

国家自然科学基金资助项目

非线性科学青年著作

相空间的结构 与自相关

*Structure in Phase space
and Autocorrelation*

陈 滨 唐 军 著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

国家自然科学基金资助项目

非线性科学青年著作

相空间的结构与自相关

陈 滨 唐 军 著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

世界在人类层次的运转可归结于一系列结构动力系统的运作。

本书主要研究动力系统结构同其表征可观测性的自相关函数的一些联系,论证了相空间同自相关关联的若干定理,特别是对点密度定理的论证,可以基本解决非线性信号自相关的问题。

本书包含9章,重点是动力系统的若干个定理以及运用这些定理对动力系统和序列所进行的改进。第一、二章对动力系统和非线性动力信号的自相关特性进行了简介;第三、四、五章介绍相空间研究结构和自相关的入门——APAS定理,以及对序列的改进;第六、七章介绍更具普遍性的定理以及对序列的改进;第八、九章介绍点密度定理,以及对序列比较随意的改进。最后在结语里作者给出了对相空间结构与自相关研究的感想、意义和展望。

本书从创新的视角研究相空间问题,适合对非线性科学和信号科学感兴趣的较专业的读者阅读,也适合尝试在现实生活中换一种角度看待问题的广大读者。本书内容是科学严谨的,同时作者力求使科学问题泛化,面向普通读者而不缺乏趣味性。

图书在版编目(CIP)数据

相空间的结构与自相关/陈滨,唐军著. —西安:西安电子科技大学出版社,2019.4
ISBN 978-7-5606-5270-2

I. ① 相… II. ① 陈… ② 唐… III. ① 相空间—研究 IV. ① O186.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 036204 号

策划编辑 李惠萍

责任编辑 唐小玉

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com

电子邮箱 xdupfb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2019年4月第1版 2019年4月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 10.5

字 数 202千字

印 数 1~1000册

定 价 25.00元

ISBN 978-7-5606-5270-2/O

XDUP 5572001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

序 言

本书从一个较简单的角度——相空间，探讨动力系统的结构与状态可探测性这两个因素的联系和规律。相空间其实就是通过延时重构，把低维数据转换成高维数据，在高维空间里揭示事物本身所隐含的结构特点。书中关于序列在相空间的非线性结构与自相关的研究内容，都是由本研究小组经过研究首先揭示和披露的。

我们的世界就是一系列的动力系统，这些系统有各自的结构，并依照各自的结构进行演化。对于人类观测者来说，可能更关心系统的演化规律，以便提前做出准备和适应。那么，人类通过收集系统的演化状态，怎样判断某些重要演化特征是否出现和何时出现呢？这就要回到现代信号探测理论的信号自相关特性。自相关特性越好的信号，就越容易被探测出来，越容易准确判断信号被探测到的时间。说到雷达系统的原理，多数读者可能比较陌生，但说起某股票出现了一个强烈的买入信号，是在某个确定时刻出现的，可能读者就容易理解其重要性了。

现代非线性动力学理论揭示了一个现象：简单的模型可能蕴含着无比复杂的动力学性态。其含义用通俗的话说就是，只研究事物的本质可能没多大用处，要研究其运行规律才可以更好地应对更全面的系统。其实我们知道事物的本质是很重要的，但往往事物的本质非常简单，甚至一个简单动力方程就可以描述。把这个动力方程研究个底朝天也就那么回事，关键是这个动力方程运行起来所展现的规律，对于我们人类这种适应者来说才更加重要。只有了解这些规律，才能预先准备好应对措施。而动力演化规律往往无比复杂，人类通常是收集一定长度的演化状态数据，查找其某些关键特征，依据其关键特征是否出现和何时出现，来做出后续的应对措施。

动力系统往往是连续的系统，但人类借助计算机进行处理，必须使用离散的数据。因此，需要对连续系统的演化状态进行采样、模/数转换，转化成离散的数据。一串离散数据叫做序列。本书借助计算机对数据进行处理也不例外，数据处理的对象是数据序列。

为了使人们更好地探索事物的演化规律，探测重要演化的状态是否出现和何时出现，以便做出决策，本书把动力系统的结构与揭示其演化可探测性的指标——自相关函数——在相空间中结合起来。这正是本书独特的视角。

本书避开无比复杂的非线性动力学演化过程，只关心其简单规律。这些简单规律可能看似简单，但却具有很好的应用价值，本研究小组前期成果有的发表在《中国科

学》杂志上。这些规律都是本研究小组经过长时间的研究首先发现和披露的，均经过了严格的科学证明和大量的实践仿真检验，具有无可辩驳的科学性和真实性。同时，很多具有更强实用性的结果，也在本书中披露。

为了通俗易懂，本书的论证没有使用专业性很强的数学知识，仅使用了高等数学、概率论、线性代数里较简单的基础内容。这样可以使大多数读者看明白书中定理的论证过程以及论证的前因后果，了解和掌握事物的本质同演化规律之间的联系。

本书的结构是基于书中的定理、规律被发现的时间顺序来组织的。其实时间顺序在很大程度上也代表了这些规律的深刻程度。越深刻的东西往往越难被理解，前面的规律虽然没那么深刻，但往往更直观、更容易被理解。读者理解了直观的规律，往往就明白了我们研究者在思考什么样的问题。以此为基础，再往后面理解更深刻难懂的规律，就没那么难了。

笔者清楚地记得，当发现本书的第一个规律，也就是本书的第一个综合性的定理——APAS 定理——的时候，感觉一下子像打开了一扇窗户，内在规律清晰可见，困扰学术界多年的非线性序列自相关特性不稳定的问题，一下子变得澄清透明。虽然我们的发现只是浩瀚知识海洋的一小点水滴，是小众研究，但带来的满足感真是难以名状。

时间悠悠又过去了好几年，更多的规律被本研究小组陆续发现，被发现的规律已经深刻到可以像做游戏一样，任意组合构建新序列的程度，并且得到的自相关特性已经是精确意义上的好，也极其稳定，但很难重现当初发现 APAS 定理时的激情。学术界对这种小众研究习惯性地淡漠，毕竟隔行如隔山，大家各忙其事，很难有谁再去关心一个小众问题的研究又有什么新进展。毕竟一个 APAS 定理已经打开了一扇窗，可以解决大多数的问题了。

我们研究小组决定，直接把研究成果放在本书里向大众公开，也省去了发表多篇论文的麻烦。希望通过本书的介绍，能够为大众理解事物的本质和演化规律，换一个新的角度思考问题。

陈 滨

2018 年 11 月

前言

我们这个世界宏观上可以归结为一系列的动力系统，大到银河系、生态系统、天气系统、社会系统、股票系统等，小到一个人的行为、一个物体的运动、一只股票的涨跌、一阵风、一滴水等。这里所说的动力系统就是一些相互关联的客体组成的集合。动力系统的系统状态变量，比如温度、位移、价格、信号幅值等，是随着时间变化的，这一变化关系可以用微分方程或者离散方程来描述。

牛顿、伽利略、欧拉、雅克比等人研究微分方程时发现，即使满足牛顿引力定律的三体运动(即宇宙中独立的三个天体仅在相互引力的作用下发生的运动)也非常复杂。庞加莱发现即使是确定性系统，其运动规律也会出现随机性态，非常复杂。随后李雅普诺夫、本迪尔松等接着研究了非线性系统的复杂性。Li 和 Yorke 提出了混沌的概念，即系统的解是非周期的一种类似随机运动的现象，这其中就包含了洛伦兹提出的“蝴蝶效应”，即初始条件的微小变化会导致系统状态的巨大改变。从此有关非线性科学的发展异常迅速，形成了现代动力学理论，其最重要的贡献是揭示了一个简单的模型可能蕴含了无比复杂的动力学性态。换句话说，我们这个世界事物的构成可能相对简单，其演化过程却可能极其复杂。探索演化规律，找出重要演化特征以便后续应对，可能也并不容易。

本书不研究上述复杂的动力学问题，只在相空间中探讨动力系统的结构和演化状态可探测性这二者的联系和规律，以便人们准确检测出某演化状态是否出现以及出现的时间，便于积极应对。一个动力系统的状态变量经过演化会得到一系列的值，我们将其视为信号。表征信号的可探测性能，首推现代信号探测理论的信号自相关函数。自相关函数特性越好的信号，就越容易被探测出来，越容易准确判断信号被探测到的时间。有些动力系统信号的自相关特性很好，即主峰尖细突出，副瓣极低。但有些动力系统信号自相关特性却很差。并且，动力系统信号自相关特性的好坏难以直接找到原因。

因为有些事物演化信号的自相关特性很差，是不易被观察和准确判断的，这就为人们判断其某种演化特征是否出现以及何时出现带来了困难，也就难以采取合适的应对措施。本书就针对该问题提出一点见解和方法，希望通过简单转换，把不易观测的

信号变为容易观测的，便于人们准确观测其是否发生和发生的时间，从而做出正确应对。

我们的研究证实，动力系统结构决定了其信号的自相关特性。但是，结构怎样决定自相关特性的，什么样的结构会得到好的自相关特性呢？自相关特性的好坏也是分程度等级的，但是好到什么程度呢？是严格意义上的好，没有提升空间了；还是相对意义上的好，还有提升空间呢？本书会对这些问题进行讨论，并得出相关结论。

本书的内容结构安排如下：

- (1) 简单介绍相关领域的知识及动力系统信号的自相关特性；
- (2) 介绍首次揭示的规律——APAS 定理；
- (3) 介绍应用面更广的 APCZS 定理和推论；
- (4) 介绍考虑点密度影响的超级规律——APCZS - PD 定理和推论；
- (5) 对动力系统的超级改进；
- (6) 感想和展望。

本书的大体结构是按定理被发现的时间顺序来组织的，很大程度上也是按这些定理的深刻程度排序的。越深刻的东西往往越难被理解，稍浅显的规律往往更直观、更容易被理解。读者了解了本书前面部分直观的规律，往往就抓住了我们研究者的思路，再往后面理解更深刻难懂的规律，就容易多了。

通过本书的介绍，希望广大读者可以尝试换一种新的角度思考问题，更好地洞悉事物的本质和演化表象之间的关联，可能会使我们的决策有更好的效果。

感谢我的导师周正欧教授、刘光祜教授、张玉兴教授在研究过程中对我的悉心指导，感谢何子述教授、洪时中教授对我的帮助，同时感谢西安电子科技大学出版社李惠萍、唐小玉等同志为本论著的出版所做的认真细致的工作。

本著作由国家自然科学基金项目(项目编号：61562035, 61762043)资助出版，特此鸣谢。

限于作者的水平和能力，书中难免存在纰漏之处，敬请同行、专家批评指正。

陈 滨

2019 年 1 月

目 录

第一章 自然界动力系统简介	1
1.1 概述	1
1.2 动力系统基础	2
1.2.1 非线性动力系统及其研究的历史发展	2
1.2.2 非线性动力系统研究的目的和意义	5
1.3 非线性动力系统的基本理论	6
1.4 相空间初探	9
1.4.1 相空间的通俗释义	9
1.4.2 相空间重构	10
1.4.3 最小嵌入维数的确定	11
1.4.4 正确重构相空间	13
1.5 非线性系统的多样性和复杂性	14
1.5.1 连续非线性动力系统的多样性	15
1.5.2 离散非线性动力系统的多样性	16
1.6 有序和无序	23
第二章 非线性动力信号的自相关特性	25
2.1 非线性动力信号的自相关定义	25
2.2 信号自相关特性的应用	26
2.3 不同序列自相关特性的差异性	26
2.4 自相关问题对非线性动力系统应用的影响	27
2.5 传统方法研究非线性动力信号自相关的困难	28
2.5.1 统计方法研究非线性信号自相关的困难	28
2.5.2 传统解析方法研究非线性信号自相关的困难	30
第三章 相空间法对序列自相关的初步研究——APAS 定理	31

3.1 相空间和自相关的联系及 APAS 定理	31
3.1.1 相空间和自相关的联系	31
3.1.2 APAS 定理	33
3.2 相空间法研究非线性信号自相关特性的实质和意义	38
第四章 对相空间法得出结论的检验	39
4.1 用各种不同信号进行检验	39
4.1.1 用低维非线性信号检验	39
4.1.2 用高维非线性信号检验	47
4.1.3 用空时非线性信号检验	52
4.1.4 用噪声信号检验	53
4.1.5 用弱结构非线性信号检验	53
4.2 APAS 定理的验证效果	54
第五章 相空间法对非线性信号自相关特性的改进	55
5.1 改良方法	55
5.2 对改良方法的检验	57
5.2.1 用低维非线性信号检验	57
5.2.2 用高维非线性信号检验	70
5.2.3 用空时非线性信号检验	80
5.3 ADC 和噪声对自相关特性以及改良方法的影响	83
5.3.1 ADC 和噪声对自相关特性的影响	83
5.3.2 ADC 和噪声对改良方法的影响	86
5.4 APAS 改良方法的效果和意义	87
第六章 APCZS 定理	88
6.1 APAS 定理的逆命题不一定成立	88
6.2 相空间坐标零和(APCZS)定理及其证明	90
6.3 APCZS 定理——APAS 定理的扩展	93
6.4 APCZS 定理的简单使用方法以及点密度问题	95
6.4.1 是否满足坐标零和条件的一种简单判定方法	95
6.4.2 需要注意的点密度问题	96

6.5	用 APCZS 定理构建非线性序列	98
6.6	APCZS 定理的效果	99
第七章	APCZS 定理的推论	100
7.1	APCZS 定理的推论	100
7.2	用推论构建非线性序列	102
7.3	用简单方法判定定理的推论条件	104
7.4	APCZS 定理推论的特点	104
第八章	APCZS - PD 定理和推论	105
8.1	点密度的定义	105
8.2	忽略点密度带来的误差	107
8.3	考虑点密度对以前定理的改进	109
8.3.1	APCZS - PD 定理及其证明	110
8.3.2	APCZS - PD 定理的推论	114
8.3.3	APCZS - PD 定理和推论与 APCZS 定理和推论的对比	116
8.3.4	使用 APCZS - PD 定理及推论需要注意的问题	116
8.4	对 SingleLine - Bernoulli 序列和 Skew Tent - Bernoulli 序列的系统检验	117
8.5	对 APAS 定理用点密度方式进行形式统一	119
8.5.1	APAS - PD 定理	119
8.5.2	对 APAS - PD 定理的检验和应用	121
8.5.3	慎用曲线映射序列	123
8.6	点密度修正的定理特性	126
第九章	非线性序列自相关特性的精确改良	127
9.1	序列的精确改良及需要注意的问题	127
9.1.1	边界分段线性映射的状态变量均匀分布	127
9.1.2	边界分段线性映射的重构操作对满足定理的影响	129
9.1.3	边界分段线性映射重构的 3 个重要方法	132
9.2	对未考虑点密度序列的检验改进	132
9.2.1	对简单序列的检验或改良	132

9.2.2 对较复杂序列检验或改良	134
9.3 边界分段线性映射序列的有效改良方法和趣味性	148
结语——对本书研究内容的感想、意义和展望	149
一、研究总结、感想和意义	149
二、关于充要条件和展望	150
参考文献	151

第一章 自然界动力系统简介

世界在人类的尺度可以视为由一系列动力系统构成。人类为了适应自然和社会，需要了解动力系统的演化规律。但动力系统的演化往往很复杂，即使简单的动力系统也会产生非常复杂的演化。因此，人类为了生存发展，需要把握一些动力系统的演化特征，检测某演化特征是否出现及何时出现，这就需要表征动力序列特征检测性能的自相关函数的支持。哪些种类的动力序列具有好的自相关特性，易于检测呢？换一个视角，在相空间探索这个问题，这就是本书的内容。

1.1 概 述

我们这个世界，物换星移，四季变化，潮起潮落，蝉吟鸟鸣。人类社会，起起落落，分分合合，涨涨跌跌，富贵贫穷，风光落寞。万千变化，都离不开宇宙的基本规律，内部都有其相应的动力作用机制。

这个世界宏观上可以归结为一系列的动力系统，大到银河系、生态系统、天气系统、社会系统、股票系统等，小到一个人的行为、一个物体的运动、一只股票的涨跌、一阵风、一滴水等。这里的系统是一些相互关联的客体组成的集合，动力系统的表象是系统状态变量的外在表述，比如温度、位移、价格、信号幅值等，是随着时间变化的。它可以用微分方程或者离散动力方程来描述。

动力系统的结构可以很简单，但外在表象却无比复杂。微分方程历史悠久，可追溯到牛顿、伽利略、欧拉、雅克比等人。他们在研究中发现即使满足牛顿引力定律的三体运动也非常复杂，其微分方程是非线性的。非线性是指不满足叠加定律的方程，无法利用已知函数描述其解，也没有显式解。庞加莱试图利用解的拓扑几何性质来解释动态系统的运动规律，发现即使是确定性系统，其运动规律也会出现随机性态，非常复杂。随后李雅普诺夫、本迪尔松等人接着研究了非线性系统的复杂性。1975年，Li和Yorke提出了混沌的概念，即系统的解是一种非周期性的类似随机运动的现象，这其中就包含了洛伦兹(Lorenz)提出的“蝴蝶效应”。这类非线性动力系统对于初始条件极其敏感，初始条件的微小变化就会导致系统状态的巨大改变。从此有关非线性科学的发展异常迅速，形成了现代动力学理论，其最重要的贡献是揭示了一个简单的模型可能蕴含着无比复杂的动力学性态。

人类了解动力系统,无非是想了解其运行规律,以便做出应对;或者改良动力系统,使其运行有益于人类。但现代动力学理论表明:简单的模型可能蕴含着无比复杂的动力性态。也就是说仅研究事物的本质没有多大用处,要研究其运行规律才行。其实我们知道事物的本质是很重要的,但往往事物的本质非常简单,甚至一个简单动力方程就可以描述。把这个动力方程研究个底朝天也未必有更深入的认识,关键是这个动力方程运行起来所展现的规律,对于我们人类这种适应者来说才更加重要。只有了解这些规律,才能预先准备好应对措施。而动力演化规律往往无比复杂,人类通常需要收集一定长度的演化状态数据,查找其某些关键特征,依据其关键特征是否出现和何时出现,来做出后续的应对措施。

这就牵涉到现代信号探测理论的信号自相关函数。对于动力系统,其信号自相关函数特性越好,就越容易被探测出来,越容易准确判断信号被探测到的时间。可是从表面上看,动力信号的自相关特性同其系统结构难以关联上,这一问题困扰学术界多年。倒不是找不到合适的动力信号来用,把动力信号一个个拿来计算自相关函数,总可以找到合适的自相关动力信号,但大家在用动力信号的时候心里没底,不知道动力信号的自相关特性应该是好,还是应该是坏,也不知道这些信号经过一些变化是否还会保持好的自相关特性。现在这些疑虑基本可以消除了,本书对这些问题做了详细论述,并得出很多相关结论。

为了使人们更好地探索事物的演化规律,探测重要演化的状态是否出现和何时出现,以便做出决策,我们研究小组把动力系统的结构与揭示其演化可探测性的指标——自相关函数,在相空间中结合起来探索其规律。

以下对本书的一些基础常识作简单的介绍。

1.2 动力系统基础

1.2.1 非线性动力系统及其研究的历史发展

现实世界的动力结构本质一般是确定的,而演化却是复杂的,看似无序的。确定性与复杂性在现实世界里统一起来,往往为我们找寻演化规律带来了困难。动力机理存在于几乎所有物质世界以及人类社会中,对事物乃至人类行为、社会的演化都起着重要作用。大至宇宙,小至基本粒子,无不受其支配。

确定性动力系统演化会出现极其复杂的、类似随机的混沌现象。这里,“确定性系统”是指系统由确定的动力学方程所描述;“随机”是指系统演化本身具有内随机性,表现为系统长期行为的不可预测性。混沌现象表明确定性与随机性两者是相通的,体现了两者既对立又统一的关系,即确定性内在地包含随机性,随机性隐含着确定性;有序中产生无序运动状态,无序来自有序,无序中蕴涵着有序。确定性动力系统却表现出一种貌似无序的复

杂有序现象。非线性动力系统的最大特点就在于系统的演化对初始条件十分敏感,因此从长期意义上讲,系统的未来行为是不可预测的。

众所周知,300多年前,牛顿的万有引力定律和他的三大力学定律将天体的运动和地球上物体的运动统一起来了。牛顿这一科学贡献曾被视为近代科学的典范。

随着科学的发展,人们进一步认识到,牛顿力学的真理性受到了一定范围的限制。19世纪末20世纪初,人们发现牛顿力学不能反映高速运动的规律,一切接近光速的运动应当用爱因斯坦的相对论方程来计算,光速 c 便成为牛顿力学应用的第一个限制。在此前后,人们又发现,微观粒子的运动并不遵守牛顿力学的规律,在微观世界中应当用量子力学中的薛定谔方程来代替牛顿力学方程,普朗克常数 h 就成了牛顿力学的第二个限制。

但仅仅在简单动力机制作用下,系统的演化行为就简单吗?答案是否定的。19世纪,法国数学物理学家庞加莱在研究保守系统天体力学时,以太阳系的三体问题运动为背景,发现三体引力的相互作用能产生惊人的复杂行为,确定性动力学方程的某些解具有不可预见性,即在简单力学规则下,无法精确计算三个或三个以上天体的运动,他意识到了简单规则下多体引发的运动的复杂性。实际上,这就是非线性动力系统产生的混沌现象。这一发现使庞加莱成为公认的混沌理论的开创者。他为混沌动力学理论贡献了一系列重要概念,如奇异点、分岔等,还提出了参数微扰、庞加莱截面法等混沌研究方法。1903年,他在《科学与方法》中把动力学系统与拓扑学结合起来,指出了混沌存在的可能性。同时,庞加莱还意识到不可预测的偶然性起源于不稳定性。在庞加莱之后,很多科学家在各自的研究领域为混沌的建立进行了知识积累。

20世纪五六十年代,非线性动力系统的研究取得了重大突破。苏联概率论大师安德烈·柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolaevich Kolmogorov)发现,如果把一个充分接近可积Hamilton(哈密顿)系统的不可积系统当作可积Hamilton系统的扰动来处理,在小扰动条件下,系统的运动图像与可积系统基本一致;当扰动较大时,系统的图像发生了本质变化,产生了混沌现象。随后他的学生弗拉基米尔·阿诺德(Vladimir Iosifovich Arnold)及德国数学家吉根·库尔特·莫泽(Jürgen Kurt Moser)分别给出了较弱条件下的证明。人们将这些结论综合起来称之为KAM定理,该定理被公认为是混沌学理论创建的历史性标志。这也是一个多世纪以来,人们利用微扰方法处理不可积系统所取得的第一次突破性进展,成为现代混沌学的一个开端。1963年,美国气象学家洛伦兹(E. N. Lorenz)在有关耗散系统的研究中取得了现代混沌学研究的第二个突破性进展。他在对一个由确定的三阶常微分方程组描述的大气对流模型的研究中发现,系统的长期行为对初值的微小变化具有高度的敏感依赖性,这就是有趣的“蝴蝶效应”。这一结果表明,长期的天气预报是不可能的。根据这一结果,Lorenz在流体对流模型数值解的不确定性论文《确定性的非周期流》中揭示了混沌系统的不可预测性,从而为耗散系统的混沌研究开辟了崭新的道路。

1971年,D. Ruelle和F. Takes通过严密的数学分析分别发现了奇怪吸引子,并提出

利用奇怪吸引子描述湍流形成机理的新观点,发现了第一条通向混沌的道路,为解开湍流的百年之谜指出了方向。1975年,美籍中国学者李天岩及其导师 J. A. Yorke 在一篇题为《周期 3 意味着混沌》的著名论文中,给出了在闭区间连续自映射的混沌定义,深刻揭示了从有序到混沌的演变过程,并正式引入了“混沌”一词,从而为这一新兴研究领域确立了核心概念,为各个学科研究混沌现象树立了一面统一的旗帜。1977年,第一次国际混沌会议在意大利召开,标志着混沌科学的诞生。

20 世纪 80 年代, Lyapunov(李雅普诺夫)指数、分数维、吸引子等一系列刻画混沌的概念先后被确定下来。1980年, Takes 等人提出了根据时间序列重构系统动力学结构的延迟坐标法,为混沌时间序列的建模预测奠定了理论基础。1982年, Gukenheimer 利用 Lyapunov 指数提出了区分混沌与真正随机运动的算法。1983年, Ford 利用遍历理论,得出混沌产生于通常被称为确定性系统的原因在于“数学上所要求的无限精度与物理系统所提供的有限精度之间的矛盾”。1984年, 郝柏林的《混沌》一书在新加坡出版,为混沌科学的发展起了一定的推动作用。1986年,中国第一届混沌会议在桂林召开,中国科学家徐京华首次提出三种神经细胞的复合网络,并证明它存在混沌。

随着人们对混沌研究的不断深入,人们在对混沌现象及其产生机制等进行探索的同时,也在关注混沌应用的研究。20 世纪 90 年代初,国际上混沌控制与同步有了突破性的进展,激发了混沌理论与应用研究的蓬勃发展,从而使混沌的应用出现了契机。由于混沌的奇异特性,特别是对初始条件极其微小变化的高度敏感性及不稳定性,即所谓“差之毫厘失之千里”的缘故,使得混沌系统的长期运动具有不可预测性。所以,一直以来,人们认为混沌是有害的、不可控的、不可靠的,在实际中总是尽量避免混沌。同时,混沌系统及混沌现象的奇异和复杂性也尚未被彻底理解,人们一直认为混沌系统不能人为地控制和诱导。直到 1990 年,美国科学家 Ott、Grebogi、Yorke 基于参数扰动方法提出了参数小微扰法(即 OGY 方法),才第一次实现了混沌控制。后来,一些传统的控制方法引入到混沌控制中,并获得了一些有益的成果。这些方法不仅提供了混沌控制的途径,更重要的是为混沌控制走向实际应用奠定了坚实的基础。

最早控制混沌的目的是消除混沌,但在一些实际问题中,混沌态本身就是很有用的运动形态,甚至是我们追求的目标。例如,当粒子在固体表面上通过扩散实现掺杂时,强混沌的运动形态有利于掺杂的速度和质量。在研究心脏的振动规律时人们发现,混沌信号正是健康的标志等。既然混沌对人类也有着正面的作用,研究如何在保持系统混沌特征的同时又能控制其轨道行为就成为一个有用的课题,这就引出了混沌同步的概念。从总体上说,混沌同步属于混沌控制的范畴,所不同的是其控制的目标态是混沌。首例混沌同步现象由美国学者 Pecora 和 Carroll 于 20 世纪 90 年代初期在电子学线路设计实验中实现,并将其成功应用于保密通信中。在此之前,由于混沌行为的最大特点是运动轨迹对初始条件的极大敏感性,因此任何两条相邻的轨道都要以指数规律互相分离直至变得完全互不相

关。长期以来,人们认为重构相同的、完全同步的混沌系统是不可能的。混沌同步的发现打破了这个禁锢,极大地推动了混沌同步的理论研究,从而拉开了混沌应用研究的序幕。

正如日本著名统计物理学家久保在 1978 年所指出的:“在非平衡非线性的研究中,混沌问题揭示了新的一页。”美国一个国家科学机构把混沌问题列为当代科学研究的前沿之一。混沌科学最热心的倡导者、美国海军官员施莱辛格(Shlesinger M)说:“20 世纪科学将永远铭记的只有三件事:相对论、量子力学与混沌。”物理学家福特(Ford J)认为混沌就是 20 世纪物理学第三次最大的革命。

与牛顿力学的应用经受相对论和量子力学革命性的突破有所不同,这次革命的实质就在于混沌这种复杂非线性动力现象直接用于研究人们所感知的真实宇宙,用在与人类本身尺度大小差不多的对象中所发生的过程。人们研究混沌时所探索的目标就处在日常生活经验与这个世界的真实图像之中。

众所周知,牛顿力学所描绘的世界是一幅静态的、简单的、可逆的、确定性的、永恒不变的自然图景,形成了一种关于“存在”的机械自然观。而人们真正面临的世界却是地质变迁、生物进化、社会变革这样一幅动态的、复杂的、不可逆的、随机性的、千变万化的自然图景,形成的是关于“演化”的自然观。在人类生活的尺度里,相对论和量子力学只起较微小的作用。同时,在这个尺度下,自然界、社会的动力结构机制往往很简单,但演化行为却可以极端复杂。

人类在世界上适应和生存,与世界一起演化,面临更多的是一种关于复杂和貌似随机演化过程的科学,而非简单动力本质的科学。因此,找寻复杂演化过程与简单动力结构本质的关联非常重要。

1.2.2 非线性动力系统研究的目的和意义

一方面,非线性动力系统是我们这个世界的重要组成部分之一,自然界和人类社会的运行本质上可视为一系列非线性动力系统的演化;另一方面,通过非线性动力科学的确定性和复杂性研究,导致混沌现象的发现,是 20 世纪物理学上继相对论与量子力学后的第三次革命。“相对论消除了关于绝对空间与时间的幻象,量子力学消除了关于可测量过程的牛顿式的梦,而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测性的幻想”,从而大大解放了人们的思想。也就是说,混沌动力学的建立,使描述客观世界的两大理论体系——确定论和随机论——长期对立状态达到了自然和谐的统一,找到了由此及彼的桥梁;解开了哲学上的百年之谜,使人类的认识产生了一次新的飞跃,对有序与无序、确定与随机之间关系的认识更加深刻;启示人们认识事物的复杂性,揭示出自然界及人类社会中普遍存在的复杂性、有序与无序的统一、确定性与随机性的统一。目前,混沌论甚至被视为一种崭新的方法论,将成为人们深入认识客观世界和改造客观世界的新武器。美国《纽约时报》科技部主任格莱

克在其全球畅销书《混沌：开创新科学》中对混沌的意义和可能影响作了精彩的评说：“其覆盖面几乎广及自然科学与社会科学的每个领域。它不仅改变了天文学家看待太阳系的方式，而且开始改变企业保险决策的方式，改变分析紧张局势导致武装冲突的方式等。混沌学正在促使整个现代知识体系成为统一的新科学”。今天，非线性动力系统理论和方法已经应用到自然和人类社会的各个方面，全方位应用到人类文明、社会、经济、医疗、科技、工程等领域，并在各个领域取得了大量的成果。可以说当今社会已经与非线性动力系统研究紧密结合、融为一体。

非线性动力科学牵涉到现实世界的方方面面，对现实世界造成了广泛而重要的影响。但由简单动力系统表现出来的复杂演化状态、混沌的种类、产生机制和产生条件都很复杂，增加了我们研究的难度，为我们找寻其规律设置了障碍。

非线性动力系统有一个重要特点：内部结构的固有确定性同其演化的复杂性有着紧密的联系。因此，利用内部固有结构性来研究其演化规律，是一个有效的方法，也是本书研究动力信号自相关的一个关键方法。

在本书中将会看到，无论非线性动力系统的演化如何复杂，如何具有初值敏感性，具有蝴蝶效应等，总会有一定的结构。具有结构就为我们研究其可探测性提供了机会。我们将以其结构为基础，深入到相空间，探索和改良系统演化状态的可探测性，为人们认识、发现、预测事物的运行状态提供便利。

1.3 非线性动力系统的基本理论

可以认为，自然界和人类社会往往是由较简单的动力系统通过各种方式组成的。因此，较简单的动力系统是我们找寻其规律的首要对象。我们先来看看动力系统的基本情况。

考虑如下的非线性动力系统：

$$\dot{x} = f(x, p) \quad (1-1)$$

其中， $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态； $p \in \mathbf{R}^k$ 为系统参数； f 是光滑函数。

对于给定的初始条件 x_0 ，设系统的解为

$$x = x(t; t_0, x_0, p) \quad (1-2)$$

下面针对此模型，以 Rössler 动力系统为例来进行阐述。

Rössler 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = b + [x_1(t) - c]x_3(t) \end{cases} \quad (1-3)$$