组合数学丛书

# 组合问题与练习（下册）

## （第二版）

# Combinatorial Problems and Exercises (II)

*Second Edition*

□ [匈] László Lovász　著

□ 李学良　史永堂　译

教育出版社

□ 组合数学丛书

# 组合问题与练习（下册）

（第二版）

Combinatorial Problems and Exercises (II)

Second Edition

□ [匈] László Lovász　著

□ 李学良　史永堂　译

高等教育出版社·北京

图字：01-2016-8994 号



**图书在版编目（C I P）数据**

组合问题与练习：第二版．下册 /（匈）拉斯洛·洛瓦斯著；李学良，史永堂译．-- 北京：高等教育出版社，2019.4

书名原文：Combinatorial Problems and Exercises

ISBN 978-7-04-051491-9

Ⅰ．①组… Ⅱ．①拉… ②李… ③史… Ⅲ．①组合－高等学校－教材 Ⅳ．① O122. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 037778 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫　　封面设计 张 楠　　版式设计 张 杰
责任校对 胡美萍　　责任印制 尤 静

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印　　刷 | 北京鑫丰华彩印有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开　　本 | 787 mm× 1092 mm 1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印　　张 | 19.25 | | |
| 字　　数 | 400 千字 | 版　　次 | 2019 年 4 月第 1 版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印　　次 | 2019 年 4 月第 1 次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定　　价 | 79.00 元 |


物 料 号 51491-00

**László Lovász**

拉斯洛·洛瓦斯（1948—），匈牙利人，国际著名数学家、著名组合学家，现为匈牙利科学院主席，匈牙利、俄罗斯等多个国家的科学院院士。曾担任美国耶鲁大学教授（1993—2000），微软高级研究员（1999—2006），国际数学联盟主席（2007—2010）等，曾获得波利亚奖（Pólya Prize, 1979）、富尔克森奖（Fulkerson Prize, 1982, 2012）、沃尔夫奖（Wolf Prize, 1999）、高德纳奖（Knuth Prize, 1999）、哥德尔奖（Gödel Prize, 2001）、约翰·冯·诺依曼奖章（John von Neumann Medal, 2005）、日本京都奖（Kyoto Prize, 2010）等。

献给 Kati

# 第二版的序言

当本书的出版社让我出第二版来修正和更新习题集时, 我要考虑这一领域的迅速发展, 来决定要修改多少 (当然第一版已绝版). 组合学在过去十年里得到了迅速发展, 特别是与数学其他分支交叉的那些领域, 如多面体组合学、代数组合学、组合几何、随机结构以及更引人注目的算法组合学和复杂性理论. (计算理论在组合学等领域有如此广泛的应用, 以至于有时很难刻画它们之间的界线.) 但是组合学也是一门自成体系的学科, 这就使得本 (更新的) 习题集也是有意义的.

我决定不去改变本书的结构以及主要专题. 任何概念上的改变 (如坚持引入算法的问题, 以及算法分析和算法问题的复杂性分类) 都将意味着要写一本新书. 然而, 我忍不住去写一些关于图的随机路径以及与特征值、扩展性和电阻 (这一领域有比较经典的起源, 但在过去几年里具有爆炸式的发展) 之间关系的习题, 所以第 11 章的篇幅会非常长.

在一些其他章节, 我也发现很多思想在过去几年里以自然而又重要的方式得到了推广. 总而言之, 我已经增加了大约 60 个新习题 (可能更多, 如果你去数子问题的话)、简化了一些解答并更新了我知道的一些错误.

在第一版的序言中, 我说过计划出版第二卷来讲一些遗留的重要专题, 如拟阵、多面体组合学、格几何、块设计, 等等. 从那时起, 这些专题都得到了非常迅速的发展, 要想覆盖它们的全部, 仅仅一卷当然是不够的. 我仍然喜欢如下的过程: 在众多领域里选择一些主要结论, 分析它们, 并使得它们的证明可以被分解成很多步, 每步增加一个想法, 从而引出一系列习题, 来得到主要结论. (在准备新版时, 这一爱好是非常强烈的.) 但是此时撰写新卷是我的时间和能力所不及的.

同时, 已经出版了很多与这些主题相关的专著, 其中的一些 (特别值得一提的是 A. Recski 的书: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and Statics*, Akadémiai Kiadó-Springer Verlag, 1989) 包含了一系列广泛而又精心编辑的问题和习题.

致谢: 我从同事们那里收到了很多注解、更正以及改进的建议; 它们中的一些是基于使用本书教课过程中的经验. 他们对这本书的兴趣, 让我非常高兴. 我也非常感谢这些同事将他们的注解写出来并且发送给我. 事实上, 他们是完全正确的, 在修改时, 我采

用了几乎所有这些建议 (其中很少的一些研究结果以及更深入的主题不在本书范围内). 我非常感谢 J. Burghduff, A. Frank, F. Galvin, D.E. Kunth 以及 I. Tomescu 等人广泛而又深刻的意见, 特别感谢 D.E. Knuth 和 D. Aldous 对新增加习题的贡献, 事实上正是因为他们的注解我才如此快地完成了修改稿的最后版本.

我也要感谢 K. Fried 女士非常细心和专业的 TEX 排版 (并在这个过程中发现了第一版的很多错误), 同时感谢 G. Bacsó 和 T. Csizmazia 的帮助以及他们对本书的阅读和深刻见解.

布达佩斯, 1992 年 3 月

# 序　言

组合学在数学科学的边缘成长了几个世纪, 现在已经成为数学中成长最快的分支之一——如果我们考虑这一领域中论著数目、在其他数学分支和其他科学中的应用以及科学家、经济学家和工程师们对组合结构的兴趣, 这是毫无疑问的. 数学的世界因为代数和分析的成功而受到瞩目, 仅在近些年来, 人们越来越清楚地看到, 由于经济学、统计学、电子工程以及其他应用科学所产生的问题, 研究有限集合与有限结构的组合学有了自己的问题和理论. 这些问题和理论独立于代数和分析但和它们一样困难, 是有实际和理论的价值, 并且很漂亮.

然而一流数学家们对组合学的态度依旧是轻蔑的, 他们接受组合学的有趣性和困难性, 但是他们否认组合学的深度. 人们总是强硬地说组合学是一些问题的收集, 这些问题本身可能是有趣的, 但是它们是不关联的而且不能组成一个理论. 在组合学或图论中很容易得到新结果, 因为只有很少的技巧需要学习, 并且这迅速增加了论著的数量.

上述指控显然刻画了科学的任何领域在最初发展阶段——收集数据阶段的特征. 只要核心问题没有形成、还没抽象成更一般的理论, 就没有办法去辨别有趣和不太有趣的结果——除了基于审美的角度, 但这太主观了. 那些被一流数学家认可但还未出现的技巧正在等待它们的发现者, 所以, 没有发展成熟并不是反对的理由, 而是需要引导年轻的科学家去面对一个给定的领域.

在我看来, 组合学现在已经过了这个最初的阶段. 有很多方法需要学习: 计数技巧、拟阵、概率方法、线性规划、块设计构造, 等等. 有很多包含分层次的定理、形成研究基础的中心结构定理的分支: 从图论中随便拿出两个例子, 如图 (网络流) 的连通性或图的因子. 有很多从非平凡结果中抽象出来的概念, 它们形成理论的很大一部分, 例如拟阵或好的刻画的概念 (见下面). 我感觉如果没有这些事实、概念和技巧的知识, 是不可能得到有意义的结果的. (当然, 例外的情况是可能发生的, 因为这一领域要去覆盖数学世界的如此大的部分, 完全崭新的问题仍可能是要产生的.)

*

请读者谅解, 我希望插入一些想法, 它们能够对概念的系统化和统一化起到作用.

其中的第一个是 NP 类的概念†. 图的一个性质 $T$ 在 NP 中, 如果当 $T$ 成立时我们能够有效地证明 (展示) 它. (在技术上, "有效地" 意思是证明的长度可以被图的大小的一个多项式所界住.) 例如, 如果图 $G$ 是哈密顿的, 我们可以通过指定 $G$ 的一个哈密顿圈来展示它. 这个概念引导我们到 "好的刻画", 或者——用计算复杂性语言—— NP∩co-NP 类的概念, 这是 J. Edmonds 定义的. 图的性质 $T$ 在 NP∩co-NP 中, 如果 (使用定义的不同表示形式和等价条件) 当 $T$ 成立时我们能有效地证明它, 并且当它不成立时我们能有效地否定它. 例如, 平面图的 Kuratowski 经典刻画给出了平面性的一个好的刻画: 如果图是平面的, 通过将它画在平面上我们很容易验证它; 如果不是平面的, 我们可以通过展示其中的一个 Kuratowski 子图 (参见问题 5.37) 来证明它. 好的刻画反映了性质的深刻、潜在的二元性, 正如读者通过比较本书中出现的好的和 "不好的" 刻画来说服自己, 而且好的刻画经常就是问题的解. 当然, 这并不意味着 "不好的" 刻画就不是深刻的、有用的定理.

好的刻画的存在倾向于好的判定算法的存在 (我们用 "好的" 或者 "有效的" 算法来表示那些即使是在最坏情况下, 运行时间也是输入规模的多项式的算法, 这也不会直接影响它的实际值). 很多组合性质被认为是存在多项式时间算法来确定一个给定结构是否具有这个性质, 但是它的存在决不显然 (如有 1-因子). S.A. Cook, R.M. Karp 和 L.A. Levin 给出的一个有趣的理论结果如下. 图的很多性质 (例如, 哈密顿圈的存在性、独立数、色数、核的存在性, 等) 在如下意义下被认为是等价的: 如果它们中的任一个可以在多项式时间内求解, 那么所有这些问题都可以在多项式时间内求解, 这种情形下, 数学不同领域中大量问题 (仅提一个很遥远的问题: 验证一个 $n$ 位数是否为素数) 都有 "好的" 算法求解. NP 中的这些 "非常困难" 的问题称为 NP-完全. 所有这些问题可以被有效地求解好像是不太可能的, 但是也没有办法来证明. 这就是计算机科学中著名的 P≠NP 问题.

另一个被证明富有成效的想法是组合优化问题通常可以表示为具有整约束的线性规划问题. 如果我们松弛这些约束, 那么线性规划的对偶定理将会给出一个解, 所以这些问题的解关联于整约束对最优解影响的研究. 例如, 我们可以证明它们不改变最优解, 我们得到一个最小最大定理. 很多关于这种想法的例子可以在 §13 (超图) 找到.

最后, 但是同样重要的, 我们提及线性代数的用处, 它来自于将矩阵乘积应用到同调群和上同调群. 线性代数很多应用的一个共同背景是拟阵论. 现如今拟阵论本身也是组合学的一个欣欣向荣的分支.

*

编写本书的主要目的是为正在学习组合学技巧的人提供帮助, 学习这些技巧的最有效的 (但公认是非常耗时的) 方式是做 (合适选择的) 习题和解决问题.

†详细描述可参见: A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1974, Chap. 10; 或者 M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.

本书以问题和系列问题的形式 (除了每章开始时一些概括性的评论) 介绍所有材料. 我们希望这对于打算在图论、组合数学或它们的应用中开展研究的学生们, 以及那些感觉组合技巧对他们在数学其他分支、管理科学、电子工程等领域的工作有所帮助的人们, 是有用的. 读者只需要有线性代数、群论、概率论和微积分的背景知识就可以了.

当我选择原材料时, 我不得不限制所要覆盖的主题, 我感觉与触及几乎所有可能的研究领域相比较, 详细地分析较少的基本概念将会更加有用, 所以在这一卷中只讨论计数问题、图和集合系统. 一些领域不得不完全丢掉: 随机结构 (这里建议读者阅读专著: P. Erdős and J. Spencer, *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Akadémiai Kiadó, Budapest and Academic Press, New York-London, 1974)、整数规划、拟阵 (组合几何)、有限几何、块设计、格几何, 等等. 我最终希望为本卷写第二卷以覆盖后面的一些主题.

本书包含三个主要部分: 问题、提示和解答. 没有太多经验的读者在尝试解决一个问题时, 可以先读一下该问题的提示; 其中标有一个或两个星号的问题被认为是困难的, 读者可以立刻去读提示除非他已准备在这个问题上花费几天的工夫 (我敢说, 它们中的一些是值得的). 读者即使已经解决了某个问题, 也建议去比较一下他的解和书中给出的解: 可能我们解答中出现的想法将会是接下来一系列问题的基础. 这里应该指出的是接下来的一系列问题与之前的问题在整个系列中总是逐步地到达最后、最深刻的结论. 也要注意, 问题的解答经常会用到提示中介绍的概念或者性质.

对于参考文献, 我非常喜欢给出可以看到一个专题更深入发展的那些, 因此, 对在教材和专著中重现的那些结果, 通常用后者作为参考文献. 没有参考文献意味着, 要么这个习题的结论是众所周知的, 去追踪它是不可能的或者是多余的; 要么这个问题被认为是新的. 在本卷最后我们给出了经常被引用的教材和专著的一个列表, 也给出了包含本书中用到的一些组合概念定义的字典、符号列表、作者索引以及名词索引.

致谢: 首先, 我希望对 P. Erdős 和 T. Gallai 两位教授表示我的谢意, 因为他们, 我才逐步爱上了组合学, 并且从他们那里, 我大体上学习了本书中几乎所有内容. 我必须提到同一课题组中的教授们, Vera T. Sós, A. Hajnal 以及许多其他的图论学家和组合学家, 他们 (直接或间接地) 对本书做出了贡献. 我特别感谢 J.C. Ault, L. Babai, A. Bondy, A. Hajnal, G. Katona, M.D. Plummer 以及 M. Simonovits, 他们阅读了本书的草稿或其中的部分, 并给出了很多有价值的注解、建议和更正; 感谢 L. Babai 和他的学生, 特别是 E. Boros 和 Z. Füredi, 在校对过程中给予了非常宝贵的帮助.

我想对 I. Rábai 教授表示我的感谢, 是他给出了撰写这样一本习题集的想法并对撰写给出了鼓励; 也感谢 A. Porubszky 女士细致认真的排版; 并且感谢 Akadémiai Kiadó 出版社, 特别是 Á. Sulyok 女士得力而又严谨的编辑工作.

但是最重要的, 我必须感谢我的妻子 Kati, 她持之以恒的鼓励以及专业、技术和精神上的支持是我工作的坚实基础.

# 译 者 序

本书作者 László Lovász 为国际著名数学家、组合学家, 沃尔夫奖获得者, 曾担任国际数学联盟主席. 他不仅研究成果卓著, 而且出版了一系列富有影响力的著作和教材.

本书包含组合学领域中大量经典习题, 共有 15 章, 我们将分上、下册出版, 上册 8 章, 下册 7 章, 其中主要分为三个部分: 习题、提示和解答.

受高等教育出版社的邀请翻译这本著名习题集, 我们感到非常荣幸, 但也感到诚惶诚恐, 而且越翻译就越感受到压力. 由于我们的翻译水平有限, 可能翻译得有不尽人意之处, 还请读者不吝赐教, 我们当深表感谢.

本书的翻译初稿是在过去几年讲授图论这门课程中逐步形成的, 在此要感谢南开大学组合数学中心 2013 级全体研究生; 特别感谢参加校对整理的研究生们, 他们是覃忠美、陈琳、刘金凤、魏美芹、顾冉、蔡庆琼、杨华. 初稿之后, 我们又核对了几遍, 并对有些单词反复查询词典, 体会作者的用意. 高等教育出版社编辑赵天夫先生一直鼓励我们翻译此书, 并耐心回答我们的各种问题, 我们衷心地感谢他为本书的出版所做的努力, 可以说没有他的鼓励和督促就没有这本翻译教材. 最后感谢国家自然科学基金委、南开大学以及组合数学中心对译者们的资助和大力支持.

译者
2016 年 1 月
南开大学组合数学中心

# 目　　录

# I. 问　　题

## §9. 色　　数

色数是最著名的图不变量, 它的名声主要来自四色猜想: 所有平面图都是 4-可染的. 这已经成为一个世纪以来组合数学中的最具挑战性的问题, 并且它对这一领域的发展所作的贡献远比任一其他问题都要多. 最终在 1977 年, 由 Appel 和 Haken 发现了这一猜想的一个计算机辅助证明. 尽管由于一些其他原因, 其中很多都是源自应用数学领域, 如运筹学, 色数在今天也得到了很多关注, 但是尝试寻找四色定理的一个更加简单的证明仍然是色数研究的一个重要动力.

除了它的广泛普及, 对色数我们知之甚少. 它的计算是困难的, 对色数为 $k$ 的图都没有好的刻画, 除了 $k=2$ 这一平凡的情形 (问题 9.6, 9.9, 9.11, 9.15, 9.16 中给出了非平凡的但是 "不好" 的刻画); 并且色临界图具有比 $\alpha$-临界图更弱的性质. 最难的证明往往涉及一些反例.

这里出现的问题集尝试去涵盖这一领域中目前发展出来的一些重要思想. 这些虽然没有给出色数一个令人满意的理论 (特别地, 它们都没有使我们给出四色定理的一个不借助计算机的证明), 但是它们可能会成为更高级理论的要素. 在这一章中, 我们要处理的主要思想包括: 最小度小的图具有小的色数; 尝试推广第 5 章中二部图用到的 "potential" 的思想; 临界饱和图; 完美图; 色多项式及其他代数方法; 以及 Kempe 链.

**1.** 如果图 $G$ 的每个顶点的度至多为 $k$, 那么 $\chi(G) \le k+1$.

**2.** 证明对任意图 $G$, 我们都可找到一个划分 $V(G)=V_1\cup V_2$ $(V_1, V_2 \ne \emptyset)$ 使得

$$\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) = \chi(G).$$

更进一步, 如果 $G$ 不是完全图, 我们可以找到一个划分 $V(G)=V_1\cup V_2$ 使得

$$\chi(V[G_1]) + \chi(G[V_2]) > \chi(G).$$

**3.** 证明不等式 $\chi(G_1\cup G_2) \le \chi(G_1)\cdot\chi(G_2)$.

**4.** 假设 $G$ 有一个 (好的) 染色, 其中每种颜色至少出现两次. 证明 $G$ 有一个使用 $\chi(G)$ 种颜色的染色.

**5.** (a) 假设 $|V(G)| = n$, 并且 $V(G)$ 有一个划分 $\{V_1, \dots, V_k\}$ 使得对任意的 $1 \le i < j \le k$, 都存在不相邻的 $x \in V_i$, $y \in V_j$, 那么

$$\chi(G) \le n - k + 1.$$

(b) 令 $G$ 是具有 $n$ 个顶点的简单图, 那么

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n + 1, \quad \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \ge n.$$

**6.** 证明图 $G$ 的色数等于满足

$$\alpha(G \oplus K_m) = |V(G)|$$

的最小 $m$. (($G \oplus K_m$) 是 $G$ 和完全 $m$-图的卡氏积.)

**7.** (a) $\chi(G_1 \times G_2) \le \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$.

(b) $\chi(G \times G) = \chi(G)$.

(c) $\chi(G \times K_n) = \min(\chi(G), n)$.

(d)* 证明若 $G$ 是连通的并且 $\chi(G) > n$, 那么 $G \times K_n$ 有唯一的 $n$-染色 (在颜色置换意义下).

(e) 一个图可以有多少种 $n$-染色?

**8.** 令 $S$ 是一个点集. 如果 $S \subseteq V(G)$, 那么 $G$ 的任一染色都会导出 $S$ 的一个划分. 将 $S$ 以如下方式嵌入某个图 $G$ 中: 由 $G$ 的 $k$-染色 ($k \ge 3$) 导出的 $S$ 的划分满足

(a) $S$ 每个部分都是单点集 (只有当 $|S| \le k$ 时, 这种划分才有意义);

(b) $S$ 的除了上述划分外的所有划分;

(c) 只包含 $\{S\}$ 的划分;

(d) 除了上述划分外的所有划分;

(e)* 给定集合 $\{P_1, \dots, P_N\}$ 的划分.

*

**9.** 如果有向图 $G$ 不含长为 $m$ 的路, 那么 $\chi(G) \le m$.

**10.** 什么情况下我们可以用颜色 $1, 2, \dots$ 去给有向图 $G$ 的顶点染色, 使得每条边都连接一个 $i$ 色的点到一个 $i+1$ 色的点 ($i \geqslant 1$)?

**11*.** 证明 $G$ 是 $k$-可染的当且仅当 $G$ 中存在一个定向, 使得 $G$ 中任意圈 $C$ 和任意给定的方向 $C$, $C$ 中至少 $\frac{|E(C)|}{k}$ 条边是以这个方向来定向的.

*

**12.** (a) 令 $G$ 是连通图, 且假设对 $G$ 的每个点 $x$ 关联一个色集 $C(x)$. 假设对每个点 $x$, 都有 $|C(x)| \ge d_G(x)$, 且至少有一个点 $x_0$ 使得不等式成立. 那么, 我们可以找到 $G$ 的一个 (好的) 染色, 使得每个点都染给定颜色中的一种.

(b) 再次假设对图 $G$ 的每个点 $x$ 关联一个色集 $C(x)$, 但现在对每个点 $x$, 令 $|C(x)| = d_G(x)$, 且对某些 $a$ 和 $b$ 有 $C(a) \neq C(b)$. 进一步假设 $G$ 是 2-连通的. 证明: $G$ 有一个 (好的) 染色, 其中对每个点 $x$, 都可以用 $C(x)$ 中的一个元素去染 $x$. (注意一个重要的特殊情形, $G$ 是一个圈; 参考 9.8(d) 的解答.)

**13***. (Brook 定理)(a) 证明: 如果 $G$ 的每个点的度数至多为 $k$ (其中 $k \geq 3$), 且 $G$ 是 3-连通的但不是完全 $(k+1)$-图, 那么 $\chi(G) \leq k$ (即在这种情况下, 条件 "每个点的 $C(x)$ 都不相同" 可以去掉).

(b) 证明 3-连通的条件可以被连通所替换.

*

**14***. (a) 令 $G$ 是一个无限图[†]满足 $G$ 的所有有限子图都是 $k$-可染的, 但是, 如果用一条新边连接 $G$ 中任意一对不相邻的点, 那么将会得到一个不是 $k$-可染的有限子图. 证明 $V(G)$ 有一个划分使得两点相邻当且仅当它们属于不同的类.

(b) (Erdős–de Bruijn 定理) 假设无限图 $G$ 的所有有限子图都是 $k$-可染的, 证明 $G$ 本身是 $k$-可染的.

(c) 对每个点 $v \in V(G)$, 令 $T_v$ 是点为 $1, \ldots, k$ 的离散拓扑空间的一个拷贝. 那么, $V(G)$ 的使用 $k$ 种颜色的染色可被看作拓扑乘积空间 $\underset{v \in V(G)}{\times} T_v$ 的点. 证明 $G$ 的规定的染色形成一个闭子集. 给出 Erdős–de Bruijn 定理的另一个证明.

**15.** 令 $\mathcal{K} \neq \emptyset$ 为满足如下条件的一类简单图:

(i) 如果 $G \in \mathcal{K}$ 并且 $G$ 有一个到 $G'$ 的同态, 那么 $G' \in \mathcal{K}$.

(ii) 如果 $G$ 是一个图, $a, b, c \in V(G)$ 满足 $a$ 和 $c$ 相邻, 但 $b$ 和其他两个都不相邻, 如果 $G + (a, b) \in \mathcal{K}$ 且 $G + (b, c) \in \mathcal{K}$, 那么 $G \in \mathcal{K}$.

证明: 对某个 $k \geq 0$, $\mathcal{K}$ 是由所有非 $k$-可染的图组成.

**16***. (Hajós 构造) 考虑简单图上的如下操作:

($\alpha$) 在图中增加边和/或点,

($\beta$) 等同两个不相邻的点 (并删除由此而产生的重边),

($\gamma$) 对两个图 $G_1$, $G_2$, 以及 $(x_i, y_i) \in E(G_i)$, $i = 1, 2$. 去掉 $(x_i, y_i)$, 然后增加一条新边 $(y_1, y_2)$, 并等同 $x_1$ 和 $x_2$.

证明这些操作可由非 $k$-可染的图生成非 $k$-可染的图, 并且每个非 $k$-可染的图都可由初始图 $K_{k+1}$ 通过重复上述操作而得到 (图 1 说明 5-轮图是如何从 $K_4$ 得到的).

*

**17.** (a) 哪些图是临界 3-可染的?

(b) 在 $4n$ 个点上构造临界 4-可染图, 使得边数至少为 $n^2$.

---

[†]这个习题表明, 色数有限的无限图的问题, 通常是可以归结为有限的情形的. 这是我们在这里提到它的原因, 参阅 14.19.

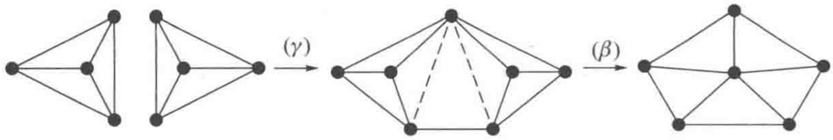

图 1

(c) 在 $2n$ 个点上构造临界 6-可染图, 使得图中每个点的度至少为 $n$.

**18.** 对 $\chi$-临界图 $G$ 的每个顶点 $x$, 增加一个顶点 $x'$, 并将 $x'$ 与 $x$ 在 $G$ 中的所有邻点相连. 取另外一个新的顶点 $y$, 将它与所有的顶点 $x'$ $(x \in V(G))$ 相连. 证明得到的图 $G'$ 是 $\chi$-临界的, 且有 $\chi(G') = \chi(G) + 1$.

**19.** (a) 图 2 中的图是某个临界 4-色图的导出子图吗?

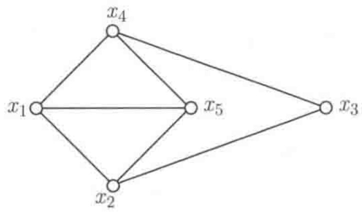


图 2

(b) 图 $G_0$ 是一个临界 $(k+1)$-色图 $G$ 的子图 (或导出子图) 当且仅当对每条边 $e$, 都有 $\chi(G_0/e) \le k$ 成立.

**20.** 如果我们分裂临界 $(k+1)$-色图 $G$ 的一个顶点, 那么得到的图 $G'$ 要么是 $k$- 可染的, 要么是临界 $(k+1)$-色图. $k$ 取什么值时后一种情况发生?

**21.** 临界 $(k+1)$-色图至少是 $k$-边连通的.

**22.** 每个 $\chi$-临界图是 2-连通的. 哪些不是 3-连通的呢?

**23.** 证明: 如果 $G$ 是 $\chi$-临界图, $\chi(G) = k+1$, $S$ 是具有 $m$ 个顶点的分离集, 那么 $G - S$ 的连通分支数目不超过将 $m$ 个物体分到至多 $k$ 个类的划分的数目 $B_{m,k}$. 同时证明这是最好的可能.

**24.** 令 $G$ 是临界 $(k+1)$-色图, 证明每对相邻的点可以被 $k-1$ 条边不相交的无弦的偶长路所连接.

*

**25.** 确定如下图的色数

(a) $K_n$ 的线图,

(b) 它的补图, 及

(c) 用两条方向相反的有向边代替 $K_n$ 的每条边, 由此得到的对称有向图 $\overrightarrow{K_n}$ 的线

图. (你可能会用到问题 13.21.)

**26.** (a) 令 $G$ 为有向图, $L(G)$ 是它的线图. 证明

$$\chi(L(G)) \geq \lceil \log_2 \chi(G) \rceil.$$

另外, 可以定向 $G$ 的边使得这里的等式成立.

(b)* 如果 $G$ 是对称的, 那么

$$\chi(L(G)) \leq k \quad \text{当且仅当} \quad \chi(G) \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

**27.** (a) 构造一个不含三角形的 $k$-色图.

(b)* 构造一个不含 3-, 4-, 5-圈的 $k$-色图.

(c) 构造不含长度小于 $2s+1$ 的奇圈且色数大于 $k$ 的图 †.

**28.** 令 $I_1, \ldots, I_n$ 为一条线上的闭区间. 在集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上定义图 $G$, $x_\nu$ 和 $x_\mu$ 相邻当且仅当 $I_\nu \cap I_\mu \neq \emptyset$.

(a) 证明得到的图 $G$ 满足 $\chi(G) = \omega(G)$.

(b) 证明这个图的补图 $\overline{G}$ 也满足 $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

(c) 证明 $G$ 中每个长大于 3 的圈 $C$ 都含有一条弦.

**29.** (a) 令 $G$ 是满足长大于 3 的任意圈都有弦的图, 证明 $G$ 的每个 (包含关系意义下) 极小割 $S$ 导出一个完全图.

(b) 图 $G$ 具有如下性质. 长大于 3 的任意圈都有一条弦, 当且仅当它有表示: 令 $F_1, \ldots, F_n$ 是树 $T$ 的子树; $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, 连接 $x_i$ 到 $x_j$ 当且仅当 $F_i \cap F_j \neq \emptyset$.

(c) 如果 $G$ 中不含长度大于 3 的无弦圈, 那么对 $G$ 有 $\chi(G) = \omega(G)$; 对 $G$ 的补图, 等式也同样成立.

**30.** 令 $G$ 是二部图, 那么 $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

**31.** 如果 $G_1$ 和 $G_2$ 都满足 $\chi(G_i) = \omega(G_i)$, 那么它们的强积 $G_1 \cdot G_2$ 也满足该式.

**32.** 令 $P$ 是偏序集, 在 $P$ 上定义图 $G$: 连接 $x, y \in P$ 当且仅当 $x \leq y$ 或 $y \leq x$.

(a) 证明 $\chi(G) = \omega(G)$.

(b) 证明上式对 $G$ 的补图同样成立.

**33.** 在以前的练习中, 哪些可以得到完美图‡?

**34.** 图 $G$ 是完美的当且仅当它的每个导出子图 $G'$ 包含一个与 $G'$ 中所有最大团都相交的独立集.

**35***. 证明用完美图 $G_x$ 替换完美图 $G$ 的每个点 $x$, 得到的图 $G'$ 仍是一个完美图.

*

† 实际上, 存在具有任意大的围长和色数的图. [P. Erdős; 参见 ES.]

‡ 问题 9.28–32 表明任何完美图的补都是完美的. 事实上, 这个结论是正确的, 它的一个证明将会由超图理论给出. 见 13.55–57.