新版

海文考研

考研数学

高等数学高分解码

(题型篇)

主　编：丁勇
副主编：邬丽丽　张喜珠　郭啸龙

科学分解备考时间，合理规划复习进程
基础阶段重理论，夯实基础知识
强化阶段练题型，培养解题能力
循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社

新版

万学教育 海文考研

考研数学

高等数学高分解码

（题型篇）

主　编：丁勇

副主编：邬丽丽　张喜珠　郭啸龙

编委会

邬丽丽　丁　勇　李兰巧　周晓燕　郭　媛　张喜珠　崔新月
刘　曦　洪　欢　吴　娜　巫天超　孙　森　方晓敏　郭啸龙
全　忠　江国才　陈生生　李英男　徐　婕　吴晓林　冯建轩
余结余　马　达　李二帅　李文智

中国政法大学出版社

2018・北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学高等数学高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5620-8570-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 219368 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印	三河市德利印刷有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	30
字　数	450 千字
版　次	2018 年 9 月第 1 版
印　次	2018 年 9 月第 1 次印刷
定　价	69.80 元

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题这种特征尤为明显。本书作者辅导考研数学数十载，同样的辅导，既有大量学员达到140以上，也有少数低于70分，天壤之别缘由何在？是运气不好？是方法不对？为此我们需要探讨考研数学的得分之道，以下内容将为考生揭开考研数学高分的“神秘面纱”。

一、系统复习、夯实基础

研究生招生考试数学试题中，有80%左右的试题是直接考查“基本概念、基本理论和基本方法”，基本概念比如“导数、积分、间断点、渐近线的概念”等，基本理论比如“极限的保号性、”“等价无穷小替换定理”等，基本运算比如“求极限、求导、行列式的运算、求概率”等。有些年份甚至直接考查课本上的公式、定理的证明，比如2015年考研考查$(uv)'=u'v+uv'$的证明。

考生只要了解相应的概念，具备基本运算能力，就可以把相应试题做出来。但现实是很多考生不屑于复习这些基础知识，认为考研试题应该难度很大，所以常常找一些偏题、怪题进行训练，还自我感觉良好，如果万一考了，自己会做，别人不会做，就可以得高分。最后结果往往适得其反。所以在复习的基础阶段，一定要狠抓基础，全面复习。

当然重视基础，不是只是背诵课本上的基本概念、基本理论和基本方法，要做到不仅要知其然，还要知其所以然，同时还要掌握在考研试题中如何考查，命题方式有哪些，等等。

考研数学考查非常全面，所以只要是考试大纲要求的内容都要复习到，特别是在基础阶段，不能有所取舍，数学一试卷中每年有大量的低频考点，比如梯度、散度、曲面切平面、法线、傅里叶级数，等等，这些内容经常是五年或十年甚至更多更久才考一次，虽然试题难度不大，但是每年有大量考生在这些考点上失分，主要源于犯了机会主义错误，认为自己运气不会那么差刚好考到，最后悔之晚矣。

二、归纳题型、总结方法

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年(考研)考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是学科的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学求函数、数列极限、求极值、积分上限函数求导、证明不等式、计算二重积分、幂级数求和等；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性相关性、矩阵的相似对角化；概率统计的求随机变量函数的分布、数值特征、矩估计、极大似然估计等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质——题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

所以考生在复习的强化阶段，一定要系统总结每个章节有哪些常考的题型，这些题型有哪些解法，比如要证明数列极限存在，要想到用单调有界准则，出现常数不等式，要想到常数变易法，最后做到看到什么题型马上就有固定的解法。就像拍电视剧，男主角掉到山崖，一般都会挂到树上，一定会有一个世外高人救了他。

同时考研试题中有一些条件，有固定的结论，比如一般出现$f(b)-f(a)$要用拉格朗日中值定理；出现了高阶导数要用泰勒定理；出现$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$要用；出现了$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$要想到特征值的结论；等等。这些都是一些固定套路，虽然生活中要少一些套路，多一些诚意，但是考研试题中还是会有很多固定的解题思路，本书正文会给考生进行系统总结。

三、科学规划、戒骄戒躁

考研数学的复习是一个漫长、系统、宏伟的工程，年轻的考生不缺乏激情、不缺乏信心、不缺乏为了未来而奋斗的勇气，但是缺乏约束力，往往复习内容的多少和心情指数成正比，心情好多复习一点，心情

不好干脆就不复习了。这种三天打鱼，两天晒网的复习节奏，是不会修成正果的，要想拿下考研数学这座山头，需要考生制定一个合理的复习规划。要做一个科学的、可执行的学习计划，计划不能太过详细，有同学甚至规定早上7点起床，五分钟刷牙，一分钟洗脸，两分钟上厕所，这种计划不具有可操作性。

本书正是基于以上的考虑，分为认知篇和题型篇。

认知篇注重呈现考研数学的基本概念，基本理论和基本方法。

题型篇重在将考研数学中常见的题型进行归纳、总结，旨在认知篇的基础上帮助考生掌握常考题型，提高解题能力。

下面我根据多年参与考研辅导的经验，给考生制定一个学习计划的框架，具体的可以根据自身的特点自我调整。

一、基础阶段

1. 时间：Now—6月

2. 目标：系统复习、夯实基础

通过基础阶段的复习，一方面打好基础，拿到考研数学的基础分，同时为后期强化阶段题型的复习打好基础

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(认知篇)；(2)《考研数学基础必做660题》；

(3)《考研数学真题大解析》(珍藏版)。

二、强化阶段

1. 时间：7—9月

2. 目标：归纳题型、总结方法

在这三个月里，要归纳考研数学常考题型，同时总结解题方法和解题技巧，最后要做到看到题就知道方法是什么。

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(题型篇)；(2)《考研数学强化必做660题》。

三、冲刺阶段

1. 时间：10月—考前

2. 目标：查漏补缺、实战演练

通过上一阶段的复习，考生对重要知识、常见题型的做题方法进行了归纳，接下来要通过真题和模拟题将这些知识和做题方法进行融会贯通的使用，同时通过做模拟题，一方面查漏补缺，看自己还有哪些地方不会，另一方面，要养成良好的做题习惯：限定时间和做题顺序等以培养应试技巧。

3. 用书：

(1)《考研数学真题大解析》(标准版)；(2)《考研数学最后成功8套题》。

特别提示 本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”、“②”、“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了部分考研真题，对真题，在题号后以“年份^{卷种}”的形式表示，如选自2011年数学一的真题表示为“$2011^{①}$”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说：凡事预则立，不预则废。

限于水平，撰写中难免出现差错，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编者

于北京

目　录

第一章　函数、极限、连续

重点题型详解

题型一　函数相关问题

名师解码

解题策略

一般地，求函数的定义域需注意以下几点：

1. 若函数是一个抽象的数学表达式，则其定义域应是使该表达式有意义的一切实数组成的集合，且满足

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 偶次根号下应大于或等于零；

(3) 对数式的真数应大于零且底数大于零不为1；

(4) $\arcsin \varphi(x)$ 或 $\arccos \varphi(x)$，其中 $|\varphi(x)| \leqslant 1$；

(5) $\tan \varphi(x)$，其中 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\varphi(x)<k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$；

$\cot \varphi(x)$，其中 $k\pi<\varphi(x)<k\pi+\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(6) 若函数的表达式由几项组成，则它的定义域是各项定义域的交集；

(7) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

2. 若函数涉及实际问题，定义域为除了使数学式子有意义之外还应当确保实际有意义的自变量取值全体组成的集合.

3. 对于抽象函数的定义域问题，要依据函数定义及题设条件.

【例1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$，求 $f(x)$ 的定义域.

【思路】 分式的分母不能为零.

【解】 要使函数式有意义，必须满足 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2} \neq 0, \\ x-2 \neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x \neq 1, \\ x \neq 2,\end{cases}$ 故所给函数的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 1, x \neq 2\}$.

评注　如果把 $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$ 化简为 $\dfrac{x(x-2)}{x-1}$，那么函数的定义域为 $x \neq 1$ 的一切实数，因此，为避免出错，求函数的定义域应在变形之前.

【例2】 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【思路】 利用复合函数求 $\varphi(x)$ 的表达式.

【解】 由 $\exp\{[\varphi(x)]^2\}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，由 $\ln(1-x) \geqslant 0$，得 $1-x \geqslant 1$，即 $x \leqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x \leqslant 0$.

【例3】 求下列函数的反函数：

(1)$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$； (2)$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & x>4.\end{cases}$

(1)【思路】 将式子两边求立方,利用$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=y$代入,解$x$.

【解】 由$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$,等式两边求立方得

$$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})^2(x-\sqrt{1+x^2})}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})^2}+x-\sqrt{1+x^2},$$

即
$$y^3=2x-3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}-3\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=2x-3y,$$

解之$x=\frac{1}{2}(3y+y^3)$. 所以反函数为$y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$,$x\in\mathbf{R}$.

评注 直接解不出x,需要观察,变换.

(2)【思路】 分段写出表达式,解出x.

【解】 由$x=\begin{cases}y, & y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & y>16,\end{cases}$则反函数为$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$

评注 求反函数的定义域即是求原函数的值域.

【例4】 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$求$f[\varphi(x)]$.

【思路】 根据外函数定义的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析.

【解】 由$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 当$\varphi(x)<1$时,即当$x<0$,$\varphi(x)=x+2<1$,即$\begin{cases}x<0,\\ x<-1,\end{cases}$得$x<-1$；

当$x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1<1$,即$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}$,有$0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当$\varphi(x)\geqslant 1$时,即当$x<0$,$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,即$\begin{cases}x<0,\\ x\geqslant -1,\end{cases}$得$-1\leqslant x<0$；

当$x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,即$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\leqslant -\sqrt{2}\text{或}x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$,得$x\geqslant\sqrt{2}$.

综上可得$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

评注 1. 代入法：一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法,称为代入法；该方法用于初等函数的复合,关键搞清哪个是内函数,哪个是外函数；

2. 分析法：根据外函数定义的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得到复合函数的方法,称为分析法；该方法用于初等函数与分段函数或分段函数与分段函数的复合.

【例 5】　判断 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

【解】　$f(x)$ 的定义域为 $x\in(-1,1)$,关于原点对称,又由 $f(x)+f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}+\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=$ $\ln\frac{1-x}{1+x}+\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\ln 1=0$,知 $f(x)$ 为奇函数.

评注　1. 用定义;2. 若 $f(x)+f(-x)=0$,则 $f(x)$ 为奇函数,这种方法适用于用定义判断奇偶性有困难的题目.

【例 6】　函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

【解】　如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 当 $x\neq 0,1,2$ 时 $f(x)$ 连续,而

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(-1-2)}{(-1-1)(-1-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(0-2)}{(0-1)(0-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}.$$

故(A)正确.

题型二　函数极限

求函数极限的方法:

1. 极限的四则运算;　2. 等价量替换;　3. 变量代换;　4. 洛必达法则;
5. 重要极限;　6. 初等函数的连续性;　7. 导数的定义;
8. 利用带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式;　9. 夹逼定理;
10. 利用带有拉格朗日型余项的泰勒公式;　11. 拉格朗日中值定理;
12. 无穷小量乘以有界量仍是无穷小量等.

★ 题型 2.1　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,求 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

解题策略

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{A}{B}, & A\text{ 为常数},B(\text{常数})\neq0,\\ 0, & A=0,B=\infty,\\ \infty, & A(\text{常数})\neq0,B=0,\\ \frac{0}{0}, & A=0,B=0,\\ \frac{\infty}{\infty}, & A=\infty,B=\infty.\end{cases}$$

对于未定式的极限,先用等价量替换(或变量替换,或极限的四则运算)化简,再利用洛必达法则求极限. 很多情况下,常常综合运用几种方法.

【例 7】　(2008[2]) $f(x)$ 连续,$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(xf(x))}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ________.

【思路】　用无穷小量等价代换及一般形式.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{[xf(x)]^2}{2}}{x^2f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f(0)=1$，所以 $f(0)=2$.

评注 由“$\dfrac{0}{0}$”型极限值反求其中函数值，一般利用无穷小量等价代换以及洛必达法则和两个重要极限. 一些考生将$\lim\limits_{x\to0}f(x)=a$直接写入极限式，如下：

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(xf(x))}{(e^{x}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(xa)}{(e^{x}-1)a}=\cdots,$$

这样做是不对的，因为如果 $f(0)=a=0$，这时$\dfrac{1-\cos(xa)}{(e^{x}-1)a}$的分母为零，式子无意义.

【例 8】(2017[2][3]) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$.

【解】 令 $u=x-t$，则$\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt=\int_0^x\sqrt{u}\,e^{x-u}\,du=e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du$，

所以，原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}e^{-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}=\dfrac{2}{3}$.

【例 9】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

【思路】 化简，利用重要极限的一般形式求解.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=1\times1=1$.

评注 如果用洛必达法则，需要用三次，花的时间多且易出错.

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos^x x-2}{x\ln\cos x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos^x x-2}{x\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(e^{x\ln\cos x}-1)}{x\ln\cos x}\xlongequal{令t=x\ln\cos x}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2(e^t-1)}{t}=2$.

【例 11】 (2009[3]) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

【解】 当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-e^{\cos x-1})}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-\cos x)}{\dfrac{1}{3}x^2}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{3}{2}e$.

【例 12】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

【思路】 利用等价量替换与洛必达法则或利用洛必达法则、极限的乘积运算法则求解.

【解】 **方法一** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2-e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}}{x}=-e^2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}$，

且当 $x\to0$ 时，$\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2\to0$，故 $e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1\sim\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2$，得

$$\text{原式}=-e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2\lim_{x\to0}\frac{-x}{x(1+x)}=e^2\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=e^2.$$

方法二　$\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2-e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}\cdot2\dfrac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=e^2.$$

评注　由本题看到有时用等价量替换比直接用洛必达法则要简便得多.

【例 13】　(1992[3]) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【思路】　遇到根式,共轭因式极限不是零的情形就有理化,然后用等价量替换求解.

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{2x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{-x}=-\frac{1}{2}.$$

评注　当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\sim2,\cos x\sim1$.

注意这里 $\cos x$ 用的是等价量替换换成了1,不是求 $\cos x$ 的极限.

【例 14】　求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

【思路】　利用极限的乘积运算法则与洛必达法则或利用变量代换与等价量替换求解.

【解】　方法一　由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{-1}=\dfrac{1}{n}$,故

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

方法二　$\text{原式}\xlongequal{t=1-x}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1-\sqrt{1-t})(1-\sqrt[3]{1-t})\cdots(1-\sqrt[n]{1-t})}{t^{n-1}}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{t}{n}}{t^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

评注 这里的$(1-\sqrt[n]{1-t})=-\{[1+(-t)]^{\frac{1}{n}}-1\}\sim-\frac{1}{n}(-t)=\frac{t}{n}(t\to 0)$,如果不进行观察、分析,直接用洛必达法则计算会很复杂.

【例 15】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

【思路】 利用和差化积公式、极限的乘积运算法则、等价量替换、洛必达法则求解.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}$.

由 $x\to 0$ 时,$\sin\frac{\sin x+x}{2}\sim\frac{\sin x+x}{2}$,$\sin\frac{\sin x-x}{2}\sim\frac{\sin x-x}{2}$ 得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\frac{\sin x+x}{2}\cdot\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

评注 考生如果不知道和差化积公式,用洛必达法则求解则很麻烦.

【例 16】 (2009[2])求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解】 **方法一** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$(令 $\sin x=t$)

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^3)\right)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

方法二 因为 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,则 $\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$.

评注 一般都使用简单的无穷小量替代复杂的无穷小量,而方法一反其道而行之,再结合变量代换化难为易.

【例 17】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【思路】 利用变量代换与洛必达法则求解.

【解】 原式$\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal[洛必达法则]{用 50 次}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$.

评注 如果直接使用洛必达法则,越用越复杂.灵活运用变量代换就会使解题运算更简便.

【例 18】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,$f(0)=0$,$f'(0)=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^1 tf(xt)\mathrm{d}t}{x}$.

【思路】 利用定积分变量代换、变上限求导、洛必达法则与导数定义求解.

【解】 $\int_0^1 tf(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{u=xt} \int_0^x \frac{u}{x}f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$,于是

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{3}f'(0) = \frac{2}{3}.$$

评注 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3}f'(0) = \frac{2}{3}$.

这种解法的答案是对的,过程是错的.因为不知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内是否可导时,不能使用第二次洛必达法则;不知函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续时,不能用 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$.

【例 19】(2014[1][2][3]) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【解】 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x\right] \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

【例 20】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$.

【思路】 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$ 为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\cos x}{3-\sin x}$ 极限不存在,所以洛必达法则不适用,宜改用分子分母同除以 x,利用无穷小量乘以有界量仍是无穷小量的性质求解.

【解】 $$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\sin x}{3+\frac{1}{x}\cos x} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

★ 题型 2.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$.

解题策略

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x) = \begin{cases} AB, & A,B\text{ 为常数},\\ \infty, & A=\text{常数}\neq 0, B=\infty,\\ 0\cdot\infty, & A=0,B=\infty.\end{cases}$$

当 $A=0,B=\infty$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)(0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

对于因式中含有对数函数、反三角函数的情形,尽量用等价量替换的方法.若不能用等价量替换,一般放在分子上,否则利用洛必达法则会很烦琐,或求不出来.

【例 21】 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1} = -\dfrac{100}{2} = -50.$

评注 当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{x^2}$.

【例 22】 求 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$.

【思路】 先做变量代换，再进行等价量替换，然后用洛必达法则求解.

【解】 原式 $\xlongequal{t=1-x}\lim\limits_{t\to0^+}\ln(1-t)\ln t = \lim\limits_{t\to0^+}(-t\ln t) = \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{-\ln t}{t^{-1}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to0^+}t = 0.$

评注 如果分子分母中的因式为对数函数且极限为零，该因式一定可以进行等价量替换，简化求极限过程.

【例 23】 (2007[3]) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3} \xlongequal{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2} \xlongequal{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{2^x(\ln 2)^2+6x}$

$$\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x(\ln 2)^3+6}=0,$$

且 $(\sin x+\cos x)$ 是有界量，由无穷小乘以有界量仍是无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$.

★ 题型 2.3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$

解题策略

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\begin{cases} A-B, & A,B\text{ 为常数}, \\ \infty, & A,B\text{ 中有一个是非零常数，另一个是无穷大}, \\ \infty, & A,B\text{ 为异号无穷大}, \\ \infty-\infty, & A,B\text{ 为同号无穷大}. \end{cases}$$

当 $A=\infty$，$B=\infty$，且 A 与 B 同号时，要求 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$，可以把 $f(x)$，$g(x)$ 直接或通过变量代换化成分式，通分、化简，化成“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，再利用洛必达法则求解.

【例 24】 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

【思路】 化成“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，利用变量代换、极限的乘积运算法则与洛必达法则求解.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3},$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)=2$，得

$$\text{原式} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right) = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.$$

评注　如果分子不分解因式，用洛必达法则求解会比较复杂，且易出错.

★ 题型 2.4　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

解题策略

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} A^B, & A > 0 \text{ 为常数}, B \text{ 为常数}, \\ 1^{\infty}, & A = 1, B = \infty, \\ 0^0, & A = 0, B = 0, \\ \infty^0, & A = \infty, B = 0, \\ 0, & A = 0, B = +\infty, \\ +\infty, & A = 0, B = -\infty. \end{cases}$$

(1) 当 $A = 1, B = \infty$ 时，有两种方法求该未定式的极限，一种方法是利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 计算，另一种方法是化为以 e 为底的指数函数，再利用洛必达法则. 即

方法一　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\ (1^{\infty}) = \lim\limits_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]g(x)\,(0\cdot\infty)}$，

再根据具体情况将指数化成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式求解.

方法二　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\ (1^{\infty}) = \lim\limits_{x\to x_0} e^{[\ln f(x)^{g(x)}]} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{[g(x)\ln f(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)}$.

这两种方法中，通常方法一较为简便.

(2) 当 $A = 0, B = 0$ 或 $A = \infty, B = 0$ 时，只能化成以 e 为底的指数函数，再利用洛必达法则. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\ (0^0 \text{ 或 } \infty^0) = \lim\limits_{x\to x_0} e^{[g(x)\ln f(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\ (0\cdot\infty)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$.

而 $A = 0, B = +\infty$ 或 $A = 0, B = -\infty$ 的情形不属于未定式，因为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\ (0^{+\infty}) = \lim_{x\to x_0} e^{[g(x)\ln f(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\ [+\infty\cdot(-\infty)]} = e^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\ (0^{-\infty}) = \lim_{x\to x_0} e^{[g(x)\ln f(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\ [-\infty\cdot(-\infty)]} = e^{+\infty} = +\infty.$$

【例 25】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【思路】　利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 或化成 $e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)}$，对指数极限用洛必达法则求解.

【解】　**方法一**　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

方法二　原式 $= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x - \ln x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

评注 最终本质上都是化成求指数的极限(一般为分式的极限).在求解的过程中,考生可运用四则运算、等价量替换、变量代换、洛必达法则等方法求极限.

【例 26】 求$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x(\infty^0)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]}$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to+\infty}e^{\frac{1}{t}\ln(\ln t)}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(\ln t)}{t}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}}=e^0=1.$$

【例 27】 (2010[3])求$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}}$,其中

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)^{-1}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)=-1,$$

故原式$=e^{-1}$.

题型三 已知函数极限且函数表达式中含有字母常数,确定字母常数数值

解题策略

运用无穷小量阶的比较、洛必达法则或带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式去分析问题、解决问题.这种题型比较经典.

【例 28】 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b\neq0$,求常数$a,b$.

【思路】 利用变量代换与无穷小量的阶的比较求解.考生如果知道无穷大量阶的比较,解题会更简捷.

【解】 **方法一** 令$\frac{1}{x}=t$,当$x\to+\infty$时,$t\to0^+$,于是

$$原式=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^5}+\frac{7}{t^4}+2\right)^a-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{(1+7t+2t^5)^a}{t^{5a}}-\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{1-5a}(1+7t+2t^5)^a-1}{t}=b\neq0,$$

由$\lim\limits_{t\to0^+}t=0$知当$t\to0$时,分子是分母的同阶无穷小量,所以$\lim\limits_{t\to0^+}[t^{1-5a}(1+7t+2t^5)^a-1]=0$,得$1-5a=0$,即$a=\frac{1}{5}$,从而

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+7t+2t^5)^{\frac{1}{5}}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{[1+(7t+2t^5)]^{\frac{1}{5}}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{5}(7t+2t^5)}{t}=\frac{1}{5}\lim_{t\to0^+}(7+2t^4)=\frac{7}{5}=b.$$

方法二 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{5a}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)^a-x\right]=b\neq0$,知$5a=1$,即$a=\frac{1}{5}$,

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{5}\left(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)=\frac{7}{5}=b.$