

$$\frac{1}{(3x-1)(4x-1)}=\frac{1}{7x-1}\text{或者 } 12x^2-7x+1=7x-1$$

可进一步化简为：$6x^2-7x+1=0$. 解这个二次方程，得到该方程的另两个解：$x=1,\frac{1}{6}$. 于是本方程有三个解：$\frac{2}{7},1,\frac{1}{6}$.

例 1.7　求一切正实数对 (a,b)，使

$$4a+9b=\frac{9}{a}+\frac{4}{b}=12$$

解　将第二个方程改写为

$$\frac{9b+4a}{ab}=12$$

由于已知分子等于 12，于是 $ab=1$，即 $b=\frac{1}{a}$.

将 b 的这个值代入方程 $4a+9b=12$，得 $4a+\frac{9}{a}=12$. 去分母后，得到二次方程 $4a^2-12a+9=0$，该方程有唯一解 $a=\frac{3}{2}$. 回到原方程组，得到 $b=\frac{2}{3}$.

例 1.8　如果 a 是实数，且 $a-\frac{1}{a}=1$，求 $a^4+\frac{1}{a^4}$ 的值.

解　容易看出，这道例题不能去解方程 $a-\frac{1}{a}=1$，再将所得的值去计算 $a^4+\frac{1}{a^4}$（当然经过一连串复杂的计算是可以得到所需要的结果的，但是这并非是一种漂亮的方法）. 将给出的关系式 $a-\frac{1}{a}=1$ 的两边平方，得到

$$a^2+\frac{1}{a^2}-2=1$$

即 $a^2+\frac{1}{a^2}=3$.

接着所要做的就是重复上述过程，将最后一个关系式再平方，得到

$$a^4+\frac{1}{a^4}+2=9$$

于是

$$a^4+\frac{1}{a^4}=9-2=7$$

例 1.9 解方程

$$x^4-97x^3+2\ 012x^2-97x+1=0$$

解 关键在于该方程是对称的. 两边除以 x^2,得到

$$x^2-97x+2\ 012-\frac{97}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$,于是将上述方程转化为二次方程

$$y^2-97y+2\ 010=0 \text{ 或}(y-30)(y-67)=0$$

于是 $y=30$ 或 $y=67$. 回到 $y=x+\frac{1}{x}$,于是得到二次方程 $x^2-xy+1=0$. 解这两个方程:$x^2-67x+1=0$ 和 $x^2-30x+1=0$,得到解

$$x=\frac{67\pm\sqrt{4\ 485}}{2} \text{和 } x=15\pm\sqrt{224}$$

例 1.10 设 a,b,c 是实数,且 $a\geqslant b\geqslant c$. 求证

$$a^2+ac+c^2\geqslant 3b(a-b+c)$$

证明 将不等式改写为

$$3b^2-3b(a+c)+a^2+ac+c^2\geqslant 0$$

这是一个关于 b 的二次不等式,其判别式是

$$\Delta=9(a+c)^2-12(a^2+ac+c^2)=-3(a^2-2ac+c^2)=-3(a-c)^2\leqslant 0$$

于是多项式 $3x^2-3x(a+c)+a^2+ac+c^2$ 只取非负值(其首项系数 3 是正数). 特别是它在 b 处的值非负,就得到结果.

我们也可以试着配方,将不等式改写为

$$12b^2-12b(a+c)+4(a^2+ac+c^2)\geqslant 0$$

于是

$$3[2b-(a+c)]^2+(a-c)^2\geqslant 0$$

例 1.11 求证:对一切 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $3(x+y+1)^2+1\geqslant 3xy$.

证明 设 $x+y=a,xy=b$,于是只需证明 $3(a+1)^2+1\geqslant 3b$. 而方程 $t^2-at+b=0$ 有实数解 x,y,于是判别式非负,即 $a^2\geqslant 4b$(当然,因为该不等式等价于$(x-y)^2\geqslant 0$,所以也可给出直接的证明). 于是 $b\leqslant\frac{a^2}{4}$,且只要证明

$$3(a+1)^2+1\geqslant\frac{3a^2}{4}$$

两边乘以 4，并展开$(a+1)^2$，整理后将不等式化为

$$9a^2+24a+16\geqslant 0$$

等价于$(3a+4)^2\geqslant 0$，证毕.

注意，进行配方可以得到另一种解法

$$3\left(x+\frac{1}{2}y+1\right)^2+\left(\frac{3}{2}y+1\right)^2\geqslant 0$$

例 1.12　求一切实数对(x,y)，使

$$4x^2+9y^2+1=12(x+y-1) \tag{1}$$

解　先将方程(1)改写为以下形式

$$4x^2-12x+9y^2-12y+13=0$$

然后配方，得到

$$(2x-3)^2+(3y-2)^2=0$$

因为当且仅当每个平方都等于 0 时，平方和才等于 0，所以 $2x-3=0$，且 $3y-2=0$，有唯一解 $x=\frac{3}{2},y=\frac{2}{3}$.

例 1.13　求证：如果 $a\geqslant b>0$，那么

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\leqslant\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leqslant\frac{(a-b)^2}{8b}$$

证明　配方后得到

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

另一方面，$a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

两边除以$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$，于是归结为证明不等式

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b}$$

左边的不等式(乘以 $8a$ 后取平方根)等价于

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{a}$$

这直接可从 $a\geqslant b$ 得到. 右边的不等式可类似进行.

例 1.14　化简表达式：$\frac{4}{4x^2+12x+9}-\frac{12}{6x^2+5x-6}+\frac{9}{9x^2-12x+4}$.

解　显然不能通分！否则就会带来可怕的结果，于是解决该题的机会接近于零. 稍微分析以下该和式中各项的情况，特别要注意的是分母. 每一个分母都是 x 的二次多项式，所以自然想到是否能分解因式. 当然，乘积的和并不是明显的，但是可以指望分母有

公因式. 解二次方程 $4x^2+12x+9=0$, $6x^2+5x-6=0$ 和 $9x^2-12x+4=0$,或者配方,得到

$$4x^2+12x+9=(2x+3)^2$$

$$6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2)$$

$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2$$

原来并没有公因式,但是设 $a=2x+3$, $b=3x-2$ 后,形式就很漂亮了,于是原式简化为

$$\frac{4}{a^2}-\frac{12}{ab}+\frac{9}{b^2}=\frac{4b^2-12ab+9a^2}{(ab)^2}$$

容易看出分子是一个平方式 $(2b-3a)^2$.

由于

$$2b-3a=2(3x-2)-3(2x+3)=-13$$

得到等式

$$\frac{4}{4x^2+12x+9}-\frac{12}{6x^2+5x-6}+\frac{9}{9x^2-12x+4}=\left(\frac{13}{6x^2+5x-6}\right)^2$$

例 1.15 求以下方程的实数解

$$x^4+16x-12=0$$

解 设法找出 a,b,c,使方程的左边能写成 $(x^2+a)^2-(bx+c)^2$ 的形式. 如果能找到这样的 a,b,c,那么原方程就化为 $x^2+a=bx+c$ 和 $x^2+a+bx+c=0$.

恒等式 $x^4+16x-12=(x^2+a)^2-(bx+c)^2$ 等价于一连串等式

$$2a=b^2, 16=-2bc, a^2-c^2=-12$$

于是 $a=\frac{b^2}{2}$, $c=-\frac{8}{b}$,然后代入最后一式,得到

$$\frac{b^4}{4}-\frac{64}{b^2}=-12$$

设 $b^2=4d$,则方程变为 $4d^2-\frac{16}{d}=-12$,容易看出根 $d=1$. 于是可取 $b=2$,则

$$a=\frac{b^2}{2}=2, c=-\frac{8}{b}=-4$$

现在解方程 $x^2+2=2x-4$ 和 $x^2+2=-2x+4$. 因为第一个方程可化为 $(x-1)^2+5=0$,所以没有实数解,第二个方程可化为 $(x+1)^2=3$,于是解为

$$x_1=-1+\sqrt{3}, x_2=-1-\sqrt{3}$$

例 1.16 已知方程 $x^4-4x=1$ 有两个实数根,求这两个实数根的积.

解 为了将方程的左边配方,所以两边加上 $2x^2+1$,得到等价的方程

$$(x^2+1)^2=2x^2+4x+2=2(x+1)^2$$

这等价于 $x^2+1=\sqrt{2}(x+1)$ 或 $x^2+1=-\sqrt{2}(x+1)$. 第一个方程是 $x^2-\sqrt{2}x+1-$

$\sqrt{2}=0$,判别式 $\Delta=4\sqrt{2}-2>0$,所以有两个解 x_1,x_2. 根据韦达公式:$x_1x_2=1-\sqrt{2}$. 因为已知原方程只有两个实数根,这两个根必定就是我们求出的 x_1 和 x_2. 显然容易检验方程 $x^2+1=-\sqrt{2}(x+1)$ 没有实数根,因为其判别式为负. 于是本题的结果就是 $1-\sqrt{2}$.

我们也可以这样解该方程:求 a,b,c,对一切 x 有

$$x^4-4x-1=(x^2+a)^2-(bx+c)^2 \tag{1}$$

方程(1)等价于

$$2a=b^2,bc=2,a^2-c^2=-1$$

将 $a=\frac{b^2}{2},c=\frac{2}{b}$代入最后的方程,得到

$$\frac{b^4}{4}-\frac{4}{b^2}=-1$$

设 $b^2=4d$,则得到三次方程 $4d^3+d-1=0$,看出根 $d=\frac{1}{2}$. 于是 $b^2=2$,可取 $b=\sqrt{2}$,于是 $a=1,c=\sqrt{2}$. 因此,原方程就归结为解方程 $x^2+1=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 和 $x^2+1=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$. 像上面那样,得到实数根的积等于 $1-\sqrt{2}$.

例 1.17　求下面方程的实数解

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$$

解　如果展开乘积,那么方程就超出范围了,所以必定存在某些技巧. 我们尝试着确定左边的乘积配成两对因式. 如果把前两个因式组成一对,后两个因式组成一对,就得到方程 $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=360$,但这并不简单. 如果把第一个因式和第三个因式配成一对,那也不简单,如果把第一个因式和第四个因式各配成一对,那么就得到方程

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=360$$

虽然这是关于 x 的四次方程,但是如果设 $y=x^2+5x$,就得到二次方程. 如果解四次方程就很难,但解二次方程就可以直接解了. 这样 $(y+4)(y+6)=360$ 等价于 $y^2+10y-336=0$,其解为 $y=14$ 和 $y=-24$. 接着就要解 $x^2+5x=14$ 和 $x^2+5x=-24$. 第二个方程的判别式为负,所以没有实数解. 另一方面,方程 $x^2+5x=14$ 有解 $x=-7$ 和 $x=2$. 于是,这两个数都是原方程的解.

例 1.18　求所有的 $n>1$,对一切实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,都有

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant x_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$$

解　将原不等式改写为

$$x_1^2-x_1x_n+x_2^2-x_2x_n+\cdots+x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n+x_n^2\geqslant 0$$

配方后得到等价不等式

$$(x_1-\frac{x_n}{2})^2+(x_2-\frac{x_n}{2})^2+\cdots+(x_{n-1}-\frac{x_n}{2})^2-\frac{n-1}{4}x_n^2+x_n^2\geqslant 0$$

即

$$\left(x_1-\frac{x_n}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{x_n}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_{n-1}-\frac{x_n}{2}\right)^2\geqslant\frac{n-5}{4}x_n^2$$

如果 $n\leqslant5$,那么右边非正,左边非负,不等式成立. 另一方面,如果 $n>5$,那么可选 $x_1=\frac{x_n}{2},x_2=\frac{x_n}{2},\cdots,x_{n-1}=\frac{x_n}{2},x_n=1$,此时不等式不再成立. 于是,答案是 $n=2,3,4,5$.

第 2 章　因式分解和代数恒等式

有些经典的代数恒等式几乎在所有的数学分支中都起着至关重要的作用. 在本章中我们将回忆一下这些恒等式,并给出许多用于代数表达式进行因式分解的例子.

能识别对(某些复杂的)代数表达式进行因式分解是基本的,因为因式分解在解方程、解方程组、证明不等式时经常起着重要的作用.

最基本的恒等式是

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

这对一切实数 a,b(实际上要比实数广泛得多,但是从现在起,我们只限于实数)都成立,只要将右边展开,然后消去 ab 和 $-ab$ 即可. 这虽然很简单,但是这个恒等式分解或化简某些更为复杂的代数表达式时至关重要. 这也是更一般的,也有很难的恒等式的一种特殊情况,就是对 $a^n - b^n$ 进行局部因式分解. 注意到当 $a = b$ 时,$a^n - b^n$ 就等于零,所以 $a - b$必定是一个因式. 实际上,我们有

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

对一切实数 a,b 以及所有正整数 n 成立,展开后消去同类项,得到

$$\begin{aligned}&(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\\&= a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})\\&= a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^n - a^{n-1}b - \cdots - ab^{n-1} - b^n\\&= a^n - b^n\end{aligned}$$

例如,当 $n=3$ 时,得到很有用的恒等式

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

当 $n=4$ 时,得到

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

有人不禁要问我们是否还要对 $a^2 + ab + b^2$ 和 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 分解因式呢? $a^2 + ab + b^2$ 不能再分解了,但 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 是可分解的,这是因为

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = a^2(a+b) + b^2(a+b) = (a+b)(a^2 + b^2)$$

于是,得到

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$