现代数学基础丛书·典藏版 12

# 微分方程定性理论

张芷芬　丁同仁
黄文灶　董镇喜　著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版　12

# 微分方程定性理论

张芷芬　丁同仁
黄文灶　董镇喜　著



科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书是作者在常微分方程定性理论的多年教学和科研工作的基础上写成的，着重介绍平面定性理论的主要内容和方法，重点是：平面奇点，极限环的存在，唯一性及个数，无穷远奇点，二维周期系统的调和解，环面上的常微系统，二维流形上的结构稳定性. 本书各章均附有习题.

本书可供大学数学系高年级学生及研究生阅读，也可供教师和科研人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

微分方程定性理论／张芷芬等著. —北京：科学出版社，1981.11（2016.6 重印）

（现代数学基础丛书·典藏版；12）

ISBN 978-7-03-005991-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微分方程—定性理论 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 112491 号

责任编辑：张鸿林／责任校对：钟 洋

责任印制：徐晓晨／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1981 年 11 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2016 年 6 月 印 刷 印张：27 1/4

字数：500 000

**定价：198.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 序　言

本书是根据20世纪60年代以来我们在北京大学数学系开设的常微分方程定性理论课所用的讲义编写成的.它可作为综合性大学、师范院校、工科大学有关专业的高年级大学生和研究生的专门化课程的教材.

由常微分方程来直接研究和判断解的性质,这是常微分方程定性理论的基本思想.这种思想在基础课中已经有过,Sturm 振动定理就是一例.定性理论在常微分方程的研究中往往有其独到的功能.当前由于电子计算机的出现,给定性理论研究提供了有力的工具,同时定性理论分析往往给数字计算提供了理论依据.常微分方程定性理论从 H.Poincaré 发表的奠基性工作"微分方程所定义的积分曲线"起,一百年来得到了蓬勃的发展,它已成为从事许多学科和尖端技术(包括自动控制理论,航天技术,生物科学,经济学等)研究的不可缺少的数学工具,并且定性的思想和技巧已逐渐渗透到其他数学分支,例如偏微分方程等.

在二维系统特别是平面系统方面,定性理论的发展比较完整.本书基本上是根据上述 H.Poincaré 的名著中所涉及到的几个问题,对平面或二维系统的有关成果力图作一较为完整的介绍.

本书第一章§1,§2讲的是常微分方程解的存在性、唯一性、解对初值的连续依赖性等问题,它是全书的基础.鉴于当前动力系统的符号和概念被广泛使用,在§3中我们介绍了拓扑动力系统一些最基础的知识,以及平面动力系统的主要结果.但这一部分最基本的事实是 Poincaré-Bendixson 环域定理.讲授时可将这部分移到后面,也可适当精简,只要能证明环域定理就可以了.第二章讲奇点,基本问题是:在什么条件下原方程及其相应的线性方程在奇点附近有相同的拓扑结构或定性结构,以及在一些临界情形下奇点的性质.对平面系统来说,这个问题解决得较为彻底.第三章讲平面奇点指数,其中§3是奇点指数的有理计算.第四章论述极限环,特别是极限环的存在性、唯一性、个数、二次系统的极限环个数等方面,力图反映当前国内外的最新成果.第五章讨论无穷远奇点,为了研究系统的积分曲线的全局结构,往往必须研究系统的无穷远奇点.第六章讨论周期微分方程的调和解,它是属于非线性振动理论的基础知识.

前六章是本书的基本内容.如果是一学期的课程,则可在前六章中选取一些内容.如果是一年的课程,则第七章环面上的常微系统和第八章结构稳定性理论都是很重要的部分.

为了便于学生自学以及启发学生对此理论的兴趣,我们尽量介绍定性理论中

最典型和最常用的方法和技巧，同时也尽量介绍有关内容的当前最新成果，此外为了便于读者的学习，我们在书中还列举了一些例子，每节后面都配有习题.

书中打符号“＊”的章节乃是进一步的要求，初学时可略过.

本书第一章到第五章是张芷芬撰写或修改定稿的，其中第三章是张芷芬在高维新所写初稿基础上编写成的；第四章§6和第五章§3是索光俭提供初稿，由张芷芬改写成的.第六章是丁同仁撰写的，第一章§1，§2和第七章是黄文灶编写的，第八章是董镇喜撰写的.

余澍祥，高维新，何启敏，高素志，陈平尚，曾宪武，王裕民，李承治，丁大正，王铎，丁伟岳，王鹏远等还帮助和审查过本书的某些章节.曾试用过北大所编定性理论讲义的黄启宇、王克、马知恩、蔡燧林、徐世龙，都长青，俞伯华，马遵路等和参加过北大定性理论讨论班的人员，都对本书提出过很多宝贵意见.本书在写作过程中得到了廖山涛教授的热情关怀，他还对第五章及第八章的有关内容提出过宝贵意见，叶彦谦教授在审查本书过程中从文字到内容提出了很多中肯的意见和有益的建议.在此对他们一并致以谢意.

限于我们的知识水平，书中难免有错误及不妥之处，请读者批评指正.

作　者

于1985年5月

# 目　　录

# 第一章　基 本 定 理

本章介绍关于微分方程的解的一些基本定理,这是常微分方程一般理论的基础.

## §1. 解的存在性、唯一性及对初值(或参数)的依赖性

**定理 1.1**　考虑 Cauchy 问题(E):

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$是实变量 $t$ 和 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 $n$ 维向量值函数;又设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$在闭区域 $G$:

$$|t-t_0| \leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \leqslant b,$$

上连续,并且对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件:

$$\begin{gathered} \| f(t,\boldsymbol{x}_1) - f(t,\boldsymbol{x}_2) \| \leqslant L \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|, \\ (t,\boldsymbol{x}_i) \in G,\ \boldsymbol{i} = 1,2, \end{gathered} \tag{1.2}$$

其中 Lipschitz 常数 $L>0$. 令

$$M = \max_G \| \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \|,\ h = \min\left(a,\frac{b}{M}\right). \tag{1.3}$$

那么 Cauchy 问题(E)在区间$|t-t_0| \leqslant \boldsymbol{h}$ 上有一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$,并且它是唯一的.

**证明**　我们分以下五个步骤证明之.

(一) Cauchy 问题(E)等价于积分方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})dt. \tag{1.4}$$

事实上,令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是 Cauchy 问题(E)的解,于是由(1.1)对 $t$ 积分便有

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{C} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt,$$

再由初值条件(1.2)确定 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{x}_0$,因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是(E)的解.

反之,设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程(1.4)的解,从(1.4)可知 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是连续的,从而 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$也是连续的,因此,$\boldsymbol{\varphi}(t)$是可微的;于是,对积分方程(1.4)的两侧对 $t$ 求导数,便得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)).$$

并且由(1.4)可见 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是 Cauchy 问题(E)的解.

(二) 作(1.4)的 Picard 近似解序列$\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$

令 $\boldsymbol{\varphi}_0(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$,

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0)dt, \ |t - t_0| \leqslant h. \tag{1.5}$$

则

$$\| \boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_0(t) \| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0) \| dt \right| \leqslant M \cdot |t - t_0| \leqslant b. \tag{1.6}$$

当 $\boldsymbol{x}$ 是一维时,图形如图 1.1:

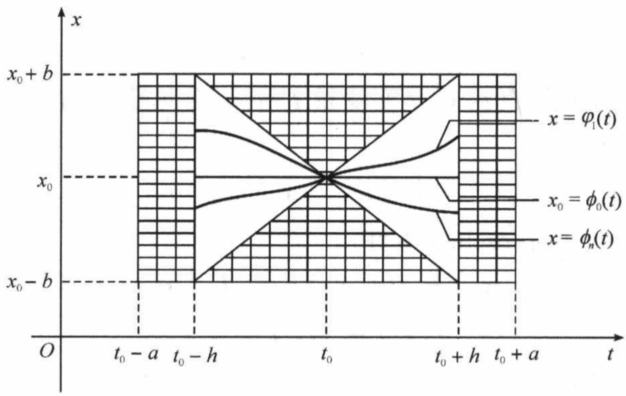


图 1.1

我们可以采用归纳的程序:设已得第 $n$ 次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t))dt, \tag{1.7}$$

而且当$|t - t_0| \leqslant h$ 时,我们有

$$\| \boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{x}_0 \| \leqslant b.$$

令第 $n+1$ 次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t))dt, \tag{1.8}$$

则当$|t - t_0| \leqslant h$ 时,我们有

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{x}_0 \| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t))dt \right\| \\ &\leqslant M \cdot |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b, \ n = 1,2,3,\cdots. \end{aligned}$$

(三) 序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 的一致收敛性

由于 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 的收敛问题等价于级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+[\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)]+[\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)]+\cdots+[\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)]+\cdots \tag{1.9}$$

的收敛问题,我们只要证明(1.9)的一致收敛性即可.

首先证明(1.9)的一般项满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)\|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^n}{n!},\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{1.10}$$

由(1.6)可知(1.10)对 $n=1$ 成立.现设不等式(1.10)对 $n=m$ 成立,则我们有下述不等式:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_{m+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_m(t)\| &=\left\|\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_m(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_{m-1}(t)))dt\right\|\\ &\leqslant L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}_m(t)-\boldsymbol{\varphi}_{m-1}(t)\|dt\right|\\ &\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^{m+1}}{(m+1)!}.\end{aligned}$$

由此可知不等式(1.10)对所有正整数 $n$ 都成立.所以当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时,我们得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(t)\|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}. \tag{1.11}$$

由 Weierstrass 判别法推出级数(1.9)是一致收敛的,从而序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 一致收敛.令 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{\phi}_n(t)=\boldsymbol{\phi}(t)$,则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 连续,且 $\|\boldsymbol{\phi}(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b(|t-t_0|\leqslant h)$.

(四) 证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(1.4)的解

令 $n\to+\infty$,由(1.8)得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt. \tag{1.12}$$

因此,归结于证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt. \tag{1.13}$$

任给定 $\varepsilon>0$,可找到 $N=N(\varepsilon)>0$,使得当 $|t-t_0|\leqslant h$,便有不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{Lh},\quad 只要\ n\geqslant N.$$

因此,当 $n\geqslant N$ 时,对 $|t-t_0|\leqslant h$,我们有

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_n(t))dt-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt\right\|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt\right|$$

$$\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{L\cdot h}h=\varepsilon,$$

即(1.13)成立.因此由(1.12)和(1.3),可见 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程(1.4)的一个解($|t-t_0|\leqslant h$).

(五) 最后证明(1.4)的解的唯一性

事实上,设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$与 $\boldsymbol{x}=\psi(t)$是(1.4)的两个解,即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt,$$

与

$$\psi(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\psi(t))dt$$

两式相减,再利用 Lipschitz 条件,我们得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\psi(t)\|\leqslant L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi(t)-\psi(t)\|dt\right|. \tag{1.14}$$

令

$$g(t)=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\psi(t)\|dt,\ t\geqslant t_0.$$

于是当 $t\geqslant t_0$ 时,$g(t)\geqslant 0$,而且(1.14)转化为

$$g'(t)\leqslant L\cdot g(t), \tag{1.15}$$

于是

$$(e^{-L(t-t_0)}\cdot g(t))'\leqslant 0,$$

因而

$$e^{-L\cdot(t-t_0)}\cdot g(t)\leqslant g(t_0)=0.$$

由此推出

$$g(t)\equiv 0,\ t\geqslant t_0,$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv\psi(t),\ t\geqslant t_0.$$

同法可证:当 $t\leqslant t_0$ 时,$\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv\psi(t)$.

总结以上各步骤,定理证毕.】

**附注 1**　定理 1.1 的证明是古典的,但可以抽象为泛函分析中的不动点定理.等式

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,\varphi(t))dt,\ |t-t_0|\leqslant h,$$

定义了一个从连续函数 $\phi(t)$ 到连续函数 $\psi(t)$ 的变换,可简写为

$$\psi = T(\varphi).$$

若 $T(\varphi)=\varphi$,则称 $\varphi$ 为变换 $T$ 的不动点. 显然(1.4)的解就是变换 $T$ 的不动点. 近代泛函分析中有各式各样的不动点定理,现介绍其中一个最简单的,称为压缩映像原理.

设 $D$ 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的一个非空闭子集,$T$ 是从 $D$ 到 $D$ 自身的映像,即对每一个 $\psi\in D$,有 $T(\psi)\in D$. 又存在常数 $k$,$0\leqslant k<1$,使对 $D$ 中任何两点 $\psi_1,\psi_2$,都有不等式

$$\| T(\psi_2) - T(\psi_1) \| \leqslant k \| \psi_2 - \psi_1 \| .$$

则在 $D$ 中存在唯一的一个点 $\psi^*$,使得 $T(\psi^*)=\psi^*$.

现在我们用上述压缩映象原理来证明定理(1.1). 取 $\mathscr{B}$ 为定义在区间 $|t-t_0|\leqslant h^*$ 上的一切连续函数所成的空间,取 $D$ 为定义在 $|t-t_0|\leqslant h^*$ 上 $\left(0<h^*<\min\left(h,\dfrac{1}{L}\right)\right)$ 而图象包含在 $G$ 中(见定理 1.1 的条件)的一切连续函数所组成的集合. 如果 $\psi(t)\in D$,定义

$$T(\psi) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi,\psi(\xi))d\xi,$$

则

$$\begin{aligned}\| T(\psi) - x_0 \| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} f(\xi,\psi(\xi))d\xi \right\| \\ &\leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant b,\end{aligned}$$

即 $T(\psi)\in D$. 其次设 $\psi_1,\psi_2\in D$,于是

$$\begin{aligned}\| T(\psi_1) - T(\psi_2) \| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| f(t,\psi_1) - f(t,\psi_2) \| dt \right| \\ &\leqslant L\cdot h^* \| \psi_1 - \psi_2 \| \\ &= K \| \psi_1 - \psi_2 \| \quad (K = Lh^* < 1).\end{aligned}$$

故由压缩映象原理,有唯一的不动点 $\psi^*$,使 $T(\psi^*)=\psi^*$,即

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,\psi^*(t))dt \qquad (|t-t_0|\leqslant h^*).$$

**附注 2** 设方程(1.1)是线性的,即

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{1.16}$$

其中 $A(t)$,$\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是连续的.

这时由初值 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ $(t_0\in[\alpha,\beta])$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上都有定义. 这是因为所构造的逐次近似解序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(t)\}$ 在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 都有定义,并且是一

致收敛的.

**附注 3** 如果 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$对 $t,\boldsymbol{x}$ 连续,但不一定满足 Lipschitz 条件,则 Cauchy 问题(1.1)+(1.2)的解仍是存在的,参见下面的定理(证明从略).

**Cauchy-Peano 定理** 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$在区域 $G:|t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b$ 上连续,则(1.4)在区间$|t-t_0|\leqslant h$ 上有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,此处

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\ M=\max_G\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|.$$

下面讨论解与参数(或初值)的关系.

考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$.这个解是 $t,t_0,\boldsymbol{x}_0$ 的函数.例如方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x},\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}$$

的解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0e^{t-t_0}$,它是 $t,t_0,\boldsymbol{x}_0$ 的函数.

这里发生了一个在理论上和应用上都很重要的问题:当初值或参数变动时,对应的解是如何的变动呢?我们知道,在应用上,微分方程是描述某种物理过程的.而将一个物理问题化成微分方程问题时,不论是初值还是参数,它们的数值都是由实验测定的,因此不可避免地会出现一些微小的误差.如果初值或参数的微小摄动会引起方程的解发生剧烈的变化,那么所求解的可靠性就会很小.因此我们要研究 Cauchy 问题的解与初值或参数的关系是自然而必要的.

**定理 1.2** 考虑 Cauchy 问题$(E_\mu)$:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{1.17}$$

此处 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 维向量,$\boldsymbol{\mu}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的 $m$ 维向量,函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$在区域 $G$:

$$|t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b,\ \|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c,$$

上连续且对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件:

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,$$
$$\forall(t,\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\mu})\in G,i=1,2,$$

其中 Lipschitz 常数 $L>0$.令

$$M=\max_G\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\|,\ h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),$$

则对于任意 $\boldsymbol{\mu}(\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c)$,$(E_\mu)$的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\mu})$在区间$|t-t_0|\leqslant h$ 上存在

且唯一,并且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\mu})$ 是 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 的连续函数.

**证明**　对任意 $\boldsymbol{\mu}(\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c)$,根据定理 1.1,$(E_\mu)$ 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\mu})$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一.

又因为 Cauchy 问题 $(E_\mu)$ 的 $n$ 次近似解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_n(t;\boldsymbol{\mu})$ 是 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 的连续函数而且当 $n\to+\infty$ 时,$\boldsymbol{\varphi}_n(t;\boldsymbol{\mu})$ 在区域 $(|t-t_0|\leqslant h,\ \|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c)$ 上一致收敛,因而 $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\mu})$ 是 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 的连续函数.】

**Grownwall 引理**　设函数 $g(t),\varphi(t)$ 是区间 $[t_0,t_1]$ 上的连续函数,而且 $g(t)\geqslant 0,\varphi(t)\geqslant 0$;又常数 $\lambda>0,r>0$. 若 $\varphi(t)$ 满足不等式

$$\varphi(t)\leqslant\lambda+\int_{t_0}^{t}(g(t)\varphi(t)+r)dt,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1;\tag{1.18}$$

则有

$$\varphi(t)\leqslant(\lambda+rT)e^{\int_{t_0}^{t}g(t)dt},\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\tag{1.19}$$

其中 $T=t_1-t_0$.

**证明**　令 $u(t)=\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^{t}g(t)dt}$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. 显然 $u(t)$ 是连续的. 设 $\xi=\sup\{u(t)\mid t_0\leqslant t\leqslant t_1\}$,则存在 $t^*\in[t_0,t_1]$,使得 $u(t^*)=\xi$. 由(1.18)得

$$\begin{aligned}\xi e^{\int_{t_0}^{t^*}g(t)dt}&\leqslant\lambda+\int_{t_0}^{t^*}(g(t)\varphi(t)+r)dt\\&\leqslant\lambda+\int_{t_0}^{t^*}(\xi g(t)e^{\int_{t_0}^{t}g(t)dt}+r)dt\\&\leqslant\lambda+rT+\xi(e^{\int_{t_0}^{t^*}g(t)dt}-1),\end{aligned}$$

即

$$\xi\leqslant\lambda+rT.$$

由于

$$\varphi(t)\leqslant\xi e^{\int_{t_0}^{t}g(t)dt},$$

故

$$p(t)\leqslant(\lambda+rT)e^{\int_{t_0}^{t}g(t)dt}.】$$

**定理 1.3**　设 Cauchy 问题 $(E_\mu^*)$:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 维向量,$\boldsymbol{\mu}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的 $m$ 维向量,又设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\in C^0(G,\mathbf{R}^n)$,其中

$$G:|t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b,\ \|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c,$$

且$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_j}(j=1,2,\cdots,n)$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mu_k}(k=1,2,\cdots,m)$连续，则定理 1.2 的结论成立，而且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\mu})$对 $\mu_k(k=1,2,\cdots,m)$有连续的偏导数.

**证明** 因为$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\in C^0(G,\mathbf{R}^n)\ (j=1,2,\cdots,n)$，所以 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 适合 Lipschitz 条件. 因此定理 1.2 蕴含定理 1.3 的前半部分的结论，即$(E_\mu^*)$的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$存在唯一且在区域 $B(|t-t_0|\leqslant h,\ \|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0\|\leqslant c)$上连续. 下面证明 $x=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$对 $\boldsymbol{\mu}$ 是可微的. 我们的证明分以下三个步骤进行.

为了形式地推导$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$，首先我们考虑线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{z}}{dt}=\boldsymbol{f}_x(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}_\mu(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu}),\\ \boldsymbol{z}(t_0)=\mathbf{0}.\end{cases}$$

或与上面等价的积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t,\boldsymbol{\mu})=\int_{t_0}^{t}[&\boldsymbol{f}_x(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{z}(t,\boldsymbol{\mu})\\&+\boldsymbol{f}_\mu(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})]dt,\end{aligned}\tag{1.20}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_x(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=\left(\frac{\partial f_i(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_{n\times n}$$

是 $n\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{f}_\mu(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=\left(\frac{\partial f_i(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}_k}\right)_{n\times m}$$

是 $n\times m$ 矩阵

Cauchy 问题$(E_\mu^*)$等价于积分方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})dt,\tag{1.21}$$

从此式形式地计算$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}=\int_{t_0}^{t}\Bigg(&\frac{\partial \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\\&+\frac{\partial \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}}\Bigg)dt.\end{aligned}\tag{1.22}$$

这就是说，如果$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$存在，则它应满足方程(1.20).

其次，当参量 $\boldsymbol{\mu}$ 有改变量 $\Delta\boldsymbol{\mu}$ 时，相应地 $\boldsymbol{x}$ 有改变量 $\Delta\boldsymbol{x}$，今计算 $\Delta\boldsymbol{x}$.