GAODENG DAISHU

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

北京市高等教育精品教材立项项目

|全国高等学校首届国家级教学名师倾力打造|

高等代数

第二版 下册

大学高等代数课程创新教材

丘维声◎著

◆ **内容精华**：重基础，讲想法，理论深刻

◆ **典型例题**：例题多，题型广，分析透彻

◆ **应用小天地**：提升能力，开拓视野

清华大学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等代数

第二版 下册

大学高等代数课程创新教材

丘维声◎著

清华大学出版社
北京

内容简介

本套书作为大学“高等代数”课程的创新教材，是国家级优秀教学团队（北京大学基础数学教学团队）课程建设的组成部分，是国家级教学名师多年来进行高等代数课程建设和教学改革的成果。

本套书以讲述线性空间及其线性映射为主线，遵循高等代数知识的内在规律和学生的认知规律安排内容体系，按照数学思维方式编写，着重培养数学思维能力。上册内容包括：线性方程组，行列式，n 维向量空间 K^n，矩阵的运算，矩阵的相抵与相似，以及矩阵的合同与二次型。下册内容包括：一元和 n 元多项式环，线性空间，线性映射，具有度量的线性空间，以及多重线性代数。

书中每节均包括内容精华、典型例题、习题，章末有补充题（除第 11 章外），还特别设置了“应用小天地”板块。本书内容丰富、全面、深刻，阐述清晰、详尽、严谨，可以帮助读者在高等代数理论上和科学思维能力上都达到相当的高度。本书适合用作综合大学、高等师范院校和理工科大学的“高等代数”课程的教材，还可作为“高等代数”或“线性代数”课程的教学参考书，也是数学教师和科研工作者高质量的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数. 下册/丘维声著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2019
大学高等代数课程创新教材
ISBN 978-7-302-49513-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 020179 号

责任编辑：邓 婷
封面设计：刘 超
版式设计：文森时代
责任校对：马军令
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010－62770175 **邮 购**：010－62786544
投稿与读者服务：010－62776969，c－service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010－62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：45 **字 数**：1004 千字
版 次：2010 年 10 月第 1 版 2019 年 12 月第 2 版 **印 次**：2019 年 12 月第 1 次印刷
印 数：1～4000
定 价：89.80 元

产品编号：072925-01

第二版序

本次修订保持和发扬了这套高等代数创新教材的特色，使之精益求精。

1. 更加突出了高等代数课程的主线：研究线性空间的结构及其线性映射。

从几何空间（由以定点 O 为起点的所有向量组成），数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n，数域 K 上所有 $s\times n$ 矩阵组成的集合 $\mathrm{M}_{s\times n}(K)$，数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$，闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数组成的集合 $C[a,b]$ 的共同点：有加法和数量乘法两种运算并且满足 8 条运算法则（加法 4 条，数量乘法 4 条）受到启发，抽象出域 F 上的线性空间的概念，然后研究线性空间的结构，使线性空间为数学、自然科学和社会科学的研究提供了广阔天地。

平面上绕直角坐标系 Oxy 的原点 O 转角为 θ 的旋转 σ 是实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^2$ 到自身的一个映射，并且 σ 保持加法和数量乘法运算。求导数 $\mathcal{D}$ 是区间 (a,b) 上所有一次可微函数组成的实数域上的线性空间 $C^{(1)}(a,b)$ 到 (a,b) 上所有实值函数组成的线性空间 $\mathbf{R}^{(a,b)}$ 的一个映射，$\mathcal{D}$ 保持加法和数量乘法运算。由这些例子受到启发，抽象出域 F 上线性空间 V 到 V' 的线性映射的概念，它是 V 到 V' 的保持加法和数量乘法运算的映射。线性映射好比是在线性空间的广阔天地上驰骋的一匹匹骏马，有着众多重要应用。

为了在线性空间中引进度量，需要研究线性空间上的双线性函数。实数域上的线性空间 V 上的一个正定的对称双线性函数称为 V 上的一个内积。定义了一个内积的实线性空间称为实内积空间，有限维的实内积空间称为欧几里得空间。在复数域上的线性空间 V 上引进内积的概念时，为了使 V 上的二元函数 f 具有正定性，就需要它有 Hermite 性，并且只能要求 f 对第二个变量具有共轭线性性；为了使 f 与向量的加法和数量乘法相容，要求 f 对第一个变量具有线性性。定义了一个内积的复线性空间称为复内积空间或酉空间。域 F 上的线性空间 V 如果指定了一个对称双线性函数 f，那么称 (V,f) 是正交空间，称 f 是 V 上的一个内积。特征不为 2 的域 F 上的线性空间 V 如果指定了一个斜对称双线性函数 f，那么称 (V,f) 是辛空间，称 f 是 V 上的辛内积。

实内积空间 V 上的正交变换和对称变换，复内积空间 V 上的酉变换和 Hermite 变换，正交空间 (V,f) 上的正交变换，辛空间 (V,f) 上的辛变换都是与内积有关的线性变换。

2. 继续写进了作者的一些独到的科学见解。

我们运用线性空间的子空间的基去研究满足递推关系

$$u(n)=au(n-1)+bu(n-2),n=2,3,\cdots$$

的函数 $u(n)$ 组成的集合的结构。

我们运用子空间的和是直和的充分必要条件简捷地证明了下述命题的充分性:数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_s$ 是两两正交的幂等变换当且仅当 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\cdots+\mathcal{A}_s$ 是幂等变换,且

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\mathcal{A}_1)+\mathrm{rank}(\mathcal{A}_2)+\cdots+\mathrm{rank}(\mathcal{A}_s)。$$

我们利用最小多项式刻画了域 F 上线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}=k\mathcal{I}+\mathcal{B}$,其中 $\mathcal{B}$ 是幂零指数为 l 的幂零变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-k)^l$。由此自然而然地引出了 Jordan 块的概念,得出了 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_l(k)$ 的最小多项式是 $(\lambda-k)^l$,并且证明了域 F 上的 l 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{J}_l(k)$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-k)^l$。

在研究域 F 上 r 维线性空间 W 上的幂零变换 $\mathcal{B}$ 的最简单形式的矩阵表示时,任给 W 中一个非零向量 η,由于 $\mathcal{B}^l=\mathcal{O}$,因此 $\mathcal{B}^l\eta=0$。设 t 是使得 $\mathcal{B}^t\eta=0$ 成立的最小正整数,则 $\mathcal{B}^{t-1}\eta\neq0$,从而 $\mathcal{B}^{t-1}\eta,\cdots,\mathcal{B}\eta,\eta$ 线性无关,于是它是子空间 $\langle\mathcal{B}^{t-1}\eta,\cdots,\mathcal{B}\eta,\eta\rangle$ 的一个基,且这个子空间是 $\mathcal{B}$ 的非平凡不变子空间,称它为由 η 生成的 $\mathcal{B}$-强循环子空间。$\mathcal{B}$ 在 $\langle\mathcal{B}^{t-1}\eta,\cdots,\mathcal{B}\eta,\eta\rangle$ 上的限制在基 $\mathcal{B}^{t-1}\eta,\cdots,\mathcal{B}\eta,\eta$ 下的矩阵是一个 t 级 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_t(0)$。根据 9.5 节的例 10,这个子空间不能分解成 $\mathcal{B}$ 的非平凡不变子空间的直和,因此 $\boldsymbol{J}_t(0)$ 就是 $\mathcal{B}$ 在这个子空间上的限制的最简单形式的矩阵表示。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{B}^{t-1}\eta)=\mathcal{B}^t\eta=0=0(\mathcal{B}^{t-1}\eta)$,因此 $\mathcal{B}^{t-1}\eta$ 是 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量。又 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量生成的子空间是 $\mathcal{B}$-强循环子空间。于是我们猜测并且运用商空间的理论证明了:W 能分解成 $\dim W_0$ 个 $\mathcal{B}$-强循环子空间的直和,其中 W_0 是 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间,从而得出,W 中存在一个基使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一些主对角元为 0 的 Jordan 块组成的分块对角矩阵,称它为 $\mathcal{B}$ 的 Jordan 标准形。我们求出了 $\mathcal{B}$ 中 Jordan 块的总数以及 t 级 Jordan 块的个数 $N(t)$,其中 $1\leqslant t\leqslant l$。

设域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[x]$ 中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

由于 $(\lambda-\lambda_1)^{l_1},(\lambda-\lambda_2)^{l_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$ 两两互素,因此运用一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质和互素的多项式的充分必要条件可以证出

$$\mathrm{Ker}\, m(\mathcal{A})=\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1}\oplus\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s},$$

从而 $V=\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1}\oplus\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}$。

记 $W_j=\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{l_j}$,则上式可写成

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s,$$

由于 $(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^l$ 与 $\mathcal{A}$ 可交换,因此 $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{l_j}$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。运用唯一因式分解定理可得,$\mathcal{A}|W_j$ 的最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$,$j=1,2,\cdots,s$,从而 $\mathcal{A}|W_j=\lambda_j\mathcal{I}+\mathcal{B}_j$,其中 $\mathcal{B}_j$ 是 W_j 上的幂零变换,其幂零指数为 l_j。根据上一段的结果,W_j 上存在一个基使得 $\mathcal{B}_j$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}_j$ 是 Jordan 形矩阵,于是 $\mathcal{A}|W_j$ 在 W_j 的这个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}_j=\lambda_j I+\boldsymbol{B}_j$。把 W_j 的上述基 $(j=1,2,\cdots,s)$ 合起来是 V 的一个基,$\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s\}$,这是 Jordan 形矩阵。$\boldsymbol{A}$ 的主对角元是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值。我们求出了主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 N_j,求出了其中 t 级 Jordan 块的个数 $N_j(t)$,$1\leqslant t\leqslant l_j$。这个 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准形,除去 Jordan 块的排列次序外,

$\mathcal{A}$的 Jordan 标准形是唯一的。由于 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_t(\lambda_j)$的最小多项式为$(\lambda-\lambda_j)^t$，因此根据 9.6 节的推论 5 立即得到，若$\mathcal{A}$有 Jordan 标准形，则$\mathcal{A}$的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中可以分解成一次因式的乘积。从而我们证明了：域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换$\mathcal{A}$有 Jordan 标准形当且仅当$\mathcal{A}$的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中能分解成一次因式的乘积。

设域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换$\mathcal{A}$的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda),$$

其中至少有一个 $p_i(\lambda)$的次数大于 1，则

$$V=\mathrm{Ker}\,p_1^{l_1}(\mathcal{A})\oplus\mathrm{Ker}\,p_2^{l_2}(\mathcal{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,p_s^{l_s}(\mathcal{A})。$$

记 $W_j=\mathrm{Ker}\,p_j^{l_j}(\mathcal{A})$，则 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$。根据 9.6 节的例 17 得，$\mathcal{A}|W_j$ 的最小多项式 $m_j(\lambda)=p_j^{l_j}(\boldsymbol{\lambda})$，$j=1,2,\cdots,s$。如果我们能在 W_j 中找到一个基使得$\mathcal{A}|W_j$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 具有最简单的形式，那么$\mathcal{A}$在 W_j 的这个基$(j=1,2,\cdots,s)$合起来得到的 V 的一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_s\}$就具有最简单的形式。于是归结为要研究下述问题：

设$\mathcal{C}$是域 F 上 m 维线性空间 W 上的线性变换，$\mathcal{C}$的最小多项式 $m(\lambda)=p^l(\lambda)$，其中 $p(\lambda)$是域 F 上次数大于 1 的不可约多项式。我们来研究$\mathcal{C}$的最简单形式的矩阵表示。

由于 $m(\mathcal{C})=\mathcal{O}$，因此对一切 $\alpha\in W$ 有 $m(\mathcal{C})\alpha=0$，即 $p^l(\mathcal{C})\alpha=0$。对于 $\alpha\in W$ 且$\alpha\neq0$，使得 $g(\mathcal{C})\alpha=0$ 成立的次数最低的首项系数为 1 的多项式 $g(\lambda)$称为 α 的最小多项式，记作 $m_\alpha(\lambda)$。利用 $F[\lambda]$中的带余除法容易证明：$m_\alpha(\lambda)\mid m(\lambda)$。设 $m_\alpha(\lambda)=\lambda^t+d_{t-1}\lambda^{t-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$，则由 $m_\alpha(\lambda)$的定义可证得，$\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha$ 线性无关，且$\mathcal{C}^t\alpha=-d_{t-1}\mathcal{C}^{t-1}\alpha-\cdots-d_1\mathcal{C}\alpha-d_0\alpha$。我们把子空间$\langle\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha\rangle$称为由 α 生成的$\mathcal{C}$-循环子空间，它是$\mathcal{C}$的不变子空间，且 $\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha$ 是这个子空间的一个基。$\mathcal{C}$在这个子空间上的限制在基 $\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-d_0\\1&0&\cdots&0&-d_1\\0&1&\cdots&0&-d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&-d_{t-2}\\0&0&\cdots&1&-d_{t-1}\end{pmatrix},$$

这种形式的矩阵称为 Frobenius 矩阵，这个矩阵的特征多项式和最小多项式都等于 $\lambda^t+d_{t-1}\lambda^{t-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$。把这个矩阵称为多项式 $\lambda^t+d_{t-1}\lambda^{t-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$ 的友矩阵。我们证明了$\langle\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha\rangle$不能分解成$\mathcal{C}|\langle\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha\rangle$的非平凡不变子空间的直和，从而 $m_\alpha(\lambda)$的友矩阵不能表示成分块对角矩阵。于是 $m_\alpha(\lambda)$的友矩阵是$\mathcal{C}|\langle\alpha,\mathcal{C}\alpha,\cdots,\mathcal{C}^{t-1}\alpha\rangle$的最简单形式的矩阵表示。由此受到启发，我们猜测并且运用商空间的理论证明了：W 能分解成$\dfrac{1}{r}\dim W_0$ 个$\mathcal{C}$—循环子空间的直和，其中 $r=\deg p(\lambda)$，W_0 是 $p(\mathcal{C})$的属于特征值 0 的

特征子空间,从而 W 中存在一个基,使得 $\mathcal{C}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_v\}$,$v=\frac{1}{r}\dim W_0$,其中 $\boldsymbol{C}_i$ 是 $p^{h_i}(\lambda)$ 的友矩阵,称为一个有理块,$1\leqslant h_i\leqslant l$,$i=1,2,\cdots,v$。我们求出了 $\boldsymbol{C}$ 中有理块的总数,hr 级有理块的个数 $N(hr)$,其中 $1\leqslant h\leqslant l$,$\boldsymbol{C}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的有理标准形,除了有理块的排列次序外,$\mathcal{C}$ 的有理标准形是唯一的,并且它是 $\mathcal{C}$ 的最简单形式的矩阵表示。利用这个结论,我们立即得到:如果域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式含有次数大于 1 的不可约多项式,那么 V 中存在一个基使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵是由有理块组成的分块对角矩阵,称它为 $\mathcal{A}$ 的有理标准形,除去有理块的排列次序外,$\mathcal{A}$ 的有理标准形是唯一的。

从平面上关于一条直线的反射,向着一条直线的压缩(压缩系数不等于 1),错切,在一条直线上的投影的共同性质,我们抽象出域 F 上 n 维($n\geqslant 2$)线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{B}$ 如果满足 $\operatorname{rank}(\mathcal{B}-\mathcal{I})=1$,那么称 $\mathcal{B}$ 是伪反射。我们利用线性变换的有理标准形证明了:域 F 上 n 维($n\geqslant 2$)线性空间 V 上的任一线性变换 $\mathcal{A}$ 是至多 n 个伪反射的乘积。

我们证明了:设 f 是特征为 2 的域 F 上 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数,则 V 中存在一个基使得 f 在此基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为下述形式的分块对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\left\{d_1,\cdots,d_r,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $d_i\in F$,$i=1,\cdots,r$;$0\leqslant r\leqslant n$。若 V 中存在一个向量 α_1 使得 $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$,则 V 中存在一个基使得 f 在此基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\{d_1,\cdots,d_r,0_{n-r}\},$$

其中 $d_i\in F$ 且 $d_i\neq 0$,$i=1,\cdots,r$;$1\leqslant r\leqslant n$。

我们证明了:设 f 是域 F 上线性空间 V 上的对称双线性函数,W 是 V 的一个有限维非平凡子空间,则 $V=W\oplus W^{\perp}$ 的充分必要条件是 $f|W$ 是非退化的。这里 V 可以是无限维的,f 不需要是非退化的,F 是任意一个域,不要求 F 的特征不为 2。

我们证明了:设 V 和 V' 都是实内积空间,如果存在 V 到 V' 的一个映射 σ 保持向量的内积不变,即 $\forall\alpha,\beta\in V$ 有

$$(\sigma(\alpha),\alpha(\beta))=(\alpha,\beta),$$

那么 σ 保持向量的长度不变,σ 是 V 到 V' 的一个线性映射,σ 是单射。从而我们证明了:如果存在 V 到 V' 的一个满射 σ 保持向量的内积不变,那么 σ 是 V 到 V' 的一个保距同构,从而实内积空间 V 与 V' 同构。特别地,如果 V 和 V' 都是 n 维欧几里得空间,且有 V 到 V' 的一个映射 σ 保持向量的内积不变,那么 σ 是 V 到 V' 的一个保距同构,从而欧几里得空间 V 与 V' 同构。

我们利用 n 维欧几里得空间 V 上的正交变换的最简单形式的矩阵表示证明了:n 维($n\geqslant 2$)欧几里得空间 V 上的任一正交变换都可以表示成至多 n 个关于超平面的反射的乘积。由此看出并且证明了:n 维($n\geqslant 2$)欧几里得空间 V 上的任一正交变换 $\mathcal{A}$ 表示成关于超平面的反射的乘积时,反射个数的最小数目等于 $n-\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\mathcal{I})]$。

3. 保持和发扬了本套教材第一版的特色。

明确主线,内容全面,理论深刻,创新亮点,强调思维,例题丰富,展示应用,可读性强。

4. 增加了一些例题和习题。

对于增加的习题给出了详细解答。

感谢本套教材的责任编辑邓婷,她为本书的出版付出了辛勤的劳动。

真诚欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院

第一版序

高等代数是大学数学科学学院(或数学系,应用数学系)最主要的基础课程之一。本套教材是作者在北京大学进行高等代数课程建设和教学改革的成果,它具有下述鲜明特色。

1. 主线明确。以研究线性空间和多项式环的结构及其态射(线性映射,多项式环的通用性质)为主线。自从 1832 年伽罗瓦(Galois)利用一元高次方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件之后,代数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统的结构及其态射(即保持运算的映射)成为现代代数学研究的中心问题。20 世纪,代数学研究结构及其态射的观点已经渗透到现代数学的各个分支中。因此,在高等代数课程的教学中贯穿研究线性空间和多项式环的结构及其态射这条主线,就是把握住了代数学的精髓。

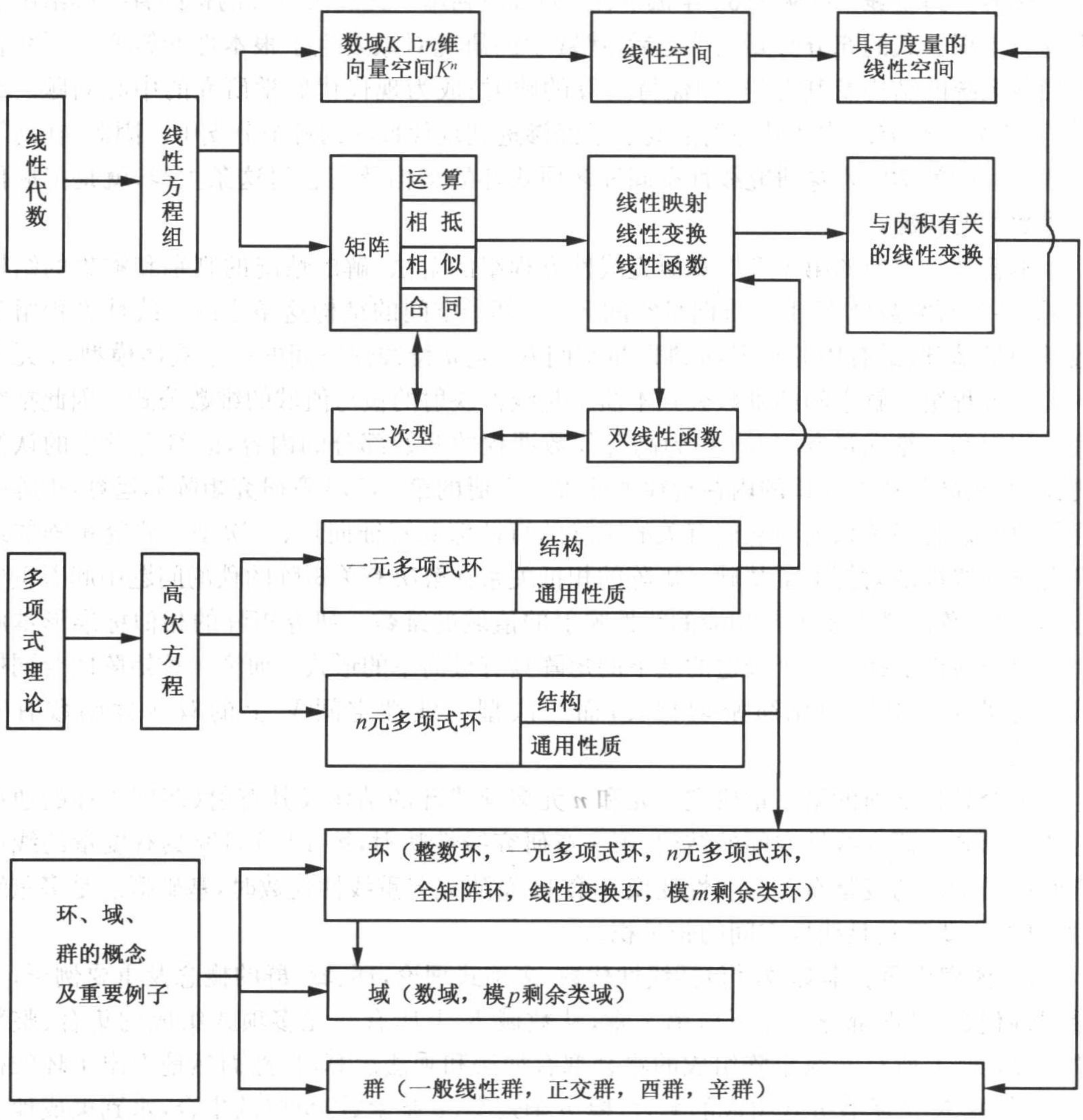
本套教材上册的第 1,2,3 章研究线性方程组的解法、解的情况的判别和解集的结构时,贯穿了研究数域 K 上 n 维向量空间 K^n 及其子空间的结构这条主线。线性方程组是数学中最基础、最有用的知识,n 维向量空间 K^n 是 n 维线性空间的一个具体模型,n 元齐次线性方程组的解空间的维数公式本质上是线性映射的核与值域的维数公式。因此把线性方程组和 n 维向量空间 K^n 作为高等代数课程的开始部分的内容,既符合学生的认知规律,又是高等代数知识的内在规律的体现。上册的第 4,5,6 章研究矩阵的运算,矩阵的相抵、相似、合同关系及与它们有关的矩阵的特征值和特征向量、二次型。研究矩阵的运算为研究线性映射打下了基础。矩阵的相抵关系在解决有关矩阵的秩的问题中起着重要作用,而矩阵的秩本质上是相应的线性映射的值域的维数。研究矩阵的相似标准形本质上是研究线性变换在一个合适的基下的矩阵具有最简单的形式。研究对称矩阵的合同标准形与研究二次型的化简密切相关,而二次型与线性空间 V 上的双线性函数有密切联系。

本套教材下册的第 7 章研究一元和 n 元多项式环的结构及其态射(多项式环的通用性质),第 8 章研究线性空间的结构,第 9 章研究线性映射,第 10 章研究具有度量的线性空间的结构及与度量有关的线性变换。第 11 章研究多重线性代数时,基础概念是多重线性映射,主要工具是线性空间的张量积。

2. 内容全面。本套教材包括线性代数,多项式理论,环、域、群的概念及重要例子,多重线性代数,共四部分。在下册第 7 章,从数域 K 上所有一元多项式组成的集合、整数集、数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合都有加法和乘法运算,自然而然地引出了环的概念;从数域 K 上所有分式组成的集合、模 p 剩余类(p 是素数)组成的集合,水到渠成地引出了域的概念。于是我们在下册第 8 章讲的是任意域上的线性空间,而不只是数域上的

线性空间。这是当今信息时代的需要,因为在信息的安全与可靠中大量使用二元域上的线性空间理论。我们不仅着重研究有限维的线性空间,也研究无限维的线性空间,因为许多函数空间都是无限维线性空间。我们在第 9 章不仅研究线性变换的 Jordan 标准形,而且研究线性变换的有理标准形。我们在第 10 章不仅研究欧几里得空间和酉空间,而且研究正交空间和辛空间;不仅研究欧几里得空间上的正交变换、对称变换,酉空间上的酉变换,而且研究酉空间上的 Hermite 变换、正规变换。在第 10 章讲了欧几里得空间上的正交变换,酉空间上的酉变换,正交空间上的正交变换,辛空间上的辛变换之后,水到渠成地引出群的概念,介绍了正交群,酉群,辛群。我们在第 11 章研究了线性空间的张量积,张量及张量代数,外代数(或格拉斯曼(Grassmann)代数),它们在微分几何、现代分析、群表示论和量子力学等领域中有重要应用。

本套教材的第一、二、三个组成部分,内容之间的内在联系可以用下述框图来表示。



3. 理论深刻。本套教材阐述了深刻的理论，证明了许多重要结论。举例如下：

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩。$\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的不为零的子式的最高阶数，等于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间（简称为行空间）的维数，等于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间（简称为列空间）的维数。设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\mathcal{A}$ 的值域的维数。设 V 中向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的坐标组成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 生成的子空间的维数。由此可知，矩阵的秩是一个非常深刻的概念，它有许多重要应用。例如，线性方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵与增广矩阵有相等的秩。n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数等于 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。矩阵方程 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。矩阵方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}。$$

域 F 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵（即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$）当且仅当

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n。$$

特征不等于 2 的域 F 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵（即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$）当且仅当

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n。$$

设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是数域 K 上的 n 级矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是幂等矩阵且 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{0}$（当 $i\neq j$）的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_i\ \text{是幂等矩阵，且}\ \operatorname{rank}\Big(\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_i\Big)=\sum_{i=1}^{s}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_i)。$$

Sylvester 秩不等式：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别是域 F 上 $s\times n$，$n\times m$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n.$$

在 Sylvester 秩不等式中，等号成立的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}。$$

设 A，B 分别是域 F 上 $s\times n$，$n\times s$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ABA})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})-n,$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})=n$。

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是数域 K 上的 n 级矩阵，且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|。$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是数域 K 上的 $s\times n$，$n\times s$ 矩阵，则

$$|\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}|。$$

利用这个结论证得，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特征值，并且重数相同。

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}$ 是数域 K 上 n 级对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}_1$ 是 r 级可逆矩阵，则

$$A \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix},\ |A| = |A_1|\,|A_4 - A'_2A_1^{-1}A_2|。$$

利用这个结论简洁地证得,实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是:A 的所有顺序主子式全大于0。利用上述结论还证得,设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 是 n 级正定矩阵,则 $|M| \leqslant |A|\,|D|$,等号成立当且仅当 $B=0$。进而证得,若 $A=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵,则 $|A| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,等号成立当且仅当 A 是对角矩阵。由此立即得到 Hadamard 不等式:

若 $C=(c_{ij})$ 是 n 级实矩阵,则 $|C|^2 \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n}(c_{1j}^2 + c_{2j}^2 + \cdots + c_{nj}^2)$。

数域 K 上 n 级矩阵 A 能够分解成一个主对角元都为 1 的下三角矩阵 B 与可逆上三角矩阵 C 的乘积 $A=BC$(称为 LU-分解)当且仅当 A 的各阶顺序主子式全不为 0,并且 A 的这种分解是唯一的。

n 级实可逆矩阵 A 能够唯一地分解成正交矩阵 T 与主对角元都为正数的上三角矩阵 B 的乘积 $A=TB$。

设 A 是 $m\times n$ 列满秩实矩阵,则 A 能够唯一地分解成 $A=QR$,其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵,R 是主对角元都为正数的 n 级上三角矩阵,这称为 QR-分解。

设 A 是 n 级实可逆矩阵,则存在正交矩阵 T 和两个正定矩阵 S_1, S_2,使得 $A=TS_1=S_2T$,并且 A 的这两种分解的每一种都是唯一的。(这称为极分解定理)

设 A 是 n 级复可逆矩阵,则存在酉矩阵 P 和两个正定 Hermite 矩阵 H_1, H_2,使得 $A=PH_1=H_2P$,并且 A 的这两种分解的每一种都是唯一的。(这也称为极分解定理)

对于任一 n 级实可逆矩阵 A,存在两个正交矩阵 T_1, T_2,使得 $A=T_1\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T_2$,其中 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的全部特征值。

设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,则 A 可以分解成 $A=QDT'$,其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵;D 是主对角元 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为非负数的 n 级对角矩阵,且 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的全部特征值;T 是 n 级正交矩阵,它的第 j 列是 $A'A$ 的属于特征值 λ_j^2 的一个特征向量,$j=1,2,\cdots,n$。A 的这种分解称为奇异值分解,其中 D 的非零的主对角元称为 A 的奇异值。A 的奇异值分解在生物统计学等领域中有应用。

设 $f(x), g(x) \in F[x]$,域 $E \supseteq F$,则在 $F[x]$ 中 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当在 $E[x]$ 中 $g(x)\mid f(x)$,称之为整除性不随域的扩大而改变。$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式也不随域的扩大而改变,从而互素性也不随域的扩大而改变。若 F 是特征为 0 的域,则 $f(x)$ 有无重因式不随域的扩大而改变。我们证明了:设 A 是域 F 上的 n 级矩阵,域 $E\supseteq F$,则 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 不随域的扩大而改变。显然,A 的特征多项式不随域的扩大而改变。我们还证明了:A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根(重数可以不同),在域 E 中也有相同的根(重数可以不同)。

本套教材在研究线性空间的结构时,证明了有限维线性空间的许多结论对于无限维线性空间也成立。例如,域 F 上线性空间 V 的两个子空间 V_1, V_2(它们可以是无限维的)的和是直和当且仅当 V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 V_1+V_2 的一个基。域 F 上线

性空间 V 的任一子空间 W(可以是无限维的)都有补空间,即存在 V 的子空间 U,使得 $V=W\oplus U$。从而对于 V 的任一子空间 W,都存在平行于 W 的一个补空间 U 在 W 上的投影 $\mathcal{P}_W$,并且 $\mathrm{Im}\ \mathcal{P}_W=W$,$\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_W=U$。

若 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的幂等线性变换,则 $\mathcal{A}$ 是平行于 $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ 在 $\mathrm{Im}\ \mathcal{A}$ 上的投影,且 $V=\mathrm{Im}\ \mathcal{A}\oplus\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$。反之,若 $V=W\oplus U$,则平行于 U 在 W 上的投影 $\mathcal{P}_W$ 是幂等变换,平行于 W 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$ 也是幂等变换,且 $\mathcal{P}_U\mathcal{P}_W=\mathcal{P}_W\mathcal{P}_U=\mathcal{O}$(此时称 $\mathcal{P}_U$ 与 $\mathcal{P}_W$ 正交),$\mathcal{P}_U+\mathcal{P}_W=\mathcal{I}$。投影是最基本的线性变换。

设 V 是域 F 上的线性空间(可以是无限维的),$\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换。在 $F[x]$ 中,$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素,则

$$\mathrm{Ker}\ f(\mathcal{A})=\mathrm{Ker}\ f_1(\mathcal{A})\oplus\mathrm{Ker}\ f_2(\mathcal{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\ f_s(\mathcal{A})。\tag{1}$$

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,如果 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},\tag{2}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素,$r_i>0,i=1,2,\cdots,s$,则

$$V=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{r_1}\oplus\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{r_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{r_s},$$

其中 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{r_j},j=1,2,\cdots,s$,称为 $\mathcal{A}$ 的根子空间;并且 $\mathcal{A}$ 的根子空间 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{r_j}$ 的维数等于 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ_j 的代数重数 $r_j,j=1,2,\cdots,s$。

若 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},\tag{3}$$

则

$$V=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1}\oplus\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s},\tag{4}$$

并且 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{l_j}$ 等于 $\mathcal{A}$ 的根子空间 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{r_j},j=1,2,\cdots,s$。

对于域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$,若它的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成上述一次因式的方幂的乘积,我们通过把 V 分解成 $\mathcal{A}$ 的根子空间的直和,在 $\mathcal{A}$ 的每个根子空间 $W_j=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{l_j}$ 中取一个合适的基(通过 W_j 上的幂零变换 $\mathcal{B}_j=\mathcal{A}|W_j-\lambda_j\mathcal{I}$ 来找合适的基),使得 $\mathcal{A}|W_j$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 为一个 Jordan 形矩阵;把 $W_j(j=1,2,\cdots,s)$ 的基合起来成为 V 的一个基,则 $\mathcal{A}$ 在 V 的这个基下的矩阵 $A=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s\}$ 是一个 Jordan 形矩阵,称它为 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准形。除去 Jordan 块的排列次序外,$\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的。

Witt 消去定理的推广:设 F 是特征不等于 2 的域,$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是域 F 上 n 级对称矩阵,$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 是域 F 上的 m 级对称矩阵。如果

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}_1\simeq\boldsymbol{A}_2$,那么 $\boldsymbol{B}_1\simeq\boldsymbol{B}_2$。

设 V 是特征不为 2 的域 F 上的 n 维线性空间,f 是 V 上的对称或斜对称双线性函数,W 是 V 的一个非平凡子空间,则 $V=W\oplus W^{\perp}$ 的充分必要条件为 f 在 W 上的限制是非退化的,其中 $W^{\perp}:=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}$。

设 q 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个二次函数,则 q 的零锥 S(即:使得 $q(\xi)=0$ 的所有 ξ 组成的集合)包含 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基的充分必要条件是:q 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基

(从而在 $\mathbf{R}^n$ 的任一标准正交基)下的矩阵的迹等于 0。由此立即得到解析几何中的一个结论:在直角坐标系中,顶点在原点的二次锥面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$ 有 3 条互相垂直的直母线的充分必要条件是 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$。从上述结论及其充分性的证明可得到:n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于主对角元全为 0 的矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的迹为 0。我们还证明了:对于域 F 上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的迹为 0,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个主对角元全为 0 的矩阵。

我们建立了域 F 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数空间 $T_2(V)$ 与 V 上的线性变换空间 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 之间的一个同构映射(不用矩阵作为桥梁):设 f 是 V 上的一个非退化双线性函数,任给 V 上的一个双线性函数 g,存在 V 上唯一的一个线性变换 $\mathcal{G}$,使得

$$g(\alpha,\beta)=f(\mathcal{G}(\alpha),\beta),\quad \forall\,\alpha,\beta\in V;$$

令 $\sigma: g\longmapsto\mathcal{G}$,则 σ 是 $T_2(V)$ 到 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一个同构映射。利用这个同构映射,我们给出了特征不为 2 的域 F 上两个 n 级对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可一齐合同对角化(即存在同一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 都为对角矩阵)的充分必要条件。当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,这个充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可对角化(即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可相似于一个对角矩阵)。当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时,若存在 $\lambda_0\in F$,使得 $\boldsymbol{A}+\lambda_0\boldsymbol{B}$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}+\lambda_0\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ 可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可一齐合同对角化;若存在 $\lambda_0\in F$,使得 $\boldsymbol{A}+\lambda_0\boldsymbol{B}$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}+\lambda_0\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ 不可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不能一齐合同对角化。

n 维欧几里得空间 V 上的任一正交变换都可以表示成最多 n 个关于超平面的反射的乘积,其中 $n\geqslant 2$。

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的斜对称变换(即:$\forall\,\alpha,\beta\in V$,有 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$),则 $\mathcal{A}-\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{A}+\mathcal{I}$ 都可逆,且 $\mathcal{B}=(\mathcal{A}+\mathcal{I})(\mathcal{A}-\mathcal{I})^{-1}$ 是 V 上的正交变换;反之,若 $\mathcal{B}$ 是 V 上的正交变换,且 -1 不是 $\mathcal{B}$ 的特征值,则 $\mathcal{A}=(\mathcal{B}-\mathcal{I})(\mathcal{B}+\mathcal{I})^{-1}$ 是 V 上的斜对称变换。

实内积空间 V 上的变换 $\mathcal{P}$ 是 V 在一个子空间上的正交投影当且仅当 $\mathcal{P}$ 是幂等的对称变换。

设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别是实内积空间 V 在子空间 U_1 和 U_2 上的正交投影,则 $\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2$ 是正交投影当且仅当 U_1 和 U_2 是互相正交的(即 $U_1\subseteq U_2^{\perp}$),且此时 $\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2$ 是 V 在 $U_1\oplus U_2$ 上的正交投影;$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ 是正交投影当且仅当 $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$,且此时 $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ 是 V 在 $U_1\cap U_2$ 上的正交投影。

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的对称变换,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有不同的特征值,属于 λ_i 的特征子空间记作 V_i,用 $\mathcal{P}_i$ 表示 V 在 V_i 上的正交投影,$i=1,2,\cdots,s$,则 $\mathcal{A}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\mathcal{P}_i$。这表明正交投影是对称变换的基本建筑块。又由于 n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是对称变换当且仅当 V 中存在一个标准正交基使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵,因此正交投影是 V 中能够找到标准正交基使得在此基下的矩阵为对角矩阵的线性变换的基本建筑块。

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的对称变换,对于任意 $\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq 0$,令 $F(\alpha)=\dfrac{(\alpha,\mathcal{A}\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$,则 $F(\alpha)$ 在 $\mathcal{A}$ 的属于最小(大)特征值的一个单位特征向量处达到最小(大)值。

n 维欧几里得空间 V 上的任意一个关于超平面的反射都是 V 上的对称变换。

对于 n 维酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$，V 中存在一个标准正交基使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵的充分必要条件是 $\mathcal{A}$ 为正规变换（即：$\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随变换）。

设 $\mathcal{H}$ 是 n 维酉空间 V 上的 Hermite 变换，则 $\mathcal{I}-\mathrm{i}\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{I}+\mathrm{i}\mathcal{H}$ 都可逆，$\mathcal{A}=(\mathcal{I}-\mathrm{i}\mathcal{H})(\mathcal{I}+\mathrm{i}\mathcal{H})^{-1}$ 是酉变换，且 -1 不是 $\mathcal{A}$ 的特征值。反之，若 $\mathcal{A}$ 是酉变换，且 -1 不是 $\mathcal{A}$ 的特征值，则 $\mathcal{H}=-\mathrm{i}(\mathcal{I}-\mathcal{A})(\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}$ 是 Hermite 变换。由这个结论得到：在 V 上的所有 Hermite 变换组成的集合与 V 上不以 -1 为特征值的所有酉变换组成的集合之间有一个一一对应 σ：$\mathcal{H}\longmapsto(\mathcal{I}-\mathrm{i}\mathcal{H})(\mathcal{I}+\mathrm{i}\mathcal{H})^{-1}$，称 σ 是 Cayley 变换。它类似于实数集与复平面上的单位圆（去掉 -1 对应的点）之间的一个一一对应：$a\longmapsto(1-a\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})^{-1}$。

酉空间 V 上的变换 $\mathcal{P}$ 是 V 在一个子空间上的正交投影当且仅当 $\mathcal{P}$ 是幂等的 Hermite 变换。

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的正规变换，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有不同的特征值，属于 λ_i 的特征子空间记作 V_i，用 $\mathcal{P}_i$ 表示 V 在 V_i 上的正交投影，$i=1,2,\cdots,s$，则 $\mathcal{A}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\mathcal{P}_i$。于是正交投影是 n 维酉空间 V 中能够找到标准正交基，使得在此基下的矩阵为对角矩阵的线性变换的基本建筑块。

酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果有伴随变换，那么 $\mathcal{A}$ 是正规变换当且仅当 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathrm{i}\mathcal{A}_2$，其中 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$ 都是 Hermite 变换，且 $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$。

设 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_s$ 都是 n 维酉空间 V 上的正规变换，如果它们两两可交换，那么 V 中存在一个标准正交基，使得它们在此基下的矩阵都是对角矩阵。

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的正规变换，则 V 中存在一个标准正交基，使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵是形如下述的分块对角矩阵：

$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_s & b_s\\ -b_s & a_s\end{pmatrix}\right\},$$

此矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的标准形。由此看出，n 维欧几里得空间上的正规变换的标准形与 n 维酉空间上的正规变换的标准形不一样。

1 级酉矩阵组成的酉群 U(1) 与行列式为 1 的 2 级正交矩阵组成的特殊正交群 SO(2) 同构。

行列式为 1 的 2 级酉矩阵组成的特殊酉群 SU(2) 到行列式为 1 的 3 级正交矩阵组成的特殊正交群 SO(3) 有一个满同态（即保持乘法运算的满射），并且同态的核是 $\{\boldsymbol{I},-\boldsymbol{I}\}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 2 级单位矩阵。

任给一个 r 级酉矩阵 $\boldsymbol{P}$，可以得到一个 $2r$ 级正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，并且 $\boldsymbol{Q}$ 是 $2r$ 级辛矩阵；反之，任给一个 $2r$ 级正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，如果 $\boldsymbol{Q}$ 也是 $2r$ 级辛矩阵，那么可得到一个 r 级酉矩阵 $\boldsymbol{P}$。

4. 创新亮点。本套教材有许多创新之处，例如上述三个特色和下文将要讲的特色。此处特别指出创新的两个亮点。

亮点一：本套教材明确阐述了域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 和 n 元多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的通用性质，并且把它们运用于全书各个相关课题中，起到了重要作用。

设 R 是一个有单位元 $1'$ 的交换环,它有一个子环 R_1 含有 $1'$,并且 F 到 R_1 有一个双射 τ,τ 保持加法和乘法运算。任意给定 $t\in R$,令

$$\sigma_t: \quad F[x] \longrightarrow R$$
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \tau(a_i) t^i =: f(t),$$

则 σ_t 是 $F[x]$ 到 R 的一个映射,并且 σ_t 保持加法和乘法运算,还有 $\sigma_t(x)=t$,把映射 σ_t 称为 x 用 t 代入。这就是域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质。这个通用性质指出:只要环 R 满足上述条件,那么从 $F[x]$ 中有关加法和乘法的等式,通过不定元 x 用 R 中任一元素 t 代入,就可以得到环 R 中的有关加法和乘法的等式,产生一通百通的效果。例如,设 $\mathbf{A}$ 是域 F 上的一个 n 级矩阵,由矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有多项式(即形如 $a_m\mathbf{A}^m+a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\boldsymbol{I}$ 的表达式,其中 $a_i\in F, i=0,1,\cdots,m, m\in\mathbf{N}$)组成的集合记作 $F[\mathbf{A}]$。容易验证 $F[\mathbf{A}]$ 是环 $M_n(F)$ 的一个子环,并且 $F[\mathbf{A}]$ 是有单位元 $\boldsymbol{I}$ 的交换环。于是不定元 x 可以用矩阵 $\mathbf{A}$ 代入,也可以用 $\mathbf{A}$ 的任一多项式代入,从而由 $F[x]$ 中有关加法和乘法的等式可以得到 $F[\mathbf{A}]$ 中有关加法和乘法的许多等式。又如,设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换,由 $\mathcal{A}$ 的所有多项式组成的集合 $F[\mathcal{A}]$ 是 V 上所有线性变换组成的环 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一个子环,且 $F[\mathcal{A}]$ 是有单位元 $\mathcal{I}$ 的交换环。于是不定元 x 可以用线性变换 $\mathcal{A}$ 代入,也可以用 $\mathcal{A}$ 的任一多项式代入。正是利用了一元多项式环的通用性质,我们证明了第 3 个特色中的(1)式和(4)式,从而当 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积时,通过把 V 分解成 $\mathcal{A}$ 的根子空间的直和,证明了 $\mathcal{A}$ 有 Jordan 标准形。设 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$,其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\cdots,p_s(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的首一不可约多项式,我们利用一元多项式环的通用性质,把 V 分解成 $V=\bigoplus_{j=1}^{s}\mathrm{Ker}\, p_j^{l_j}(\mathcal{A})$,证明了 $\mathcal{A}$ 有有理标准形。我们利用多元多项式环的通用性质,简洁地证明了对称多项式基本定理中的唯一性;证明了牛顿公式(关于初等对称多项式与幂和 s_k 的关系的公式);证明了辛矩阵的行列式等于 1。

亮点二:本套教材在研究线性变换的最简单形式的矩阵表示等问题时,充分发挥了最小多项式的作用。首先,我们证明了下述结论:

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换,如果 V 能分解成 $\mathcal{A}$ 的一些非平凡不变子空间的直和:

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s,$$

那么 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$,其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $\mathcal{A}|W_j$ 的最小多项式,$j=1,2,\cdots,s$。

然后我们利用最小多项式证明了下列重要结论:

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,则 $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同的一次因式的乘积;$\mathcal{A}$ 有 Jordan 标准形当且仅当 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解成一次因式的乘积;若 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$,则 $\mathcal{A}$ 有有理标准形。

设 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$ 都是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。如果 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$

两两可交换且都可对角化，那么 V 中存在一个基，使得$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$ 在此基下的矩阵都是对角矩阵。

设$\mathcal{A}$是域F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\mathcal{A}$的最小多项式$m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda),$$

则 $\mathrm{Ker}\ p_j^{l_j}(\mathcal{A})$的维数等于 $p_j(\lambda)$的次数乘以$\mathcal{A}$的特征多项式$f(\lambda)$的标准分解式中 $p_j(\lambda)$的幂指数，$j=1,2,\cdots,s$。

设$\mathcal{A}$是域F 上线性空间 V 上的线性变换，则 $F[\mathcal{A}]$是域 F 上的线性空间，并且$F[\mathcal{A}]$的维数等于$\mathcal{A}$的最小多项式$m(\lambda)$的次数。

设$\mathcal{A}$是域F 上 n 维线性空间V 上的线性变换，把与$\mathcal{A}$可交换的所有线性变换组成的集合记作 $C(\mathcal{A})$，则 $C(\mathcal{A})$是域 F 上的一个线性空间。设$\mathcal{A}$在V 的一个基下的矩阵是$\boldsymbol{A}$，把与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有 n 级矩阵组成的集合记作 $C(\boldsymbol{A})$，则 $C(\boldsymbol{A})$是域 F 上的一个线性空间。显然 $C(\mathcal{A})$与 $C(\boldsymbol{A})$同构。在 $M_n(F)$中，若 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 相似，则 $C(\boldsymbol{A})=C(\boldsymbol{B})$。

设$\mathcal{A}$的最小多项式为$m(\lambda)$，$\mathcal{A}$的特征多项式为 $f(\lambda)$。

设 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中的标准分解式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$，则当 $s=n$ 时，$C(\mathcal{A})=F[\mathcal{A}]$，并且 $\dim C(\mathcal{A})=n$。当 $s<n$ 且$\mathcal{A}$ 可对角化时，若

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

则 $\dim C(\mathcal{A})=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i^2$，$C(\mathcal{A})\cong M_{k_1}(F)\dotplus M_{k_2}(F)\dotplus\cdots\dotplus M_{k_s}(F)$，$C(\mathcal{A})\supsetneqq F[\mathcal{A}]$。

设 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$。若$\mathcal{A}$的 Jordan 的标准形为

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{l_1}(\lambda_1),\boldsymbol{J}_{l_2}(\lambda_2),\cdots,\boldsymbol{J}_{l_s}(\lambda_s)\},$$

则 $\dim C(\mathcal{A})=n$，$C(\mathcal{A})=F[\mathcal{A}]$。

若$\mathcal{A}$的 Jordan 标准形中有一个特征值 λ_j 至少有两个 Jordan 块，则 $\dim C(\mathcal{A})>n$，$C(\mathcal{A})\supsetneqq F[\mathcal{A}]$。此时，记 $W_j=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{l_j}$，$\mathcal{A}_j=\mathcal{A}|W_j$，$j=1,2,\cdots,s$，则

$$C(\mathcal{A})\cong C(\mathcal{A}_1)\dotplus C(\mathcal{A}_2)\dotplus\cdots\dotplus C(\mathcal{A}_s),\quad \dim C(\mathcal{A})=\sum_{i=1}^{s}\dim C(\mathcal{A}_i)。$$

设 $m(\lambda)$在 $F(\lambda)$中的标准分解式为 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$，其中至少有一个 $p_j(\lambda)$的次数大于 1。

若$\mathcal{A}$的有理标准形是一个有理块，则 $\dim C(\mathcal{A})=n$，$C(\mathcal{A})=F[\mathcal{A}]$。

若$\mathcal{A}$的有理标准形的各个有理块的最小多项式两两互素，则

$$\dim C(\mathcal{A})=n,C(\mathcal{A})=F[\mathcal{A}]。$$

若 $m(\lambda)=p_1(\lambda)$，$\deg\ p_1(\lambda)=r>1$，且$\mathcal{A}$ 的有理标准形至少有两个有理块，则 $\dim C(\mathcal{A})=\frac{1}{r}(\dim_F V)^2$，$C(\mathcal{A})=\mathrm{Hom}_{F[\mathcal{A}]}(V,V)$。

若 $m(\lambda)=p_1(\lambda)p_2(\lambda)\cdots p_s(\lambda)$，$\deg\ p_i(\lambda)=r_i$，$i=1,2,\cdots,s$。设 $f(\lambda)=p_1^{k_1}(\lambda)p_s^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$，记 $W_i=\mathrm{Ker}\ p_i(\mathcal{A})$，$\mathcal{A}_i=\mathcal{A}|W_i$，$i=1,2,\cdots,s$，则