

奥数精选 题库



美国数学邀请赛 试题解答〈上〉

(第二版)

朱华伟 付云皓 等 编译



科学出版社

奥数

数

精选

题

库



美国数学邀请赛 试题解答



(第二版)

朱华伟 付云皓 等 编译

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书收录了第1届(1983年)至第34届(2016年)AIME的全部试题,包括英文试题和中文译文,共855道题.对每一道试题均给出详解,有的还给出了多种解法,对部分试题还作了点评.试题的点评不拘形式,或是问题的引申和推广,或是类题、似题的分析比较,或是多种解法的优化点评,或是试题的来源、背景.目的是使读者开阔眼界,加深对问题的理解,培养举一反三的能力.

本书可供高中数学资优生,准备数学高考的考生,准备参加高中数学竞赛的选手,中学数学教师,高等师范院校数学教育专业大学生、研究生、数学教师,数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

美国数学邀请赛试题解答(上)/朱华伟等编译.—2版.—北京:科学出版社,2018.6

(奥数题库精选)

ISBN 978-7-03-056430-6

I. ①美… II. ①朱…②付… III. 数学—竞赛题—题解 IV. ①O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第017421号

责任编辑:李 敏/责任校对:陈玉凤

责任印制:肖 兴/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年5月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018年6月第 二 版 总印张:42

2018年6月第一次印刷 总字数:1 000 000

定价:180.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

主要作者简介

朱华伟，二级教授，特级教师，博士生导师

美国加利福尼亚州立大学洛杉矶分校高级访问学者，湖北省十大杰出青年，享受国务院政府特殊津贴专家。

兼任国际教育数学协会常务副理事长，国际数学竞赛学术委员会副主席，国际中小学生数学能力检测学术委员会副主席，中国教育数学学会常务副理事长兼秘书长，全国华罗庚金杯赛主试委员，多次参与中国数学奥林匹克、全国高中数学联赛、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克及青少年数学国际城市邀请赛的命题工作，曾任国际数学奥林匹克中国队领队、主教练，率中国队获团体冠军。

在国内外学术期刊上发表论文 100 余篇，出版著作 100 余部。

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于

青少年的课外兴趣活动,积极的对策不应当是限制堵塞,而是开源分流.发展多种课外活动,让更多的青少年各得其所,把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可,数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

摘自《走进教育数学》丛书总序

第二版前言

美国是数学大国，也是数学竞赛的强国。无论是普及的程度还是提高的程度，它的数学竞赛水平均属上乘。在历届国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad, IMO）中美国国家队成绩优秀，曾6次获得IMO团体总分第一，最为辉煌的是1994年在中国香港举办的第35届IMO，美国队夺得团体冠军，6名队员全部以满分夺取金牌，创下了IMO历史上难以超越的记录。2015年、2016年美国队连续两次获得IMO团体冠军。

美国的数学竞赛有着悠久的历史，早在1938年，美国就开始举行大学低年级的数学竞赛——普特南（William Lowell Putnam）数学竞赛。美国中学生数学竞赛也有60多年的历史，美国的中学数学竞赛有：美国高中数学竞赛（AHSME）、美国数学奥林匹克（USAMO）、美国数学邀请赛（American Invitational Mathematics Examination, AIME）及美国初中数学竞赛（AJHSME）。2000年开始AHSME和AJHSME改为美国数学竞赛（American Mathematics Competitions, AMC），同时分成了AMC8, AMC10和AMC12。AMC10供10年级和10年级以下的同学参加，AMC12则供12年级和12年级以下的同学参加，比赛时间在每年2月份举行。AMC8供8年级和8年级以下的同学参加，AMC8的比赛时间在每年11月份举行。

AMC10和AMC12的卷面为25个选择题，考试时间75分钟，

每题答对 6 分, 不答 1.5 分, 答错 0 分, 满分 150 分. 在 AMC10 和 AMC12 中获得高分的学生应邀参加 AIME, 第一届 AIME 于 1983 年 3 月 22 日举行, 它的卷面包括 15 道填空题, 每题 1 分, 每道题的答案都是 000 到 999 之间的一个整数, 不允许使用计算器, 要求考生在 3 小时完成 (1985 年以前时间为 2 个半小时). 在 AIME 和 AMC 上表现均突出的美国近 300 名学生进入 USAMO, USAMO 与 IMO 类似, 分两天考试, 每天 4.5 小时, 考 3 道题. 在 USAMO 中获得高分的学生组成美国国家集训队, 经过约 3 周的选拔后, 选出 6 名选手参加当年的 IMO.

AIME 的试题新颖别致, 内容广泛, 灵活性强, 其中有些题目具有较高的抽象性, 要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析问题解决问题的能力. AIME 的目的是确定大学之前阶段在数学方面杰出的学生, 选拔 USAMO 的参加者. AIME 试图为数学方面有优势的高中生提供挑战并认识其才干的机会, 为数学质优者提供进一步发展数学才干、提升数学兴趣的途径. AIME 的价值还在于赛前的准备及赛后对赛题的进一步思考和讨论.

应美国数学协会 (MAA) 数学竞赛委员会 (Committee on the American Mathematics Competitions) 的邀请, 2009 年中国数学会普及工作委员会 (AMC 中国区组织委员会) 开始组织国内一些知名中学的同学参加 AMC 活动, 目的是为“学有余力”和“学有兴趣”的数学爱好者和数学特长生提供一个对外交流及展示自己的窗口和平台, 让大家通过这项活动感受不同文化国度对数学学习的要求. 由于竞赛时采用的试卷与美国中学生用的完全一样, 因此参加 AMC 活动的中学生将与美国的中学生共用一份完全相同的英文试卷, 以便大家能够和美国的中学生得到相同的感受, 能

够使同学们在做数学题的同时也得到语言能力方面的训练, 这和实践着的“双语学习”活动是相一致的.

2009 年度的 AMC 有两次, AMC10 (A), AMC12 (A) 的时间是 2009 年 2 月 10 日 (星期二); AMC10 (B), AMC12 (B) 的时间是 2009 年 2 月 25 日 (星期三); AIME I 的时间是 2009 年 3 月 17 日 (星期二); AIME II 的时间是 2009 年 4 月 1 日 (星期三). 中国区决定选择参加了 2009 年 2 月 25 日举行的 AMC (B). 一般情况下, 参加 AMC10 的前 1% 的考生和参加 AMC12 的前 5% 的考生取得参加 AIME 的资格. 2009 年的分数线是: AMC12 (A) 的成绩要达到 97.5; AMC12 (B) 的成绩要达到 100; AMC10 的成绩要达到 120. 全球参加 3 月 17 日 AIME I 的学生有 5625 人, 平均分 3.92. 全球参加 4 月 1 日 AIME II 的学生有 4400 人, 平均分 4.16. 中国区选择参加了 4 月 1 日进行的 AIME II. 共有 2347 人取得资格, 实际参赛 2157 人. 中国区最高分: 14. 在美国, $\text{USAMO index} = \text{AMC 成绩} + 10 \times \text{AIME 成绩}$. 参加 AMC 12 的学生的 USAMO index 要达到 201.0; 参加 AMC 10 的学生的 USAMO index 要达到 215.0 (同时 AIME 的成绩要达到 7 分).

“他山之石, 可以攻玉.” 本书收录了第 1 届 (1983 年) 至第 34 届 (2016 年) AIME 的全部试题, 包括英文试题和中文译文, 共 765 道题. 对每一道试题均给出详解, 有的还给出了多种解法, 对部分试题还做了评注. 试题的评注不拘形式, 或是问题的引申和推广, 或是类题、似题的分析比较, 或是多种解法的优化点评, 或是试题的来源、背景. 目的是使读者开阔眼界, 加深对问题的理解, 培养举一反三的能力.

参加本书编译工作的还有郑焕、蔡琳、邹宇、侯煜群、周弋

林、杨姍、黄国春、周阳、李苹芳、曹路路、陈泽桐、张传军、黄星等,在本书的编译中,编译者参考了 *The Contest Problem Book V-American Invitational Mathematics Examinations (AIME) 1983-1988*、*AIME Solutions Pamphlet 1995-2000*,也参阅了一些中外文书刊,在此向原作者表示衷心的感谢。中国数学会普及工作委员会主任吴建平教授,IMO 美国国家队领队冯祖鸣博士对本书的编译提供了很大的帮助,在此向他们表示真诚的感谢。对于本书存在的问题,恳请读者不吝赐教。

朱华伟

2018 年 1 月

第一版前言

美国是数学大国，也是数学竞赛的强国。无论是普及的程度还是提高的程度，它的数学竞赛水平均属上乘。在历届国际数学奥林匹克 (International Mathematical Olympiad, IMO) 中，美国国家队成绩优秀，曾4次获得IMO团体总分第一，最为辉煌的是1994年在中国香港举办的第35届IMO，美国队夺得团体冠军，6名队员全部以满分夺取金牌，创下了IMO历史上难以超越的记录。

美国的数学竞赛有着悠久的历史，早在1938年，美国就开始举行大学低年级的数学竞赛——普特南 (William Lowell Putnam) 数学竞赛。美国中学生数学竞赛也有60多年的历史，美国的中学数学竞赛有：美国高中数学竞赛 (AHSME)、美国数学奥林匹克 (USAMO)、美国数学邀请赛 (American Invitational Mathematics Examination, AIME) 及美国初中数学竞赛 (AJHSME)。2000年开始AHSME和AJHSME改为美国数学竞赛 (American Mathematics Competitions, AMC)，同时分成了AMC8、AMC10和AMC12。AMC10供10年级和10年级以下的同学参加；AMC12则供12年级和12年级以下的同学参加，比赛时间在每年2月份；AMC8供8年级和8年级以下的同学参加，比赛时间在每年11月份。

AMC10和AMC12的卷面为25个选择题，考试时间75分钟，每题答对6分，不答1.5分，答错0分，满分150分。在AMC10和AMC12中获得高分的学生应邀参加AIME，第一届AIME于

1983年3月22日举行, AIME的卷面包括15道填空题, 每题1分, 每道题的答案都是000到999之间的一个整数, 不允许使用计算器, 要求考生在3小时完成(1985年以前时间为2个半小时). 在AIME和AMC上表现均突出的美国近300名学生进入USAMO, USAMO与IMO类似, 分两天考试, 每天4.5小时, 考3道题. 在USAMO中获得高分的学生组成美国国家集训队, 经过约三周的选拔后, 选出六名选手参加当年的IMO.

AIME的试题新颖别致, 内容广泛, 灵活性强, 其中有些题目具有较高的抽象性, 要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析问题解决问题的能力. AIME的目的是确定大学之前阶段在数学方面杰出的学生, 选拔USAMO的参加者. AIME试图为数学方面有优势的高中生提供挑战并认识其才干的机会, 为数学质优者提供进一步发展数学才干、提升数学兴趣的途径. AIME的价值还在于赛前的准备及赛后对赛题的进一步思考和讨论.

应美国数学协会(MAA)数学竞赛委员会(Committee on the American Mathematics Competitions)的邀请, 2009年中国数学会普及工作委员会(AMC中国区组织委员会)开始组织国内一些知名中学的同学参加AMC活动, 目的是为“学有余力”和“学有兴趣”的数学爱好者和数学特长生提供一个对外交流及展示自己的窗口和平台, 让大家通过这项活动感受不同文化国度对数学学习的要求. 由于竞赛时采用的试卷与美国中学生用的完全一样, 因此参加AMC活动的中学生将与美国的中学生共用一份完全相同的英文试卷, 以便大家能够和美国的中学生得到相同的感受, 能够使同学们在做数学题的同时也得到语言能力方面的训练, 这和实践着

的“双语学习”活动是相一致的。

2009 年度的 AMC 有两次, AMC10(A), AMC12(A)的时间是 2009 年 2 月 10 日(星期二); AMC10 (B), AMC12 (B) 的时间是 2009 年 2 月 25 日(星期三); AIME I 的时间是 2009 年 3 月 17 日(星期二); AIME II 的时间是 2009 年 4 月 1 日(星期三)。中国区决定选择参加了 2009 年 2 月 25 日举行的 AMC (B)。一般情况下, 参加 AMC10 的前 1% 的考生和参加 AMC12 的前 5% 的考生取得参加 AIME 的资格。2009 年的分数线是: AMC12 (A) 的成绩要达到 97.5; AMC12 (B) 的成绩要达到 100; AMC10 的成绩要达到 120。全球参加 3 月 17 日 AIME I 的学生有 5625 人, 平均分 3.92。全球参加 4 月 1 日 AIME II 的学生有 4400 人, 平均分 4.16。中国区选择参加了 4 月 1 日进行的 AIME II。共有 2347 人取得资格, 实际参赛 2157 人。中国区最高分: 14。在美国, $\text{USAMO index} = \text{AMC 成绩} + 10 \times \text{AIME 成绩}$ 。参加 AMC 12 的学生的 USAMO index 要达到 201.0; 参加 AMC 10 的学生的 USAMO index 要达到 215.0 (同时 AIME 的成绩要达到 7 分)。

“他山之石, 可以攻玉”。本书收录了第 1 届(1983 年)至第 28 届(2010 年) AIME 的全部试题, 包括英文试题和中文译文, 共 585 道题。对每一道试题均给出详解, 有的还给出了多种解法, 对部分试题还作了点评。试题的点评不拘形式, 或是问题的引申和推广, 或是类题、似题的分析比较, 或是多种解法的优化点评, 或是试题的来源、背景。目的是使读者开阔眼界, 加深对问题的理解, 培养举一反三的能力。

参加本书编译工作的还有郑焕、蔡琳、邹宇、侯煜群、周弋林、杨姗、黄国春、周阳等, 在本书的编译中, 编译者参考了 *The*

Contest Problem Book V-American Invitational Mathematics Examinations (AIME) 1983-1988, AIME Solutions Pamphlet 1995-2000, 还参阅了一些中外文书刊, 在此向原作者表示衷心的感谢. 中国数学会普及工作委员会主任吴建平教授, IMO 美国国家队领队冯祖鸣博士对本书的编译提供了很大的帮助, 在此向他们表示真诚的感谢.

对于本书存在的问题, 恳请读者不吝赐教.



2011 年 3 月

目 录

张景中谈奥数

第二版前言

第一版前言

<上>

第 1 章 第一届美国数学邀请赛 (1983)	1
1.1 AIME 试题	1
1.2 AIME 译文	2
1.3 AIME 解答与点评	4
第 2 章 第二届美国数学邀请赛 (1984)	18
2.1 AIME 试题	18
2.2 AIME 译文	20
2.3 AIME 解答与点评	21
第 3 章 第三届美国数学邀请赛 (1985)	33
3.1 AIME 试题	33
3.2 AIME 译文	35
3.3 AIME 解答与点评	36
第 4 章 第四届美国数学邀请赛 (1986)	48
4.1 AIME 试题	48
4.2 AIME 译文	50
4.3 AIME 解答与点评	51
第 5 章 第五届美国数学邀请赛 (1987)	60
5.1 AIME 试题	60
5.2 AIME 译文	62
5.3 AIME 解答与点评	64

第 6 章 第六届美国数学邀请赛 (1988)	73
6.1 AIME 试题	73
6.2 AIME 译文	75
6.3 AIME 解答与点评	76
第 7 章 第七届美国数学邀请赛 (1989)	85
7.1 AIME 试题	85
7.2 AIME 译文	87
7.3 AIME 解答与点评	88
第 8 章 第八届美国数学邀请赛 (1990)	101
8.1 AIME 试题	101
8.2 AIME 译文	102
8.3 AIME 解答与点评	104
第 9 章 第九届美国数学邀请赛 (1991)	116
9.1 AIME 试题	116
9.2 AIME 译文	118
9.3 AIME 解答与点评	120
第 10 章 第十届美国数学邀请赛 (1992)	133
10.1 AIME 试题	133
10.2 AIME 译文	135
10.3 AIME 解答与点评	137
第 11 章 第十一届美国数学邀请赛 (1993)	147
11.1 AIME 试题	147
11.2 AIME 译文	149
11.3 AIME 解答与点评	151
第 12 章 第十二届美国数学邀请赛 (1994)	164
12.1 AIME 试题	164
12.2 AIME 译文	166
12.3 AIME 解答与点评	168
第 13 章 第十三届美国数学邀请赛 (1995)	179
13.1 AIME 试题	179
13.2 AIME 译文	180
13.3 AIME 解答与点评	182

第 14 章 第十四届美国数学邀请赛 (1996)	193
14.1 AIME 试题	193
14.2 AIME 译文	195
14.3 AIME 解答与点评	196
第 15 章 第十五届美国数学邀请赛 (1997)	206
15.1 AIME 试题	206
15.2 AIME 译文	208
15.3 AIME 解答与点评	210
第 16 章 第十六届美国数学邀请赛 (1998)	222
16.1 AIME 试题	222
16.2 AIME 译文	224
16.3 AIME 解答与点评	225
第 17 章 第十七届美国数学邀请赛 (1999)	236
17.1 AIME 试题	236
17.2 AIME 译文	238
17.3 AIME 解答与点评	239
第 18 章 第十八届美国数学邀请赛 (2000)	250
18.1 AIME1 试题	250
18.2 AIME1 译文	252
18.3 AIME1 解答与点评	254
18.4 AIME2 试题	262
18.5 AIME2 译文	264
18.6 AIME2 解答与点评	266
第 19 章 第十九届美国数学邀请赛 (2001)	273
19.1 AIME1 试题	273
19.2 AIME1 译文	275
19.3 AIME1 解答与点评	276
19.4 AIME2 试题	282
19.5 AIME2 译文	284
19.6 AIME2 解答与点评	286
第 20 章 第二十届美国数学邀请赛 (2002)	293
20.1 AIME1 试题	293