美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

111个代数和数论问题

111 Problems in Algebra and Number Theory

[美] 阿德里安·安德雷斯库(Adrian Andreescu)
[美] 维嘉·维尔(Vinjai Vale) 著
隋振林 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

111个代数和数论问题

111 Problems in Algebra and Number Theory

[美] 阿德里安·安德雷斯库(Adrian Andreescu)
[美] 维嘉·维尔(Vinjai Vale) 著
隋振林 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－026 号

内 容 简 介

本书深入地研究了代数和数论的基础知识. 第一部分先从研究不等式开始，然后转换到二次方程和多项式，并呈现一系列有价值的代数技巧；第二部分从代数的角度讨论了数论的一些基础知识；第三部分列出了包含在问题中的提示，并以随机顺序排列. 内容丰富，叙述详尽.

本书可供高等学校理工科师生及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

111 个代数和数论问题/(美)阿德里安 · 安德雷斯库(Adrian Andreescu)，(美)维嘉 · 维尔(Vinjai Vale)著；隋振林译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019. 5

书名原文：111 Problems in Algebra and Number Theory

ISBN 978-7-5603-8083-4

Ⅰ. ①1…　Ⅱ. ①阿…②维…③隋…　Ⅲ. ①代数数论

Ⅳ. ①O156. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 058063 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 12　字数 269 千字
版　　次　2019 年 5 月第 1 版　2019 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-8083-4
定　　价　58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库

序　言

朋友之间的合作始终是值得追求的. Helen Keller 曾经说过:“独自一人做的很少,但团结起来我们能做的很多.”著名的数学家 Paul Erdös 在同事家里讨论问题的时候,总会说这样的一句话:“另一个屋顶,另一个证明.”作为一个终身数学教育者,我的目标远不止于传统教学,我为部分求知欲强烈的年轻学生开设了数学讨论小组,我想与这个小组成员做一些不同寻常的事情. 我的目标不仅仅是给学生们传授解决问题的方法,而且还要传授给他们团结协作的经验,并使他们努力学习更多的东西,充分发挥自己的潜能. 随着他们的知识的增长和技能的提高,在解决问题时他们互相挑战,并付出了大量时间复习、剖析和探索有意义的数学问题,每个人都带来了自己独特的解题方法,出于共同的愿望,他们努力工作并奉献各自的智慧. 由此,他们的合作逐渐发展起来了.

《111 个代数和数论问题》是由 Adrian Andreescu 和 Vinjai Vale 合作著的. 这本书深入地研究了代数和数论的基础知识,对扩大学生的数学视野给予全面指导. 通过全面的理论介绍、充实的实例和说明性问题,读者将学到解决问题的技巧和方法,以帮助学生更好地理解数学,并在诸如 USAJMO 等竞赛中获得成功. 我看到,在我的指导下,这两个学生共同努力、团结协作完成了本书的编纂工作. 在完成这个雄心勃勃的项目的过程中,他们的数学水平和个人成熟度也大大增加. 我将永远把这本书看成是我的学生辛勤努力的结晶,也是我对数学和教学的热情的肯定,我在 Adrian 和 Vinjai 回馈数学界的时候看到了这一点.

Dr. Titu Andreescu

2016 年 3 月

前　言

代数和数论是紧密交织在一起的数学领域．在本书中，我们从头开始探索青少年奥林匹克代数和数论的基础知识，并且有许多有益的例子．本书从研究不等式开始，然后转换到更高阶的二次方程和多项式，并呈现一系列有价值的代数技巧，这些技巧多次出现在数学竞赛中．接下来是大致按难易程度排列的混合问题，旨在强化理论部分中讨论的概念．每一个问题，我们都提供了一个完整的解决方案，其中的某些问题提供了不止一个方法．在本书的第二部分，我们从代数的角度讨论了数论的一些基础知识，从整除性和模运算开始，还包括初级奥林匹克标准数论概念等其他各种主题，接下来是数论方面的一部分问题．最后，本书列出了包含在问题中的所有提示，并以随机顺序排列，因此读者不必担心无意中发现了下一个问题的线索．我们衷心感谢 Titu Andreescu 博士慷慨提供的若干问题和有益的指导，没有他的帮助，本书是不可能完成的．他耐心细致的指导和富有洞察力的建议都极大地塑造了本书．我们还要感谢 Gabriel Dospinescu 博士和 Richard Stong 博士校对了我们的手稿并提供了许多宝贵的建议，他们详尽的评论极大地提高了本书的质量．最后，我们要感谢我们的父母，从开始到出版对整个项目的不懈支持．

享受问题吧！

如何使用这本书

数学奥林匹克允许参赛者利用若干小时来解决一些问题.因此,问题本身具有独特的性质.其目的是要考查一个人的解题能力,这不仅涉及已知的概念,而且还需要应用创造性的解决方案来解决即使是最好的问题.我们强烈建议读者花些时间研究给出的问题,包括示例.大多时候,人们必须从几个不同的角度来解决一个问题,然后才能取得实质性的进展,因为有些尝试是徒劳的.我们鼓励读者完整阅读所有提供的解决方案,包括那些已经解决的问题.每个解决方案都具有启发性,许多解法里面包含重要的见解、动机和可能发生的错误.有些人较少关注解决问题的过程,但其实这是如何在实际竞赛中提出解决方案的好例子.我们也鼓励读者在阅读解决方案后回归到问题并尝试寻找另一种途径,因为大多数奥林匹克问题可以通过多种方式来解决.最后,我们希望读者对解决奥林匹克问题的艺术以及创作出富有洞察力和严谨的解决方案能够更加满意.

许多问题都有提示.一般来说,提示是为了让读者能轻松地进入正确的方向,如果一个问题只有一个提示,这通常是一种暗示.但是,如果它有两个或三个提示,那么第一个提示通常是间接的,而第二个和第三个提示可能会提供更直接的建议.我们强烈建议读者在阅读第一个提示之后能花些时间尝试解决问题,然后再转到第二个或第三个提示.只有先全心全意地尝试解决这个问题,才能阅读提示!另外,请记住,通常有各种可能的方法解决问题,提示可能仅仅是其中一种方法.

我们偶尔使用符号 LHS 和 RHS 分别表示等式或不等式的左侧和右侧.此外,$\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$分别用于表示自然数、整数、有理数、实数和复数的集合.其他符号,例如,$\deg(P)$表示多项式 P 的次数;$\varphi(n)$表示 Euler 总体函数,在文中都有定义.读者可能在本书中遇到一些新的数学术语,例如,"成对";变量 a,b,c "两两不同"是指 $a\neq b,b\neq c,\ c\neq a$.

目　　录

第一部分 代 数

代数不仅在数学中，而且在其他各科领域中发挥着重要作用. 没有代数，就没有统一的语言来表达概念，如算术或数字的属性. 因此，为了在其他数学学科(如数论、组合数学甚至几何学)中取得优异成绩，熟悉该领域是非常重要的. 在本部分中，我们将涵盖代数(作为数学自身的一个分支)，并讨论在许多奥林匹克问题中也适用的重要技巧.

第1章 不 等 式

不等式的领域充满了理论和许多优美的问题. 在奥林匹克竞赛层面上，建立(相对)基本的工具和技术库就足够了. 不等式可能具有"简陋"的证明以及巧妙优雅的解决方案，本章将重点介绍后者，并努力提供这些证明背后的动机.

我们首先讨论基础知识，从头开始构建我们的直觉. 对于那些已经熟悉不等式的人来说，这部分可能只是一个评论，但确保所有关键概念得到巩固总是值得的. 然后，我们继续讨论诸如算术平均－几何平均不等式、排序不等式和 Cauchy－Schwarz 不等式的三个经典不等式. Titu 引理是 Cauchy－Schwarz 不等式的一个必然结果，也会详细讨论. 最后，我们介绍不常见但功能强大的 Hölder 和 Schur 不等式，这两个不等式在奥林匹克竞赛难题中都有许多应用.

1.1 基础知识

基本代数处理关于未知数的确定结果，如 $x=2$ 和 $a^3+3a=14$. 但是，如果我们只知道有关结果的一些信息而不是确切的值呢？例如，我们可能知道它存在于实数的一些子集中. 要描述的最简单的子集是半直线或区间，例如，$x>2$ 和 $1\leqslant a^3+3a\leqslant 14$. 现在，开始学习不等式.

本节的目标是从头开始建立不等式背后的直觉，具有一些以往不等式经验的读者可以跳过本节.

例 1.1 考虑不等式 $2x+3\geqslant 17$,那么关于变量 x 我们能说些什么呢?

解 如果 $2x+3$ 至少是 17,那么必有 $2x$ 至少是 14. 这就意味着 x 至少是 7.

例 1.2 如果 $x\geqslant 2$,求 $9x+4$ 的最小可能值.

解 因为 $x\geqslant 2$,我们知道 $9x\geqslant 18$,所以 $9x+4\geqslant 22$,并且,当 $x=2$ 时,有 $9x+4=22$,因此,$9x+4$ 可以达到的最小值由 $x\geqslant 2$ 确定,最小值就是 22.

注 注意到单独的 $9x+4\geqslant 22$ 并不意味着 $9x+4$ 的最小可能值是 22,我们还需要知道 22 是可以达到的. 一般来说,证明一个界限是可以达到的是一个有效证明的重要组成部分.

在上面的几个例子中我们看到,可以用不等式的方式做很多事情,当然也可以用等式来做. 例如,可以在两边同时加或减任何量,不等式将仍然成立,这是很直观的. 然而,在下一个问题中,乘和除并不像加或减那样简单.

例 1.3 如果实数 a 和 b 满足 $a>b$,那么关于 $-a$ 和 $-b$ 我们能说些什么呢?

解 用 -1 乘以不等式的两边,我们可能会认为 $-a>-b$. 但请考虑以下结论:不等式两边减去 a,得到 $0>b-a$,然后,再减去 b 得到 $-b>-a$,这等价于 $-a<-b$. 这两个结论中的哪一个是正确的?

我们确定第二个是正确的. 因为我们已经知道,从不等式的两边同时加或减一个数是完全可以的. 这意味着乘以 -1 必然是错误的. 考虑例子,假设 $a=3,b=2$,我们则有 $-3<-2$ 而不是 $-3>-2$.

直观地,可以考虑一数轴上的两个点 a 和 b,穿过零点分别得到点 a 和 b 的对应点 $-a$ 和 $-b$,则点 $-a$ 和 $-b$ 的次序与点 a 和 b 的次序正好相反. 这意味着,只要我们乘以 -1 或任何负数,必须改变符号. 也就是说,当我们乘以可能是正数或负数的时候,需要确保分别考虑了两种情况,因为他们可能因不等号改变而需要个别处理. 除法的情况也是如此,这实质上是两边同乘以一个数的倒数.

例 1.4 证明:如果 $a>b>0$,那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 条件中为什么要求 a 和 b 是正数呢?

证明 因为 $a>b>0$,$ab>0$,所以,我们可以在 $a>b$ 的两边同除以 ab,得到 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$. 正数条件很重要,因为如果 $ab>0$,我们可以以这种方式除以 ab,相反,我们可以找到一个反例(例如:$2>-2$,但是 $\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$ 不成立).

到目前为止,我们已经讨论了不等式两边的加、减、乘和除,但也有其他的操作,我们可以用等式来执行,比如加、减、乘或者除其中的两个.

例 1.5 如果有两个不等式,为了对其成功实施加法运算,那么必须具备什么条件?实施减法运算呢?

解　看一些例子，很快就会明白，为了相加两个不等式并且结果仍然成立，它们必须具有相同的不等号．如果 $a>b$ 且 $c>d$，那么必有 $a+c>b+d$，但是，我们不能说 $a>b$ 且 $d<c$，必有 $a+d>b+c$，这并非总是如此．

减法的情况非常相似，因为它只是相加一个相反的数量，所以不等号必须相反．因此，对不等式 $a>b$ 且 $d<c$，我们可以相减得到 $a-d>b-c$（注意：除了我们已经将 c 和 d 移到另一边，这实际上是和 $a+c>b+d$ 相同的不等式）．

例 1.6　乘法和除法的情况怎么样呢？

解　如果所有不等式的两边都是正的，那么就需要它们有相同的方式．例如，我们可以安全地将不等式 $3>2$ 和 $7>4$ 相乘，得到 $21>8$．但是，如果企图将不等式 $10>3$ 和 $-2>-3$ 相乘，得到 $-20>-9$，那就错了．因此，确定不等式两边都是正数之后，两个不等式相乘是安全的．由例 1.4 可知，除法的情况类似，因为除以 $a>b$ 与乘以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 相同．

注　还有其他一些情况，比如一个不等式：当 $a>0$，$b<0$ 时，$a>b$．然后，我们可以安全地将 $a>b$ 乘以任意正数 c，$d(c>d)$ 以得到 $ac>bd$．这些其他案例留给好奇的读者去探索．这个信息表明，对不等式进行乘法或除法时，必须格外小心．

现在我们探索一些不受限制的变量．

定理（平凡不等式）　任意实数 x 满足 $x^2\geqslant 0$．

证明　如果 x 是正数，那么 $x\cdot x$ 是两个正数的乘积，也必须是正数；如果 x 是负数，那么 $x\cdot x$ 是两个负数的乘积，必然是正数；如果 x 是零，那么 $x\cdot x$ 也是零．在所有情况下，我们都有 $x^2\geqslant 0$．

平凡不等式从根本上说是非常有趣的．特别是，它适用于所有实数 x，没有任何其他条件．此外，我们已经看到了几个线性不等式的例子（$x\geqslant y$，$2x-3\geqslant 5$，等等），并且平凡不等式告诉我们，即使是最简单的二次函数也已经很有趣了．

例 1.7　证明：对于所有实数 a 和 b，$(a+b)^2\geqslant 4ab$．

证明　如果我们展开 $(a+b)^2$，那么有

$$a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$$

这等价于

$$a^2-2ab+b^2\geqslant 0$$

即

$$(a-b)^2\geqslant 0$$

因为这是平凡不等式，显然是真的，所以原来的不等式也必定是真的．

注　一个非常有用的相关结果是，对于所有实数 a 和 b，$a^2+b^2\geqslant 2ab$．

例 1.8　证明：对于所有实数 a 和 b，$a^2+4b^2\geqslant 4ab$．

证明　如果我们将项 $4ab$ 移到不等式的左边，看到可以因式分解，得

$$(a-2b)^2 \geqslant 0$$

这是平凡不等式,所以原不等式也必然是真的(另外,我们看到,由 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ 可以得到 $a^2+(2b)^2 \geqslant 2a(2b)$).

例 1.9 计算 $2^2+3^2+6^2$ 和 $2\cdot 3+3\cdot 6+6\cdot 2$,$5^2+4^2+1^2$ 和 $5\cdot 4+4\cdot 1+1\cdot 5$.一般情况下,$a^2+b^2+c^2$ 和 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ 哪个更大一些,为什么?

解 通过简单的计算,我们得

$$2^2+3^2+6^2=4+9+36=49$$

$$2\cdot 3+3\cdot 6+6\cdot 2=6+18+12=36$$

还有

$$5^2+4^2+1^2=25+16+1=42$$

$$5\cdot 4+4\cdot 1+1\cdot 5=20+4+5=29$$

一般情况下,当然 $a^2+b^2+c^2$ 比 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ 要大一些,现在,我们来证明它.

我们对三个数平方的和知道很少,但我们知道两个数平方的和满足 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.这在目前的形式中并没有太多的帮助,因为左边不包括 c^2.为解决这个问题,我们考虑两个类似的不等式

$$b^2+c^2 \geqslant 2bc, c^2+a^2 \geqslant 2ca$$

然后,将三个不等式相加,得

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca$$

不等式两边同除以2,即得所要的结果.

注 注意到等式(即 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$)成立,当且仅当 $a=b=c$,因为我们相加的三个不等式分别当 $a=b,b=c,c=a$ 时,等式成立.

例 1.10 证明:对所有实数 a,b,c,我们有

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

证明 我们先证明

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$$

展开不等式的两边,给出其等价形式

$$3a^2+3b^2+3c^2 \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

这可以简化为

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

这是我们前面已经证明过的.因此,第一部分的证明完成.

现在,我们来证明

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

再来一次,我们展开不等式的两边

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant 3ab+3bc+3ca$$

和之前一样,这可以简化为

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

因此,证明完成.

例 1.11 证明:对所有正实数 a,b,c,我们有

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqslant 6abc$$

证明 注意到,我们可以重组不等式左边的项为

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

之后,应用不等式 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$,得

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \geqslant 2abc+2abc+2abc=6abc$$

例 1.12 证明:对所有正实数 a,b,c,有

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$$

证法 1 展开不等式的左边,得到其等价不等式

$$2abc+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geqslant 8abc$$

然后应用前面的例子,即得所需的结论.

证法 2 令 $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=\sqrt{c}$. 则不等式等价于

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \geqslant 8x^2y^2z^2$$

这可以由下面三个不等式相乘得到

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy, y^2+z^2 \geqslant 2yz, z^2+x^2 \geqslant 2zx$$

(可以自由地进行这种乘法运算,因为所有三个不等式的两边都是正的).

例 1.13 证明:对所有正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,我们有

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$$

证明 这个不等式与例 1.9 所说的不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ 非常相似. 这可以直接两边加倍,并改写成如下形式

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_n-a_1)^2 \geqslant 0$$

例 1.14 证明:对所有正实数 a,b,c,有

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$$

证明 首先,注意到

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

然后

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \\ &\geqslant ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab \\ &= abc(a+b+c) \end{aligned}$$

组合上述两个不等式，即得

$$(a^4+b^4+c^4)\geqslant abc(a+b+c)$$

1.2 AM－GM不等式

定理（AM－GM不等式） 设 n 是一个正整数，则对所有正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

如名称所指示的，这个不等式的左边是一组数的算术平均值或平均值，右边是其几何平均值，这是另一种形式的平均值．这个不等式在许多问题中都非常有用，考虑到等式的情况下，使两边相等的变量的值是解决不等式问题的一种强大的技巧，特别是在使用AM－GM不等式时，AM－GM不等式相等的条件是当所有的 x_i 都相等．

AM－GM不等式可以通过多种方式进行扩展．与此相关的是二次均值（QM，也称为均方根[RMS]）和调和平均值（HM）．n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的QM和HM定义如下

$$\mathrm{QM}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}}$$

$$\mathrm{HM}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

可以证明，AM－GM不等式可以扩展到

$$\mathrm{QM}\geqslant\mathrm{AM}\geqslant\mathrm{GM}\geqslant\mathrm{HM}$$

我们将在本章的问题部分中证明这个结果．

现在我们来证明AM－GM不等式．在例1.7中，我们已经证明了结果 $(x_1+x_2)^2\geqslant 4x_1x_2$，当 x_1,x_2 是正数时，不等式两边取算术平方根，得到 $x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}$．这实际上是AM－GM不等式当 $n=2$ 时的情况，等号成立的条件是 $x_1=x_2$．

例2.1 证明：如果AM－GM不等式对于 $n=k$ 成立，那么它对 $n=2k$ 也成立．

证明 设 $2k$ 个正实数是 $x_1,x_2,\cdots,x_{2k}$．令

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},b=\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}$$

则由两变量的AM－GM不等式，得

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2k}=\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

接下来，由于AM－GM不等式当 $n=k$ 时成立，因此有

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)\left(\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}\right)}$$

$$\geqslant \sqrt{\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\cdot\sqrt[k]{x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{2k}}}$$
$$=\sqrt[2k]{x_1x_2\cdots x_{2k}}$$

这样一来,我们就证明了当 $n=k$ 时 AM－GM 不等式成立,则当 $n=2k$ 时也成立.

例 2.2 证明:如果 AM－GM 不等式对于 $n=k$ 成立,那么它对 $n=k-1$ 也成立.

证明 设 $k-1$ 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$. 因为 AM－GM 不等式当 $n=k$ 时成立,因此对 k 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$ 应用 AM－GM 不等式,有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}}{k}\geqslant\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_{k-1}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\right)}$$

接下来,我们可以实施一些简单的操作来简化左边,得

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\geqslant\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_{k-1}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\right)}$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\right)^k\geqslant x_1x_2\cdots x_{k-1}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\right)$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}\geqslant x_1x_2\cdots x_{k-1}$$
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}\geqslant\sqrt[k-1]{x_1x_2\cdots x_{k-1}}$$

这样,我们就证明了 AM－GM 不等式对于 $n=k$ 成立,那么它对 $n=k-1$ 也成立.

注 再次强调,这些实数是正的,在论证的有效性中起着至关重要的作用,因为,若不然,最后一组操作可能不成立.

例 2.3 结合前面的结果来证明:对所有正整数 n 的 AM－GM 不等式.

证明 $n=1$ 的情况是显然的. 所以,我们从 $n=2$ 的情况开始,反复应用例 2.1,我们看到,当 $n=2^k(k\geqslant 1)$ 时,不等式总是成立的. 然后,我们可以在 2 的幂次之间填充正整数,重复应用例 2.2,这样,就遍历了所有正整数 n,不等式都是成立的.

注 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,AM－GM 不等式的等号成立. 这个问题的证明留给读者作为练习.

掌握 AM－GM 不等式需要经验,因为它涉及熟练的项操作技巧. 本部分的目标之一是建立理解这种水平所需的直觉. 我们从应用 AM－GM 不等式的一个关键思想开始:消去法.

例 2.4 假设 x 是一个正实数,求 $x+\dfrac{1}{x}$ 的最小可能值.

解 在两个量 x 和 $\dfrac{1}{x}$ 上应用 AM－GM 不等式,使得我们可以在较大的一方获得它们的和,而在较小的一方获得它们的一个常数(因为 x 在 GM 中消除了)

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

所以

$$x+\frac{1}{x} \geqslant 2$$

当 $x=\frac{1}{x}$ 或者 $x=1$ 时,等号成立.

例 2.5 假设 x 是一个正实数,求 $x^2+\frac{1}{x}$ 的最小可能值.

解 如果采用和上例同样的方法,那么得

$$x^2+\frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{x}$$

不幸的是,这并不能帮助我们,因为我们需要的下界是一个常数,这意味着无论如何都需要消去变量 x. 在此的处理手法是将项 $\frac{1}{x}$ 分拆成 $\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x}$,然后再使用 AM − GM 不等式,因为现在分母中有两个 x 来抵消 x^2,所以有

$$x^2+\frac{1}{x} = x^2+\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{x}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

当 $x^2=\frac{\frac{1}{2}}{x}$ 或者 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时,等号成立.

例 2.6 对所有实数 $a,b,c>0$,证明

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geqslant 6$$

证法 1 对三个分式应用 AM − GM 不等式,得

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} = 3\sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6$$

因为 $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$(参见例 1.12).

证法 2 我们可以先分拆分数,然后将 AM − GM 不等式应用到左边,从而使变量消去,得

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b} \geqslant 6\sqrt[6]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b}} = 6$$

这正是我们想要证明的.

证法 3 我们可以使用与证法 2 同样的方法,然后注意到