准静态电磁场数值分析方法

李琳 等◎著

科学出版社

准静态电磁场数值分析方法

李　琳 等著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书以作者团队多年在电磁场理论及数值计算方法方面的科研成果为基础，结合实际的工程问题介绍准静态电磁场的若干数值计算方法。第 1 章为全书的理论基础，介绍准静态定律、导电媒质中的电场、磁准静态场、电磁扩散、电磁能等内容。第 2～5 章针对电准静态场的数值计算方法，分别介绍极性反转瞬态电场的标量电位有限元法、极性反转电场的节点电荷电位有限元法、交直流复合电场的频域有限元法和瞬态电场的降阶计算有限元法。第 6～8 章针对磁准静态场的数值计算方法，分别介绍求解电力变压器直流偏磁问题的谐波平衡有限元法及其分解算法、场路耦合的时间周期有限元法和雷电通道近区准静态电磁场计算方法。

本书可供在电磁场理论、计算电磁学、电力装备电磁问题等领域从事科学研究和技术开发工作的人员参考，也可作为高等院校相关专业研究生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

准静态电磁场数值分析方法／李琳等著．—北京：科学出版社，2019.5
ISBN 978-7-03-061084-3

Ⅰ．①准…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①电磁场-数值分析　Ⅳ．①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 075456 号

责任编辑：闫　悦／责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东／封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 5 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2019 年 5 月第一次印刷　印张：11 1/4　插页：2
字数：212 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

本书撰写人员

李　琳	华北电力大学
刘　刚	华北电力大学
赵小军	华北电力大学
王　平	华北电力大学
纪　锋	全球能源互联网研究院有限公司
王帅兵	南方电网科学研究院有限责任公司
谢裕清	国网浙江省电力有限公司信息通信分公司

前　言

建立在牛顿力学基础上的经典电磁场理论是电气、电子、通信、微波和航天等学科的理论基础，经过一个多世纪的发展，以麦克斯韦方程组为核心，形成了电磁场完备的理论体系。电磁场理论的核心是麦克斯韦方程组，其由安培环路定律、电磁感应定律、磁通连续性原理和高斯定理组成，系统描述了电磁场的时空分布特性和场量之间的相互作用关系。

电磁场可以分类成静态电磁场和时变电磁场。完整的电磁场理论是在静态电磁场的理论和实验基础之上发展起来的。针对静态电场和恒定磁场计算问题，引入标量电位和矢量磁位，可以形成静态电磁场的边值问题。伴随着数学物理方程及其计算方法的发展，形成了若干求解静态电场、静态磁场的解析和数值计算方法，如镜像法、保角变换法、复位函数法、分离变量法、有限差分法、有限元法、边界元法和积分方程法等。因此，静态电磁场的理论和分析方法是整个电磁场理论的基础。但在实际工程中，纯粹的静态电磁场问题非常少，大多数问题需要归类到时变电磁场。

快速时变或时谐高频电磁场表现出波动特性，在时间空间上形成电磁波。对应的电磁场理论包括电磁辐射、天线、平面电磁波、导行电磁波等，相应的计算方法为针对波动方程求解的分离变量法、时域有限差分法、时域有限元法、时域积分方程法等。

慢速时变或时谐低频电磁场的空间分布与静态电场、磁场类似，称为准静态电磁场。电气电子工程领域很多实际工程问题可以归类到准静态电磁场的范畴，例如，电机、变压器中的稳态或瞬态涡流场，换流变压器油纸绝缘结构中的交直流复合电场和极性反转瞬态电场，输电线路周围的稳态或瞬态电磁场，集成电路或电力电子器件中的瞬态电磁场，雷电通道近区的瞬态电磁场等。准静态电磁场又可以进一步划分为电准静态场和磁准静态场。以麦克斯韦方程组为基础，当交变磁场感生的电场相比于空间分布电荷产生的库仑电场可以忽略时，电场强度的旋度近似为零，此时的时变电磁场称为电准静态场；当交变电场(位移电流)感生的磁场相比于空间分布的传导电流产生的磁场可以忽略时，此时的时变电磁场称为磁准静态场。

在计算与分析方法方面，准静态电磁场既有别于纯粹静态电磁场又有别于电磁波，因此有必要对其中的特殊现象、特性、问题和计算方法作专门的阐述。本书结合实际的工程问题介绍准静态电磁场的若干数值计算方法。

李琳负责与本书相关的科研课题与全书的整体内容安排，并撰写第 1 章。纪锋(第 2 章)、刘刚(第 3、4 章)、谢裕清(第 5 章)、赵小军(第 6 章)、王帅兵(第 7 章)和王平(第 8 章)参加了本书的撰写工作。本书的研究工作得到了国家自然科学基金项目(50977030，51277064)的资助。本书的出版与作者所在新能源电力系统国家重点实验室(华北电力大学)先进输电技术研究团队多年的科研工作是密不可分的，在项目研究和本书撰写过程中得到了团队带头人崔翔教授和其他成员的大力支持，在此表示衷心的感谢！

限于作者的学识水平，书中难免会有不足和疏漏，欢迎读者批评指正！

作　者

2018 年 9 月

目　　录

第 1 章　准静态电磁场理论基础

1.1　电磁场方程

随时间变化的电场和磁场是相互联系的，随时间变化的磁场可以产生电场，随时间变化的电场也可以产生磁场。时变电磁场的基本方程描述了时变电磁场的基本性质，是准确理解时变电场和磁场的相互关系、掌握时变电磁场变化规律的基础。时变电磁场的基本方程即麦克斯韦方程组可以用表 1-1 表示[1]。

表 1-1　时变电磁场基本方程

积分形式	微分形式	注释
$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	推广的安培环路定理
$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_C \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	法拉第电磁感应定律
$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	磁通连续性原理
$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$	高斯定理

在线性、均匀、各向同性的媒质中，由于麦克斯韦方程是线性偏微分方程，当场源是单频正弦时间函数时，由场源所激励的场强矢量的每一个坐标分量均是同频率的正弦时间函数。这样的时变电磁场称为时谐电磁场,也称为正弦电磁场。因为非正弦的时间函数可以根据傅里叶定理分解为许多正弦时间函数的叠加，所以研究正弦电磁场是研究一般的时变电磁场的基础。

时谐电磁场强矢量的每一个坐标分量均是同频率的正弦时间函数，其振幅和初相位都是空间坐标的函数。以电场强度为例，在直角坐标中可以表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{a}_x E_x(x,y,z,t)+\boldsymbol{a}_y E_y(x,y,z,t)+\boldsymbol{a}_z E_z(x,y,z,t) \tag{1-1}$$

式中，各坐标分量为

$$\begin{aligned}
E_x(x,y,z,t)&=E_{xm}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_x(x,y,z)]\\
E_y(x,y,z,t)&=E_{ym}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_y(x,y,z)]\\
E_z(x,y,z,t)&=E_{zm}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_z(x,y,z)]
\end{aligned}$$

其中，各坐标分量的振幅值 E_{xm}、E_{ym}、E_{zm} 以及相位 φ_x、φ_y、φ_z 都不随时间变化，只是空间位置的函数。在一般情况下，场强矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ 的模值并不是时间的正弦函数，只有当 $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z$ 时才是。

在引入复矢量表示正弦电磁场的场强矢量之后，微分形式的麦克斯韦方程组的复数形式为

$$\begin{cases}\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\dot{\boldsymbol{J}}+\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}\\ \nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}\\ \nabla\cdot\dot{\boldsymbol{B}}=0\\ \nabla\cdot\dot{\boldsymbol{D}}=\dot{\rho}\end{cases}\tag{1-2}$$

式中，场源 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 也已分别用它们所对应的复矢量和相量表示。

媒质的电磁特性可以分为极化、磁化和导电三个方面，在静态电磁场中分别用介电常数 ε、磁导率 μ 和电导率 γ 表示。根据焦耳定律，电导率 γ 还决定媒质中电磁能量的损耗。在正弦电磁场中，反映媒质电磁特性的宏观参数与电磁场的频率有关。媒质参数随频率变化称为色散。研究表明，可以引入复介电常数和复磁导率来表示媒质的电磁性能。复介电常数是一个复数，可以表示为

$$\varepsilon_c=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''\tag{1-3}$$

它的实部和虚部都是频率的函数。其虚部 ε'' 总是大于零的正数，反映媒质的极化损耗。

对于线性、均匀、各向同性的媒质，在没有场源的空间，麦克斯韦第一方程的复数形式为

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\gamma\dot{\boldsymbol{E}}+\mathrm{j}\omega(\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon'')\dot{\boldsymbol{E}}=(\gamma+\omega\varepsilon'')\dot{\boldsymbol{E}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon'\dot{\boldsymbol{E}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_c\dot{\boldsymbol{E}}\tag{1-4}$$

式中，

$$\varepsilon_c=\varepsilon'-\mathrm{j}\left(\varepsilon''+\frac{\gamma}{\omega}\right)\tag{1-5}$$

称为等效复介电常数。可见，引入等效复介电常数以后，可以把导体视为一种等效的电介质。与介质的介电性能相似，媒质的导磁性能在高频下可以用复磁导率表示为

$$\mu_c=\mu'-\mathrm{j}\mu''\tag{1-6}$$

复磁导率的虚部也是与磁损耗相对应的。

实际应用中经常引入损耗角的概念来反映介质的损耗特性。对于电介质，其损耗角正切定义为

$$\tan\delta_e=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\tag{1-7}$$

对于导磁媒质，其损耗角正切定义为

$$\tan\delta_m = \frac{\mu''}{\mu'} \tag{1-8}$$

1.2 准静态定律

在电气工程中涉及的电磁场问题多数属于低频场，即激励源的频率较低，这样的场可以用准静态场的理论进行分析。准静态场分为电准静态场(electroquasistatic field, EQS)和磁准静态场(magnetoquasistatic field, MQS)两种[2-8]，与静态场有本质的区别。每一种准静态场都是与时间相关的，且既含电场又含磁场。

时变电磁场的电场由空间分布的时变电荷产生的库仑电场 $\boldsymbol{E}_c$ 和变化的磁场产生的感应电场 $\boldsymbol{E}_i$ 组成。当感应电场远小于库仑电场时(即在麦克斯韦方程中可以忽略$\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 项)，时变电磁场可以简化为电准静态场，对应的基本方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}\approx 0 \tag{1-9a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-9b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-10a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-10b}$$

式(1-9)中的两个方程描述的是电准静态场的电场，是随时间变化的。由于方程形式与静电场相同，可以借助与静电场类似的求解方法进行求解。在求得电场分布之后，可以借助式(1-10)求解电准静态场的磁场。

时变电磁场的磁场由空间分布的时变传导电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和位移电流密度$\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 共同产生，其中，位移电流密度反映了变化的电场感生磁场的性质。当感生磁场相比传导电流产生的磁场可以忽略时，时变电磁场称为磁准静态场，对应的基本方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{J} \tag{1-11a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-11b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-12a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-12b}$$

式(1-11)中的两个方程描述的是磁准静态场的磁场，是随时间变化的。由于方程形式与恒定磁场相同，可以借助与恒定磁场类似的求解方法进行求解。在求得磁场

分布之后，可以借助式(1-12)求解磁准静态场的电场。当存在导电媒质时，时变磁场感生的电场在导电媒质中产生感应电流，这个感应电流与激励源的电流一样会产生磁场，此时需要将式(1-12)和式(1-11)耦合到一起求解。这就是工程上经常遇到的涡流场问题。

可以用一个简单的方法判断一个低频电磁场问题是电准静态场还是磁准静态场：降低激励源的频率，使得场变成静态的。在这种极限情况下，如果磁场消失，则场应该是电准静态场；如果电场消失，则场应该是磁准静态场。

1.3 电准静态场

电准静态场属于时变电磁场，对应的电场和磁场满足的基本方程分别为式(1-9)和式(1-10)。其基本特点是：由变化的磁场产生的感应电场远小于库仑电场(即在电磁感应定律中可以忽略$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$项)，电场分布仅由空间分布的(时变)电荷决定，分布规律与静电场相同，可以不用考虑磁场的存在单独求解。

由式(1-9a)可知，电准静态场的电场是无旋的。由矢量分析知任意标量函数的梯度的旋度恒为零(即$\nabla\times\nabla\psi\equiv 0$)，由此，可以定义标量电位：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{1-13}$$

式中，标量电位φ的单位为伏特。根据矢量分析的斯托克斯定理，电场强度的无旋性等价于电场强度的闭合线积分为零，或电场强度在任意两点间的线积分与路径无关。将电场强度在场域中任意的两点P和Q之间积分，并利用式(1-13)，得

$$\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_P^Q \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_Q^P \mathrm{d}\varphi=\varphi(P)-\varphi(Q) \tag{1-14}$$

式(1-14)说明场域中任意两点P和Q之间的电位差等于电场强度在这两点间的线积分，与积分路径无关。仅由式(1-13)定义的标量电位不是唯一的。由式(1-14)可知，如果在场域中选定任意点Q的标量电位为零电位参考点($\varphi(Q)=0$)，则任意点P的电位唯一确定，且可以由式(1-14)计算。

将式(1-13)代入式(1-9b)，并利用电位移矢量$\boldsymbol{D}$与电场强度$\boldsymbol{E}$的本构关系，得

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1-15}$$

式(1-15)称为标量电位φ满足的泊松方程。在无电荷分布的区间，式(1-15)右端项为零，称为标量电位φ满足的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{1-16}$$

1.4　导电媒质中的电场

1.4.1　自由电荷在导电媒质中的弛豫

在电准静态场的电场力作用下，导电媒质中的自由电荷沿电力线方向移动形成电流。空间的电荷分布服从电荷守恒定律。

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1-17}$$

假定导电媒质的电导率为γ，介电常数为ε，结合媒质的本构关系$\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$、式(1-9b)和微分形式的电荷守恒定律，得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho=0 \tag{1-18}$$

该一阶微分方程的解为

$$\rho=\rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}} \tag{1-19}$$

式中，ρ_0为t=0 时的初始电荷密度分布；$\tau_e=\varepsilon/\gamma$(秒)为电荷密度衰减的时间常数。银、铜、铝和钢等良导体的电导率在 10^6～10^7S/m(西门子/米)数量级，介电常数$\varepsilon\approx\varepsilon_0$，时间常数$\tau_0$在 10^{-18}～10^{-17}秒数量级。可见，在良导体内部体电荷密度很快衰减到零，电荷很快移动到导体的表面上，这一自由电荷迁移的过程称为电荷的弛豫。云母、绝缘油等绝缘介质的导电性很差，其电导率在 10^{-15}～10^{-13}S/m 数量级，时间常数τ_0在 10～10^4秒数量级。可见，在绝缘介质内部体电荷密度衰减得很慢，在电气绝缘问题研究中值得关注。

1.4.2　导电媒质中电场的基本方程

由式(1-9)可得导电媒质中电准静态电场的积分形式基本方程为

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1-20}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q \tag{1-21}$$

电荷守恒定律为另一个约束方程。两种不同导电媒质分界面上，电准静态电场场量满足的边界条件为

$$\boldsymbol{n}^0\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1-22}$$

$$\boldsymbol{n}^0\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\sigma \tag{1-23}$$

$$n^0 \cdot (J_1 - J_2) = -\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \tag{1-24}$$

媒质的本构关系 $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 约束了电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系，依据矢量分析的亥姆霍兹定理，仅需要使用式(1-17)或式(1-21)二者之一与式(1-20)结合相应的边界条件即可唯一确定导电媒质中电准静态的电场。但由于两种不同导电媒质分界面上总是会存在自由面电荷，且其面密度 σ 通常是未知的，需要把三个方程结合在一起求解电场，式(1-23)和式(1-24)提供了分界面上自由面电荷与场量之间的关系。

在导电媒质中可以引入标量电位 φ，且 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 。利用微分形式的高斯定理并结合微分形式的电荷守恒定律，可得标量电位 φ 满足的二阶偏微分方程：

$$\nabla \cdot \left(\gamma \nabla \varphi + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \right) = 0 \tag{1-25}$$

在均匀导电媒质中，式(1-25)可以写成

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{\tau_e} \right) = 0 \tag{1-26}$$

式(1-26)可以看成一个特解 φ_p 和一个齐次解 φ_h 的线性组合，即

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_h \tag{1-27}$$

式中，特解 φ_p 服从类似电荷密度的弛豫方程：

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial t} + \frac{\varphi_p}{\tau_e} = 0 \tag{1-28}$$

而齐次解 φ_h 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \varphi_h = 0 \tag{1-29}$$

特解 φ_p 随时间的变化规律与电荷密度相同，其在空间的分布可以借助式(1-30)的积分获得：

$$\varphi_p(r) = \int_V \frac{\rho_0(r') \mathrm{e}^{-t/\tau_e}}{4\pi\varepsilon |r - r'|} \mathrm{d}V' \tag{1-30}$$

可见，式(1-30)满足电荷与电位分布的初始条件。

1.4.3 恒定电场

如果导电媒质中的电流是不随时间变化的恒定电流，则空间电荷分布也是不随时间变化的，这样的电荷称为驻定电荷，由其产生的电场称为恒定电场。可以把恒定电场看作导电媒质中电准静态场电场的一个特例。由式(1-18)可知在恒定电场中导电媒质内部不存在电荷体密度，即导电媒质内部没有电荷分布，但在导电

媒质的表面总是会存在自由面电荷。

显然，恒定电场也是无旋场，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-31}$$

恒定电流满足连续性方程，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{1-32}$$

式(1-31)和式(1-32)即为恒定电场的基本方程。在确定了电场强度之后，可以借助式(1-23)确定导电媒质分界面上的自由面电荷密度。

由式(1-25)可得恒定电场的标量电位满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{1-33}$$

由式(1-22)和式(1-23)可得恒定电场在两种导电媒质分界面上的边界条件为

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1-34}$$

$$J_{1n} = J_{2n} \tag{1-35}$$

如果两种导电媒质均为各向同性的线性媒质，由 $\boldsymbol{J}_1 = \gamma_1 \boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2 = \gamma_2 \boldsymbol{E}_2$，结合式(1-34)和式(1-35)可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{1-36}$$

式中，α_1 和 α_2 为场矢量与媒质分界面法向的夹角。式(1-36)称为折射定律，反映了场量与分界面法线方向的夹角和媒质参数间的关系。对于良导体(媒质 2)与不良导体(媒质 1)的分界面($\gamma_2 \gg \gamma_1$)，只要 $\alpha_2 \neq 90°$，由式(1-36)可得 $\alpha_1 \approx 0°$。即土壤中电流密度或电场强度近似垂直于良导体(钢)的表面，或者说在良导体的表面电场强度的切向分量近似为零。因此，良导体表面近似为等位面，良导体(尺寸不是很大)近似为等位体。

1.5　磁准静态场

磁准静态场也属于时变电磁场，对应的磁场和电场满足的基本方程分别为式(1-11)和式(1-12)。其基本特点是：由变化的电场(位移电流)产生的感应磁场远小于由传导电流产生的磁场(即在推广的安培环路定律中可以忽略 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 项)，磁场分布仅由空间分布的(时变)传导电流决定，分布规律与恒定磁场相同，可以不用考虑电场的存在单独求解。如果已知空间的传导电流分布，可以用毕奥-萨伐尔定律通过积分求解空间的磁场分布。当存在导电媒质时，时变磁场感生的电场在导电媒质中产生感应电流，这个感应电流与激励源产生的传导电流一样会产生磁场，此时需要将式(1-11)和式(1-12)耦合到一起求解，在工程上称为涡流场问题。