数学简史

确定性的消失

MORRIS
KLINE

Mathematics

The Loss
of
Certainty

[美]莫里斯·克莱因——著

李宏魁——译

中信出版集团

数学简史
确定性的消失

MORRIS
KLINE

Mathematics

The Loss
of
Certainty

[美] 莫里斯·克莱因——著
李宏魁——译

中信出版集团·北京

图书在版编目（CIP）数据

数学简史：确定性的消失 /（美）莫里斯·克莱因著；李宏魁译 .-- 北京：中信出版社，2019.3

书名原文：Mathematics: The Loss of Certainty

ISBN 978-7-5086-9370-5

Ⅰ .①数… Ⅱ .①莫… ②李… Ⅲ .①数学史－普及读物 Ⅳ .① O11-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 187394 号

数学简史：确定性的消失

著　　者：[美] 莫里斯·克莱因
译　　者：李宏魁
出版发行：中信出版集团股份有限公司
（北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座　邮编　100029）
承 印 者：北京盛通印刷股份有限公司

开　　本：710mm × 1000mm　1/16　　印　　张：29　　字　　数：380 千字
版　　次：2019 年 3 月第 1 版　　印　　次：2019 年 3 月第 1 次印刷
广告经营许可证：京朝工商广字第 8087 号
书　　号：ISBN 978-7-5086-9370-5
定　　价：78.00 元

In any special doctrine of Nature there is only as much genuine science as there is mathematics.

在所有关于自然的特定理论中，我们能够发现多少数学，就能发现多少真正的科学。

—— 伊曼努尔·康德，《自然科学的形而上学基础》

湖岸

Hu'an publication

To my wife Helen Mann Kline

献给我妻子海伦

神并非从一开始就揭示万物的真理，

人只有不断探求，

才能日渐接近。

…………

让我们假设事物就像真理。

…………

当然，无人能理解，

甚至永远不能理解关于神的真理和我所谈的一切。

就算有人偶尔说出了完美的真理，

他自己也意识不到，

毕竟万物皆覆以表象。

——色诺芬

序言

数学发生了历史性的巨变！

数学曾被视为是精密论证的最高峰，它本身不但是道理，同时也是万物运行背后的道理。但是现在的数学并不拥有曾为它带来这么多尊重乃至景仰的这些属性，对于数学的认识不得不做出根本性的改变。数学的地位到底发生了什么变化？如何面对失落了“真理性”的数学？我们该如何面对这个根本性的转变？现在的数学又是如何的？这就是本书的主题。引言部分会对这些主题做简要描述。在专业的数学史中，可以找到关于这个巨变散落的技术细节，但对于想要了解这个转变的普通读者，一部简要的、没有大量专业内容的作品会更便于抓住其要领。

关于现代数学的状况，许多数学家可能更愿意只在数学界内取得共识，这些问题可能不宜公开，就像人们都不乐意在大庭广众之下宣布自己的婚姻出了问题一样。但是能够运用理性认识世界的人应该了解他的基本工具，认清这个工具（理性）的能力范围和边界，这样远比盲目信任强。这种盲目会产生出虚假的信念，这种信念甚至会导致巨大的失败。

在此谨向牛津大学出版社致谢，感谢他们仔细编辑出版本书；尤其需要感谢 William C. Halpin 和 Sheldon Meyer 两位，他们意识到向大众介绍本书主题的必要性，还要感谢 Leona Capeless 女士和 Curtis Church 先生

宝贵的批评建议，同时要感谢我的妻子为本书润色并校对。

最后要感谢美国数学协会（Mathematical Association of America）同意我在第 11 章里引用《美国数学月刊》（*The American Mathematical Monthly*）上的文字。

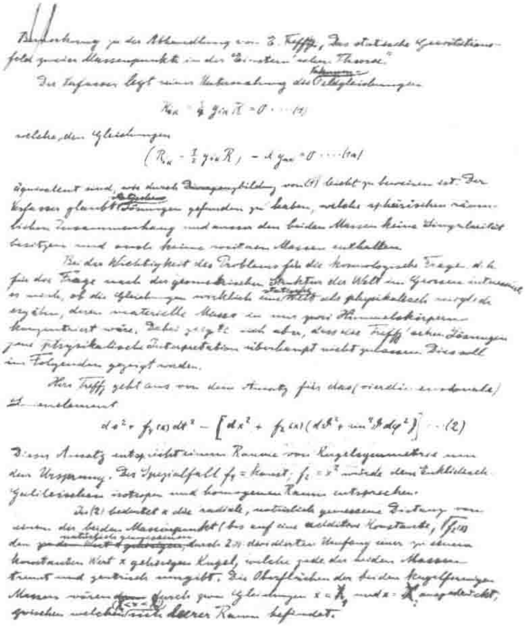
M. 克莱因

布鲁克林，纽约

1980 年 1 月

目 录

c o n t e n t s



Bemerkung zu der Abhandlung von E. Trefftz, „Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einstein'schen Theorie."

Der Verfasser legt seiner Untersuchung die erweiterten Feldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0 \cdots (1)$$

welche den Gleichungen

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) - \lambda g_{ik} = 0 \cdots (1a)$$

äquivalent sind, wie durch Divergenzbildung von (1) leicht zu beweisen ist. Der Verfasser glaubt statische Lösungen gefunden zu haben, welche sphärischen räumlichen Zusammenhang und ausser den beiden Massen keine Singularitäten besitzen und sonst keine weiteren Massen enthalten.

Bei der Wichtigkeit des Problems für die kosmologische Frage d. h. für die Frage nach der geometrischen Struktur der Welt im Grossen interessiert es sehr, ob die Gleichungen wirklich eine statische Welt als physikalisch möglich ergeben, deren materielle Masse in nur zwei Himmelskörpern konzentriert wäre. Dabei zeigt es sich aber, dass die Trefftz'schen Lösungen jene physikalische Interpretation überhaupt nicht zulassen. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Herr Trefftz geht aus von dem Ansatz für das (vierdimensionale) Linienelement

$$ds^2 = f_1(x)\,dt^2 - \left[dx^2 + f_2(x)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right] \cdots (2)$$

Dieser Ansatz entspricht einem Raume von Kugelsymmetrie um den Ursprung. Der Spezialfall $f_1 = \text{konst.}$; $f_2 = x^2$ würde dem Euklidisch-Galileischen isotropen und homogenen Raum entsprechen.

In (2) bedeutet x die radiale, natürlich gemessene Distanz von einem der beiden Massenpunkte (bis auf eine additive Konstante), $\sqrt{f_2(x)}$ den natürlich gemessenen, durch 2π dividierten Umfang einer zu einem konstanten Wert x gehörigen Kugel, welche jede der beiden Massen trennt und zentrisch umgibt. Die Oberflächen der beiden kugelförmigen Massen wären durch zwei Gleichungen $x = X_1$ und $x = X_2$ ausgedrückt, zwischen welchen ($X_1 < x < X_2$) sich leerer Raum befindet.

引言

主 题

要预见数学的未来，正确的方法是研究它的历史和现状。

——亨利·庞加莱

战争、饥荒和瘟疫能引起悲剧，然而，人类思想的局限性也能引起理性上的悲剧。本书论及的不幸事件降临在人类最为卓著且无与伦比的成就，对人类的理性精神具有最持久和最深刻的影响——数学的头上。

换句话说，这本书在非专业层次上探讨数学尊严的兴衰。看到数学现在的宏大规模，日益增多甚至呈繁荣之势的数学活动，每年发表的数以千计的研究论文，对计算机兴趣的迅猛增长以及尤其是在社会科学和生物科学中对定量关系的广泛研究，数学的衰落从何谈起？悲剧存在于何处？要回答这些问题，我们首先必须考虑是什么为数学赢得了巨大的声望和荣誉。

作为一个独立知识体系的数学起源于古希腊，自它诞生之日起的2000多年来，数学家们一直在追求真理，而且成就辉煌。关于数和几何图形的庞大理论体系为数学提供了一个看起来似乎无限的确定性前景。

在数学以外的领域，数学概念及其推论为重大的科学理论提供精髓。尽管通过数学和科学的合作才获得的知识用到了自然定律，但它们看来似乎与绝对的数学真理一样绝对可信，因为天文学、力学、光学和空气
3 动力学中的数学所做的预测与观察和实验相当吻合。因此，数学能牢固把握宇宙的所作所为，能瓦解玄秘并代之以规律和秩序。人类得以趾高

气扬地俯瞰他周围的世界，吹嘘自己已经掌握了宇宙的许多秘密（实际上是一系列数学定理）。拉普拉斯[1]的话概括了数学家们一直在不懈地寻求真理的信念。他说，牛顿[2]是最幸运的人，因为只有一个宇宙，而他已发现了它的规律。

数学依赖于一种特殊的方法去达到它惊人而有力的结果，即从不证自明的公理出发进行演绎推理，这种方法我们仍会在通常的高中几何课上学习。它的实质是，若公理为真，则可以保证由它演绎出的结论为真。通过应用这些看起来清晰、正确且完美的逻辑，数学家们得出显然是毋庸置疑、无可辩驳的结论。数学的这套方法在今天仍然沿用。任何时候，任何人想找一个推理的必然性和准确性的例子，一定会想到数学。

这种数学方法所取得的成功吸引了最伟大的智者，数学已显示了人类理性的能力、根源和力量。所以他们想到，为什么不能把这种方法用到由权威、风俗、习惯控制的领域，比如在哲学、神学、伦理学、美学及社会科学中去寻求真理呢？人类的推理能力在数学和自然科学中是如此卓有成效，肯定也将成为上述其他领域思想和行为的主宰，为其获得真理的美和美的真理。因此，在被称作理性时代的启蒙时期，数学方法，甚至和一些数学概念及定理，被应用到了人文领域之中。

洞察力最丰富的来源是后见之明。19 世纪初的创造，包括令人奇怪的几种几何学和代数学，迫使数学家们极不情愿地承认绝对意义上的数学或者科学中的数学真理并不都是真理。例如，他们发现几种不同的几何学同等地与空间经验相吻合，但它们可能都不是真理。显然，自然界的数学设计并不是固有的，或者如果是的话，人类的数学都未必是那个设计的最好诠释。开启真理的钥匙失去了，这一事实是降临到数学头上

1 拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749—1827），法国天文学家、数学家、物理学家。如无特别说明，本书脚注均为编者注。

2 牛顿（Isaac Newton，1642—1727），英国物理学家、数学家、天文学家。

的第一个不幸事件。

新的几何学和代数学的诞生使数学家们感受到另一个宇宙的震动。寻求真理的信念使数学家们如醉如痴，总是迫不及待地用严密论证去追求那些虚无缥缈的真理。认识到数学并不是真理的化身动摇了他们从数学那里获得的自信，他们开始重新检验他们的创造。他们失望地发现数
4 学中的逻辑形容枯槁，惨不忍睹。

事实上，数学已经在不合逻辑地发展，不仅包括错误的证明、推理的漏洞，还有稍加注意就能避免的疏误。这样的错误比比皆是。这种不合逻辑的发展还涉及对概念的片面理解，无法真正认识逻辑所依赖的原理以及论证的不严谨性；也就是说，直觉、实证及借助于几何图形的证明取代了逻辑论证。

不过，数学仍然是一种对宇宙的有效描述，而且在许多人心里，特别是在柏拉图主义者看来，数学是实在（reality）的一部分，是值得追求的。因此，数学家们决定去弥补丢失了的逻辑结构，重建有缺陷的部分。在 19 世纪下半叶，数学的严密化运动（rigorization of mathematics）格外引人注目。

到 1900 年，数学家们确信已实现了自己的目标。尽管他们不得不满足于数学仅能作为对宇宙的一个近似描述的观点，许多人甚至放弃了宇宙的数学化设计这一信念，但的确庆幸他们重建了数学的逻辑结构。然而，他们还没来得及炫耀自封的成功，在重建的数学中就发现了矛盾。一般称这些矛盾为悖论（paradoxes），这是为了避免直接说矛盾而破坏了数学逻辑的委婉用语。

当时那些领头的数学家几乎立刻就投身于解决这些矛盾，于是他们构想、阐述甚至建构了四种不同的数学学派，每一种都有众多的追随者。那些基础的学派不仅努力解决已有的矛盾，而且力争避免新的矛盾出现，换句话说，他们要建立数学的相容性（consistency）。在这些基础研究中

又出现了其他的问题，某些公理和演绎逻辑推理的可接受性也成为几个学派采取不同立场的重要原因。

到 1930 年，数学家们已满足于接受几种数学基础中的一两个，并且宣称自己的数学证明至少和这些学派的原则相符。但是，灾难再次降临——以哥德尔[1]的一篇著名论文的形式出现。哥德尔证明了那几个学派所接受的逻辑原理无法证明数学的一致性。这还不包括论文里其他一些 5
意义重大、影响深远的结果。哥德尔表明，对已取得的成功提出质疑不能不用到非常可疑的逻辑原理。哥德尔定理引起一场巨变。随后的发展带来了更大的麻烦。例如，就连过去极度推崇的、被认为是精密科学方法的公理化——演绎方法看来也是有缺陷的。这些新的发展给数学增加了多种可能的结构，同时也把数学家分成了更多的相异群体。

数学的当前困境是有许多种数学流派，而且由于种种原因，每一种都无法使对立学派满意。显然，普遍接受的概念、正确无误的推理体系——1800 年时尊贵的数学和那时人的自信——现在都成了痴心妄想。与未来数学相关的不确定性和可疑性，取代了过去的确定性和自满。关于“最确定的”科学的基础意见不一致不仅让人吃惊，而且，温和一点说，是让人尴尬。目前的数学或是故作深沉，或是对广泛承认的真理，所谓的完美无缺的逻辑的拙劣模仿。

有的数学家认为，关于接受什么作为真正数学的不同观点，总有一天会统一起来。在这些人当中比较有名的是一群署名为尼古拉·布尔巴基[2]的法国领头数学家们：

1 哥德尔（Kurt Gödel，1906—1978），奥地利－美国数学家、逻辑学家、哲学家。——译者注

2 尼古拉·布尔巴基（Nicolas Bourbaki）是20世纪一群法国数学家的笔名。布尔巴基的目的是在集合论的基础上，用最具严密性、最一般的方式来重写整个现代高等数学。他们的工作始于1935年，在大量的写作过程中创造了一些新的术语和概念。布尔巴基是个虚构的人物，布尔巴基团体的正式称呼是“尼古拉·布尔巴基合作者协会”，其在巴黎的高等师范学校设有办公室。

> 长期以来，对数学原理的重要修正几乎无一不在不确定性时期之后，而不确定性确实使矛盾出现了并且一定得被解决。在至今已有25个世纪之久的这段时期里，数学家们一直在改正他们的错误，并且看到了这门科学欣欣向荣，而不是枯竭衰败。这使他们有理由对未来充满希望。

然而，更多的数学家并不乐观。20世纪最伟大的数学家之一，外尔[1]在1944年曾指出：

> 数学的终极基础和终极意义尚未解决，我们不知道沿着什么方向可以找到最终答案，或者甚至于是否有希望得到一个最终的、客观的答案。“数学化”很可能是人类原始创造力的一项创造性活动，类
> 6 似于语言或音乐，其历史观点否认完全客观的合理性。

用歌德的话说：“一门科学的历史就是这门科学本身。”

对于正确的数学是什么的问题所存在的分歧以及不同基础的多样性不仅严重影响数学本身，还波及最为生机勃勃的自然科学。我们将看到，最先进的自然科学理论（即这种理论的成果可以在感觉上或实体上体现出来。例如即便我们一点也不懂电磁波是什么，但我们能听到收音机中传出的声音），这都是数学化的成果。因此，没有亲自对数学基础下过功夫，而又不打算花费数年时间研究不完美的数学的科学家，一定会关心什么样的数学能被理直气壮地应用。

真理的丧失，数学和科学不断增加的复杂性，以及对于何种方法应用于数学是最保险的的不确定性，已使大多数数学家放弃科学。风声鹤

---

1 外尔（Hermann Weyl，1885—1955），德国数学家、理论物理学家、哲学家。

唳，草木皆兵，数学家们不得不退回到那些证明方法看起来似乎很安全的数学领域。他们还发现人为编造出来的问题比自然界提出来的问题更富魅力，处理起来更加得心应手。

因完美的数学是什么而产生的危机和矛盾还阻碍了数学的方法在许多其他文化领域中的应用，如哲学、政治科学、伦理学和美学。找到客观、正确的定律和标准的希望变得微弱了，理性时代已经过去。

尽管数学令人不满意，方法复杂多变，对可接受公理持不同意见，还有随时可能出现的新矛盾，都会殃及大部分数学领域，但是一些数学家仍然把数学应用于自然现象中，而且事实上把应用领域扩大到经济学、生物学和社会学。数学的继续有效给我们两点启示。第一点是这种有效性（effectiveness）可用作判别正确性（correctness）的准则，当然这个准则是暂时性的。今天认为正确的，也许下次应用时就会被证明是错的。

第二点涉及未知。真正的数学是什么？对此并无定论。为什么数学依旧有效？我们是在用不完美的工具创造奇迹吗？如果人类已经被欺骗了，大自然也会受骗而屈服于人类的数学命令吗？显然不会。而且正是凭借建立在数学之上的技术，人类成功地登上了月球，探测了火星和木星。这难道不是对宇宙中的数学理论的证实吗？那么，数学的人为因素与变幻莫测又何从谈起呢？在心智和灵魂迷惘不定的时候，躯体能生存 7
下去吗？当然对于人类本身及数学，确实如此。因此我们应该去研究为什么会这样。尽管数学的基础尚不确定，数学家们的理论也彼此冲突，而数学却已被证明成就辉煌，风采依然。