B-S 及跳扩散模型下的期权定价

B-S ji Tiaokuosan Moxing xia de Qiquan Dingjia

杨云霞 著

中国农业大学出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

B-S及跳扩散模型下的期权定价

杨云霞　著

中国农业大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书共有8章，分四大块内容。第一块内容叙述了期权定价的研究现状、期权定价的发展方向以及期权定价理论。第二块内容给出了B-S期权定价模型以及B-S期权定价的扩展模型，并在这两个模型下给出了欧式期权定价公式。第三块内容是跳扩散模型下的期权定价，而跳扩散期权定价模型是B-S期权定价模型的推广。双指数跳扩散模型和加权平均指数跳扩散模型是跳扩散模型的延伸，在这两个模型下，主要给出了奇异期权的定价公式。最后一块内容是双指数跳扩散模型的MCMC估计，模拟试验表明双指数跳扩散模型能够体现资产收益的经验特征：尖峰厚尾特征和期权定价中的“波动微笑”。

本书可供金融工程专业和研究方向是金融数学与数量经济分析的应用数学专业的硕士研究生使用，也可供高等院校相关专业教师阅读。

图书在版编目(CIP)数据

B-S及跳扩散模型下的期权定价/杨云霞著．—北京：中国农业大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-5655-2044-0

Ⅰ.①B… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①期权定价-研究生-教材 Ⅳ.①F830.95

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第139376号

书　　名 B-S及跳扩散模型下的期权定价

作　　者 杨云霞 著

策划编辑 赵 中 李卫峰　　**责任编辑** 韩元凤

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社　　址 北京市海淀区圆明园西路2号　　**邮政编码** 100193

电　　话 发行部 010-62818525,8625　　读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617,2618　　出 版 部 010-62733440

网　　址 http://www.caupress.cn　　**E-mail** cbsszs @ cau.edu.cn

经　　销 新华书店

印　　刷 北京时代华都印刷有限公司

版　　次 2018年10月第1版　2018年10月第1次印刷

规　　格 787×1 092　16开本　8.5印张　150千字

定　　价 45.00元

前　言

金融衍生产品定价问题，是现代金融学理论研究领域中的核心内容，也是金融学理论应用于实际的主要理论基石，更是近三十年来应用数学在经济、金融等投资领域内的前沿热点研究课题。无论是理论上的探讨还是实际应用上的分析，它都具有重要的学术价值和社会经济意义。

自从 F. Black，M. Scholes 和 R. Merton 三人在确定金融衍生产品价值的创造性贡献以来，数学金融学的理论与应用研究得到了快速发展，取得了丰硕成果。随着金融实际研究的不断深入，特别是近年来重大金融突发事件的发生以及金融变革中的诸多问题，我们已经发现基于布朗运动和正态分布建立的 Black-Scholes 模型已不能完全适应现代金融市场的变化。1976 年，Merton 首次建立了标的资产价格的跳扩散模型，且在非系统跳风险、跳跃大小分布为正态的假设条件下研究了期权定价问题。至此在 Merton 工作之后，许多学者进行了广泛研究，取得了丰富的研究成果。然而，尽管 Black-Scholes 与 Merton 模型已成功应用到金融市场，但是近来的经验研究表明：在刻画资产价格波动上，它们与实际还存在较大偏差。主要表现为：①跳风险是不容忽视的，可能蕴涵了某种重要的经济现象；②资产收益分布可能具有非对称、尖峰厚尾特征以及“隐含波动率微笑”。

近几十年来，很多研究都是通过解释 Black-Scholes 模型的这两个缺陷来修正 Black- Scholes 公式，但是这些模型的一个共同问题就是很难获得期权定价的解析解。同样这些模型也没能很好地体现资产收益的尖峰厚尾和非对称特征，特别是尖峰厚尾特征。

在 2002 年，Kou 提出了双指数跳扩散模型，该模型最主要的特点就是能产生一个尖峰厚尾分布，更重要的是在双指数跳扩散模型下能给出易处理的欧式期权和奇异期权的解析定价公式。为此，双指数跳扩散模型已经获得了广泛的承认。本文利用鞅方法重新推导出了欧式期权和一些奇异期权的定价公式。由于加权平均指数分布能接近任意分布，因此，在双指数跳扩散模型的基础上，推广得到了加权平均指数跳扩散模型。然而，不管是哪个模型，模型的估计和实证分析至今还没有引起很高的重视。本文使用贝叶斯方法估计了双指数跳扩散模型，该方法是利用 Euler 方法对连续过程进行离散化，用离散过程的似然函数作为模型参数的近

似后验似然函数，证明了 MCMC 方法是分析双指数跳扩散模型的有效工具，由 MCMC 方法抽样所得的后验分布可以用来进行统计推断。

全书共 8 章，各章主要内容如下：

第 1 章绪言，主要叙述了期权定价的研究现状及期权定价的发展方向。

第 2 章期权理论，论述了期权的产生与发展、期权的定义、期权的分类、影响期权价格的一些因素及期权交易和股票期权的发展。

第 3 章 B-S 期权定价模型，在假设市场连续、无摩擦、无风险利率为常数、标的资产价格波动率为常数、标的资产价格服从对数正态分布、无交易费用、不支付红利等条件下给出了 B-S 微分方程，推导该方程得到 B-S 模型及该模型下欧式期权的定价公式，并对 B-S 期权定价模型进行了定性分析。

第 4 章 B-S 期权定价的扩展模型，将 B-S 模型中的假设条件放宽并加以修正，得到了支付红利的 B-S 期权定价模型及有交易费用的 B-S 期权定价模型，并在这两个模型下给出了欧式期权定价公式。

第 5 章跳扩散模型下的期权定价，在现实中，由于一些突发事件，资产价格并不是连续而均匀的，而是会发生一定的跳跃，因此在 B-S 模型的基础上给出了跳扩散模型，在该模型下，得到了欧式期权的定价公式及一些奇异期权：复合期权、再装期权和重置期权的定价公式。进一步，将跳过程推广为特殊的更新跳过程，并给出了更新跳扩散模型下欧式看涨期权和看跌期权的定价公式。实际上，跳扩散期权定价模型是 B-S 期权定价模型的推广。

第 6 章双指数跳扩散模型下的期权定价，引入 Kou 双指数跳扩散模型及基本知识，推导欧式期权定价公式。该模型与 Merton 模型不同，股价的跳跃比例服从双指数分布，具有非对称信息。在市场均衡条件下考虑跳风险的系统性，利用鞅方法重新推导期权定价公式并分析跳风险参数对期权价格的影响。其后讨论了双指数跳扩散模型下的欧式看涨期权价格与主要参数之间的关系：当其他参数不变时，期权价格随着执行价 K 的增大而减少；随着 Poisson 跳过程参数的增加而增大；随着扩散波动率 σ 的增加而变大；随着指数分布参数 η_1、η_2 的增大而减少。然后在此基础上分析期权隐含波动率和定价偏差现象，并比较了不同参数的欧式看涨期权定价偏差。最后在双指数跳扩散模型下，给出了障碍期权、回望期权、上限型买权、欧式双向期权、任选期权和滞后付款期权的定价公式。

第 7 章加权平均指数跳扩散模型下的期权定价，将双指数跳扩散模型进行延伸，给出加权平均指数跳扩散模型。模型中，资产价格的跳跃为指数分布的加权平均，而加权平均指数分布能接近任何分布。在加权平均指数跳扩散模型下，对回望期权的定价公式做拉普拉斯变换，并利用欧拉反演算和蒙特卡罗模拟两种方法得

到了回望期权的价格的数值结果，对上升入局看涨障碍期权做二重拉普拉斯变换，同样也是在欧拉反演算和蒙特卡罗模拟两种方法下得到的上升入局看涨障碍期权价格的数值结果，而其他障碍期权的定价可类似得到。

第 8 章双指数跳扩散模型下的 MCMC 估计，模型的应用必然涉及参数估计问题，使用贝叶斯方法估计了双指数跳扩散模型，该方法是使用欧拉方法对连续过程进行离散化，用离散过程的似然函数作为模型参数的近似后验似然函数，证明了 MCMC 方法是分析双指数跳扩散模型的有效工具，由 MCMC 方法抽样所得的后验分布可以用来进行统计推断。模拟试验表明，双指数跳扩散模型能够体现资产收益的经验特征：尖峰厚尾特征和期权定价中的“波动微笑”。

杨云霞

2018 年 3 月

目　　录

第1章 绪　言

在过去的半个世纪里，金融学的定量研究已经越来越引起人们的足够重视和广泛兴趣，尤其是20世纪90年代的全球性金融危机和近年来国际金融界发生的许多重大金融事件，让人们清楚地看到：人们对金融变革过程中存在的诸多问题产生了极大的关注，不论金融界还是学术界都加强了金融理论的研究和应用。但同时人们也越来越深刻地体会到，没有定量研究的思想方法，要驾驭"金融市场"简直是天方夜谭。然而定量研究的思想方法要直接依赖于数学。现在，数学化的思想和方法，已经深入广泛地应用到金融领域的研究过程中。随着现代信息技术的快速发展、成熟和广泛应用，以及全球经济紧密联系、互动性强、一体化程度越来越高，各种新型衍生金融产品的出现和迅猛发展是近十多年来国际金融中最重要的事件。据美国《幸福》杂志在2000年报道，目前国际金融市场上已知金融衍生工具已近2 000余种。一些银行、证券公司还在不断地推出新的"组合"衍生金融工具。金融创新的浪潮席卷全球，波及金融业务的各个领域，强劲地推进着金融市场一体化和金融业务国际化的进程。各种不同类型衍生工具的场内外交易数量、规模、效益、金额都非常大。作为当今"虚拟"经济时代的产品——衍生金融工具已经成为国际金融贸易中最大的交易对象。正因为如此，开展金融衍生产品定价问题的研究，才有举足轻重的理论价值和社会实践意义。

我国金融市场起步较晚，尚处在新生发展阶段，市场条件未完全成熟。对现代金融学理论和方法的研究相对落后，特别是金融实际问题的理论和应用研究更是如此。随着我国改革开放进一步加快和国民经济持续高速增长，居民收入有了显著增加，个人收入与消费支出也呈现多元化结构。我国经济金融环境发生了深刻变化，市场经济结构不断发育成长并逐步与国际接轨、参与国际市场竞争。各种金融衍生品的出现和新型市场的引入，已是势不可挡。特别是，股权分置改革、利率的市场化和汇率制度改革的推进，将推动我国金融市场研究的不断发展和完善。因此，建立符合实际发展规律的金融市场模型，并研究各种金融衍生品的定价问题，不仅可以有效地规避资金运作的风险，吸引投资者，而且有利于促进金融市场繁荣和提高管理决策能力。

由于期权具有良好的规避风险、风险投资和价值发现等功能，且表现出灵活性

和多样性特点，故近 20 年来，特别是 90 年代以来，期权成为最有活力的金融衍生产品，得到了迅速发展和广泛的应用。期权市场的快速发展得益于期权理论的不断深化。期权理论研究的重点在于两个方向：一个方向是如何构造出新的期权，以满足不断变化的市场投资需要；另一个方向是如何确定这些日趋复杂的期权的价值。在期权定价研究方面，80 年代以前的研究一般都假定期权所依赖的标的资产的价格为一连续随机过程，市场也是“完善”的，在这些比较理想化的假设条件下，指导出各种期权的定价模型。近 10 多年来，得益于计算机技术的快速发展，期权定价理论研究在以下两个方面得到深化，取得了大量研究成果：一是研究在不完善市场条件下如何确定期权价格问题；二是认为期权所依赖的标的资产价格是一连续随机过程假设条件过于理想化，将这个假设条件改进为基础资产的价格服从“跳扩散过程”来研究期权的定价问题。

1.1 期权定价研究现状

金融市场中有许多数学问题，期权定价（option pricing）问题是直接影响投资者利益的主要内容。期权作为金融衍生工具的重要一员，是投资者进行资本套期保值的“超级武器”，其定价研究是最广泛的。期权的价格实质是一种风险价格，影响期权价格的因素众多，包括标的资产当前价格、期权协议价格、标的资产价格的波动率和无风险利率等诸多因素。为了探讨它，让我们先简单回顾数学金融学的发展史。

金融学是从经济学分离出来的一门独立学科，早期金融学大多数是定性描述金融现象和规律。将数学理论和方法应用于金融，最早可追溯到 1900 年法国数学家巴舍利耶（L. Bachelier）发表的博士论文“投机理论（Theory of speculation）”，论文阐述了资本市场股票价格波动服从绝对的 Brown 运动，单位时间方差为 σ^2，且没有漂移，买方期权的价值为：

$$V = S\Phi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - X\Phi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \sigma\sqrt{\tau}\varphi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

其中 S 是股票价格，X 是执行价格，τ 是距到期日时间，$\Phi(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 分别是标准正态分布函数和正态密度函数。这一理论宣告了一门新的学科——数学金融学（又称数理金融学、金融数学）的诞生，它为现代期权定价理论的建立奠定了基础。

然而，Bachelier 的工作没有引起金融学界的重视达 50 多年。以现在的标准

来看，这一模型也许还是领先的，它只在两个方面稍有缺陷：一是在该模型中假设股票价格过程是绝对 Brow 运动——这允许股票价格为负，这与有限债务假设相悖，另一个是该模型忽略了资金的时间价值为正、期权与股票间的不同风险特征以及投资者的风险厌恶，因而在应用上受到限制。虽然有此不足，实际上该公式对预测短期看涨期权的价格非常适用。但在长期期权价格的判断中，因要求期权价格与期权的平方根成比例增加而失败。

在其后的半个多世纪里，期权定价理论进展甚微，多数发展集中于特定的经济计量模型，直到 20 世纪 60 年代才有一些新的进展。1952 年 H. Markowitz 发表了“组合投资选择理论（Theory of Portfolio Selection）”的论文，第一次从数量经济学的角度，揭示了金融市场中，如何利用投资组合创造更多的可供选择品种，来获取最大可能的预期收益率，以及如何通过分散投资来降低风险。这就是著名的证券组合投资理论，又称为均值-方差（Mean-Variable）模型。这一理论开创了现代金融投资分析理论研究的先河，标志了现代金融学的开始。

1961 年，斯普里克尔（Sprenkle）在“Warrant prices as indications of expectations”（认股权价格是预期和偏好的指示器）一文中，假设股票价格过程是对数分布，有固定的均值和方差，且该分布允许股票价格有正向漂移。以此假设为基础，他提出了一个买方期权的定价公式：

$$
\begin{aligned}
V = \mathrm{e}^{\alpha\tau} S\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
- (1 - \pi) X\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
\end{aligned}
$$

其中 π 是市场价格杠杆“price for leverage”的调节量。但是斯普里克尔没有贴现这一预期值来确定期权价值（当 π 取零时，上式给出了期权的最终预期值）。

1964 年，博内斯（Boness）在“Elements of a theory of stock-option values”（股票期权价值理论的要素）一文中，也假定股票收益呈固定对数分布，不同的是，Boness 考虑了风险保险的重要性，为了简明，博内斯假定“投资者不在乎风险”。利用这一假设证明了用股票的预期收益率来贴现最终期权的预期值。他的期权定价公式为：

$$
V = S\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \mathrm{e}^{\alpha\tau} X\Phi\left(\frac{\ln(S/X) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
$$

其中 α 是股票的预期收益率。这一等式在形式上与后面的 B-S 公式完全相同，唯一的区别是它的用法。此处是股票的预期收益率而不是无风险收益率，假如博内斯将投资者不在乎风险的价格代以逻辑结论 $\alpha=\gamma$，他将推导出 B-S 方程，当然，他的推导仍需建立在风险中性的假设基础上。

1965 年，萨缪尔森(Samuelson)认识到，由于不同的风险特征，股票与期权的预期收益率一般来说是不同的，他在“Rational theory of warrant pricing”(认股权定价的合理理论)一文中提出了一个欧式买方期权的定价模型，该模型考虑了期权和股票的预期收益率因风险特性的差异而不一致，并认为期权有一个更高的预期收益率 β。该模型的定价公式为：

$$
V=\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)\tau}S\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)-\mathrm{e}^{-\beta\tau}X\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(\beta-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
$$

1969 年，萨缪尔森和默顿(R. C Merton)用一种资产组合选择的简单均衡模型检验了期权定价理论，这种模型允许内生地确定股票和期权收益率，他们证明了期权问题可以用函数形式的“公共概率”项来表述，这种函数形式与用真实概率所表述的问题一样。以这种方式表示时，调整过的股票预期收益率和期权收益率是一样的。这一方法使用了被现在认为是理所当然的估价期权的风险中性或偏好自由发展的发展成果。

上述期权定价模型的提出推动了期权定价理论的发展，但是，金融学界对证券是否有一种内在定价机制一直争论不一，期权定价问题仍然困扰着人们。1973 年 F. Black 和 M. Scholes 共同发表了一篇关于期权定价的开创性论文，创造性地归纳出一条广泛应用于金融市场期权定价的显示表达式，即被人们称誉的著名 Black-Scholes 公式。它为金融领域的经济评估奠定了定量分析的基础，并被理论界和金融实业界广泛接受和使用。同年，R. C. Merton 将 Black-Scholes 定价公式推广：股票可以连续支付红利，无风险利率和标的资产价格的变异度不为常数。Merton 完善了衍生证券产品的定价，因此 Black-Scholes-Merton 获得了 1997 年的诺贝尔经济学奖。至此，Black-Scholes-Merton 理论构成了数学金融学的主要内容。值得注意的是，这些理论都是建立在非常理想的金融市场模型上的。然而，现实市场不是理想模型，存在许多影响市场变化的不确定性因素，这些因素对定价和投资组合等都会产生不同程度的影响。因此，在他们研究基础上，许多学者从不

同角度来研究数学金融学的理论与实际应用，取得了丰硕成果。

1.2　Black-Scholes模型的修正

Black-Scholes[1]公式是欧式期权定价公式，它假定了风险资产价格 S 服从几何布朗运动并无红利支付；瞬时收益率、波动率、无风险利率都为常数；市场无摩擦等。公式是用风险资产、期权和无风险资产组成对冲组合投资，并利用无套利原理推导出来的。即

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \tag{1.1}$$

$\{W_t, t \geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，μ、σ 为正常数。则执行价格为 K，到期日是 T 的欧式看涨期权 t 时价格等于

$$C(t,S,T;r,\sigma,K) = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1.2}$$

这里 $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S}{K} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$，$N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}y$。

从模型(1.1)、(1.2)看到Black-Scholes公式是基于风险资产价格连续变化的，依赖于 S,K,T,σ,r 五个参数。然而从实际数据统计研究结果[2][3]表明：股价实际收益的回报率分布比模型(1.1)刻画的要尖峰厚尾些，并从期权市场价反过来研究股票波动率也发现存在偏差，即期权有隐含波动率(Implied Volatility)。为了克服Black-Scholes公式的缺陷和不足，1976年Merton[4][5]对模型(1.1)进行了推广，考虑(1.1)中 σ 和 r 是随时间而变的函数，得到了类似(1.2)的公式。后来，许多学者开始推广和拓展(1.1)，主要从红利、利率及波动率等参数的实际市场变化要求来研究期权定价。如随机利率模型的欧式期权定价[5]，美式期权定价[6]~[8]，随机波动率模型的定价问题[10][11]；随机经济因素影响 σ、r 的期权定价[12][13]以及利用自由边界或黏性解研究美式期权定价[14]~[16]等。

人们在发展非标准期权定价方面(奇异期权的定价)也做出了许多成果。这类期权比标准欧式或美式期权的盈亏状态更复杂，更实用。这类期权的特点就是附有许多额外的定价信息，多数在交易所场外交易。近十几年来，这类期权的交易越来越流行，深受投资者喜欢。如障碍期权、回望期权、亚式期权、重置期权、外汇(或

外国股票)期权、债券定价等[17]~[26]。

跳扩散模型(Jump-Diffusion Model)也称为不连续市场模型。由于前述期权定价与最优效用问题的许多研究成果是基于平稳、理想化的市场模型导出的,而平稳就是利率与价格呈连续变化态势,不会有暴涨暴跌,这一点主要是由市场的厚实(deep)与良好的流动性(liquidity)所支撑的,但是它不适应于间断、突变的经济环境和金融市场。

许多学者从股价回报的实际数据研究发现:股价呈尖峰厚尾特征,而不是模型(1.1)所描述的对数正态分布。此外,模型(1.1)的理论结果与现实之间存在系统性偏差。1976 年,Merton[27] 首先提出并研究股价具有不连续回报时的期权定价。后来,人们着手从理论和实际应用两方面寻找更接近现实股价的动态方程,来克服连续扩散模型(1.1)的不足,消除期权隐含波动率"微笑"现象,使之能更好地适应市场突变性对资产价格的影响。特别是东南亚金融危机的发生、美国长期资本管理基金(LTCM)在俄罗斯银行的经营失败,以及许多影响经济平稳发展的重大国家政策调整、自然灾害(如海啸、地震)等事件,使人们已经认识到:建立和研究不连续市场模型的重要性和迫切性。正如沈致远院士等在《科学》杂志发表的文章指出:"研究突发事件是数学金融学的重要课题"。因此,跳风险因素在资产定价中不容忽视,而且可能蕴涵了重要的经济意义。近年来,研究不连续市场模型的金融数学问题已越来越受人们喜爱和关注。其研究主要有以下两类:

(1)Poisson-Gaussian 过程　这类模型是直接在模型(1.1)基础上加上 n 个与布朗运动 W 独立的 Poisson 过程,即股价满足

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t+\sum_{i=1}^{n}\delta_i(\mathrm{d}N_t^{(i)}-\lambda_t^{(i)}\mathrm{d}t) \tag{1.3}$$

其中 $\delta_i>-1$ 为常数,$\{N_t^{(i)},t\geqslant 0\}_{i=1}^{n}$ 是强度为 $\lambda_t^{(i)}>0$ 的相互独立的 Poisson 过程。I. Bardhan [28][29]、C. Mancini[30][31]、林建忠与叶中行[32]以及邓国和[33][34]等研究了期权定价与最优效用问题。

(2)复合 Poisson 过程　1976 年,Merton 引入了跳扩散模型,他假定股价服从复合 Poisson 跳扩散过程,即

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=(\mu-\lambda k)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W+\mathrm{d}\Big[\sum_{i=1}^{N_t}(V_i-1)\Big] \tag{1.4}$$

其中 $\{V_i,i=1,2,\cdots\}$ 是非负的 i. i. d. 的随机变量,表示股价跳跃比例且 $Y=\ln(V)\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$,$N=\{N_t,t\geqslant 0\}$ 是强度为正常数 λ 的 Poisson 过程,$k=E(V-1)$。模型(1.4)仍然描述股价回报分布为正态的(即呈对称性特点),故称正

态跳扩散模型。Merton 在推导期权定价公式过程中作了关键性假设，即跳成分是非系统性风险，这意味着 Black-Scholes 形式的证券组合投资在消除了几何布朗运动带来的系统性风险后同样获得无风险利率的收益，由此得到了欧式期权定价公式[35]。

后来，也有些学者研究几何 Levy 过程，如文献[36][37]等。需要指出的是我们所研究的双指数跳扩散模型实质是 Levy 过程的一种特例。

自 Merton 引入跳扩散模型后，许多学者开始探讨类似的金融数学问题。如期权定价研究成果中具有代表性的：L. O. Scott[38]、G. J. Jiang[39]、G. Bakshi[40]等利用 Fourier 反变换法讨论了利率、股价波动率都随机时的欧式期权定价或模型参数估计的实证研究。E. Morecki[41]、C. R. Gukhal[42]和 H. Pham[43]等讨论了美式期权定价。C. S. Zhou[44]等在(1.4)下研究了信用结构模型的信用价差问题。在效用最优化问题的研究过程中，由于很难得到像扩散模型(1.1)的投资策略反馈显示解，因此这方面研究成果不多，主要从理论上讨论目标值函数的性质。有代表性的研究有：L. R. Wu[45]考虑了股票有超值回报过程时财富效用最大化问题并解释了跳波动对组合投资的影响。J. Liu[46]及 B. Beaker[47]在股价含 Hull-White 型随机波动率时研究了资产动态分配问题等。

到目前为止，股价服从扩散模型(1.1)的期权定价与最优组合投资等问题的理论与应用研究成果已相当成熟，但跳扩散模型的若干数学金融学问题才刚开始研究，尤其是实证的应用研究。从这些研究成果来看，它们共同的研究方法大致有两种：一种是理论方法，包括鞅、随机动态规划原理和黏性解理论。另一种是数值方法，如 Monte Carlo 模拟、二叉树和有限差分法[12][49]等。