

财政部“十三五”规划教材

Financial Mathem

高等学校经济管理类课程“十三五”系列教材

Financial Ma

Financial Mathem

# 金融数学

白东杰 ©主编

**Financial  
Mathematics**

Financial Ma

Financial Mathematics

ancial Mathematics

Financial Mathematics

Financial Mathematics

中国财经出版传媒集团



经济科学出版社  
Economic Science Press

财政部“十三五”规划教材

高等学校经济管理类课程“十三五”系列教材

# 金融数学

白东杰 ©主编

Financial  
Mathematics



中国财经出版传媒集团



经济科学出版社  
Economic Science Press

## 图书在版编目 (CIP) 数据

金融数学 / 白东杰主编. —北京: 经济科学出版社,  
2019. 1

财政部“十三五”规划教材 高等学校经济管理类课  
程“十三五”系列教材

ISBN 978 - 7 - 5218 - 0205 - 4

I. ①金… II. ①白… III. ①金融 - 经济数学 -  
高等学校 - 教材 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 014399 号

责任编辑: 齐伟娜 初少磊

责任校对: 王肖楠

责任印制: 李 鹏

## 金融数学

白东杰 主编

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191540

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件: [esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: [http://jjkxcbs. tmall. com](http://jjkxcbs.tmall.com)

北京季蜂印刷有限公司印装

787 × 1092 16 开 8 印张 160000 字

2019 年 2 月第 1 版 2019 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5218 - 0205 - 4 定价: 25.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191510)

(版权所有 翻印必究 举报电话: 010 - 88191586)

电子邮箱: [dbts@ esp. com. cn](mailto:dbts@esp.com.cn))

# 前言

金融行业的创新性发展促进了金融数学的诞生与发展。2007年, SOA和CAS对考试内容进行了大幅调整。其中, 金融数学增加了金融衍生品部分, 原《利息理论》教材内容无法满足考试要求, 编写一本适合财经类院校本科教学的金融数学教材很有必要。金融数学包含了数学、统计学、经济学、金融工程、金融学等内容, 内容互为交叉, 构建了丰富的金融数学模型和相关案例, 发展还在继续。编写金融数学教材并不是件轻而易举的事情, 任何一个部分的研究都非常重要, 个人很难独立编写一本系统的金融数学教材。已出版的国内外教材对金融数学已经有了较好的梳理和总结。本教材定位于结合自身教学经验及财经类院校本科金融数学课程教学特点, 尝试解读经典教材, 统一概念和公式表述方式, 基于取舍角度对经典教材和以往教学工作进行梳理。

具体而言, 本书主要参考S. G. 凯利森《利息理论》和李勇权《利息理论》教材, 结合笔者多年来的金融数学、投资学等天津财经大学本科课程教学经验, 参考孟生旺《金融数学》、吴岚和黄海《金融数学》、基思·布朗等《投资分析与组合管理》、马歇尔等《金融工程》、肖红叶《高级微观经济学》、李腊生等《现代金融投资统计分析》、元如林等《金融数据分析技术》、韩立岩等《金融资产与风险定价》等经典教材, 对上述教材的内容进行了梳理, 力求使所编教材适用于财经大学本科教学。需特别提及的是, 美国佛罗里达大学的罗纳德·H. 兰德尔斯(Ronald H. Randles)老师一学年的金融数学授课, 给了笔者很大启示。

在教材写作过程中, 笔者得到了天津财经大学统计学院领导及老师们的帮助和指导。其中, 刘乐平老师指导笔者讲授保险学课程, 杨贵军老师指导笔者讲授金融数学课程, 为本教材的编写打下了坚实基础。另外, 南开大学的李勇权老师在金融数学授课上给予了笔者很大的支持和指导。

本书在修订过程中得到了经济科学出版社及齐伟娜老师和初少磊老师的鼎力支持，在此表示衷心的感谢！

特别提及的是，中国准精算师、天津财经大学统计学院 2017 级博士研究生张圆承担了本书习题和 R 软件部分内容的编写；2017 级研究生孙浩桐、张晓明和 2018 级研究生李嘉琪、李莹莹、李竞欣承担了收集资料、录入校对等工作。特此致谢！

本书修订过程匆忙，难免存在错误与遗漏，希望读者提出宝贵意见。

本书中经典例题、知识点论证大多引自前面提及的教材，特别是凯利森《利息理论》和李勇权《利息理论》，文中不再一一提及。习题引自精算师考试真题及精算师考试教材例题。

白东杰  
2018 年 12 月

# 目 录

<b>第一章 金融数学基本概念</b> .....	<b>1</b>
第一节 什么是金融数学 /	1
第二节 价格及价格波动性 /	2
第三节 利息及利率 /	5
第四节 贴现 /	5
第五节 资本价值 /	5
第六节 效用 /	6
<b>第二章 利息基本度量方法</b> .....	<b>8</b>
第一节 本金、积累值 /	8
第二节 实质利率 /	9
第三节 单利和复利 /	10
第四节 实质贴现率 /	13
第五节 名义利率和名义贴现率 /	15
第六节 利息强度 /	17
第七节 贴现现金流和现值 /	20
第八节 投资期确定 /	20
<b>第三章 年 金</b> .....	<b>22</b>
第一节 期末付年金 /	22
第二节 期初付年金 /	25
第三节 任意时刻年金 /	26



- 第四节 永续年金 / 27
- 第五节 非标准时期的年金问题 / 28
- 第六节 年金未知利率问题 / 30
- 第七节 变利率年金 / 32
- 第八节 付款频率与计息频率不同的年金 / 34
- 第九节 连续年金 / 35
- 第十节 递增年金 / 36
- 第十一节 递减年金 / 36
- 第十二节 等比递增年金 / 37
- 第十三节 更一般变额年金 / 38

#### 第四章 收益率 ..... 40

- 第一节 贴现现金流分析 / 40
- 第二节 收益率的唯一性 / 41
- 第三节 再投资收益率 / 43
- 第四节 投资基金本金加权收益率 / 46
- 第五节 投资基金时间加权收益率 / 47
- 第六节 投资组合法与投资年度法 / 50
- 第七节 案例分析 / 51

#### 第五章 分期偿还和偿债基金 ..... 53

- 第一节 未偿还贷款余额 / 53
- 第二节 分期偿还表 / 54
- 第三节 付款频率与计息频率不同的分期偿还表 / 55
- 第四节 变额偿还支付 / 56
- 第五节 偿债基金 / 58
- 第六节 连续偿还分期偿还表 / 59

#### 第六章 债券和其他证券 ..... 61

- 第一节 债券收益率计算方法 / 61
- 第二节 债券价格 / 61
- 第三节 债券溢价与折扣 / 64

第四节 付息日之间债券的价值 / 67	
第五节 可赎回债券价格 / 68	
<b>第七章 利率风险管理</b> .....	<b>71</b>
第一节 久期 / 71	
第二节 凸性 / 74	
<b>第八章 利率期限结构</b> .....	<b>77</b>
第一节 利率期限结构定义及其应用 / 77	
第二节 关于到期收益率的基本理论 / 81	
<b>第九章 随机模型</b> .....	<b>83</b>
第一节 随机利率 / 83	
第二节 投资组合的统计分析 / 87	
第三节 期权定价 / 96	
<b>习题及参考答案</b> .....	<b>101</b>
<b>附录 金融数学相关问题的 R 软件实现</b> .....	<b>107</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>117</b>



# 第一章

## 金融数学基本概念

金融数学从根本上讲是分析利率决定及其变动对投资收益影响的课程，故本章以价格属性为起点，介绍金融产品价格——利率，并引入贴现、资本价值和效用概念介绍投资人投资决策形成的理论逻辑。具体而言，本章在概述金融数学课程的基础上，介绍金融数学的基本概念。基于投资人决策视角，将金融数学基本概念归纳为价格变动、利息、利率、贴现、资本价值、效用。对基本概念的理解和把握是学习金融数学的基础。

### 第一节 什么是金融数学

传统金融数学（利息理论）所讲述的相关概念和技术，不仅应用于精算领域，还可以用于度量金融产品风险。将传统的利息理论概念和技术应用于金融领域，就会产生新概念和新技术。国内外现有的多种版本的金融数学教科书和专著对金融数学的性质、任务、应用等做了不少论证，内容差异较大，有些侧重于精算领域，有些重点分析金融衍生品问题。

本教材针对 2007 年 SOA 和 CAS 对金融数学考核内容加入金融衍生品这一变化，将金融数学定义为以利息理论为基础，以金融问题为研究对象，运用数学工具对其进行定量分析，形成一套金融衍生品理论体系（有效市场理论、证券组合理论、资本资产定价模型、套利定价理论、期权定价方程和资产结构理论等）。利息理论从决定性视角定义利率，假定利率不受相同金融产品利率、资金投向和通货膨胀等因素影响，包括利率、利息求解、年金、收益率、分期偿还表和偿债基金、债券及其他证券等内容。金融衍生品理论放松这一假定，从随机视角构建相关金融理论模型。在利息理论介绍的数学模型基础上，拓展出两个方向。一是马科维茨投资组合理论（Markowitz portfolio theory）和资

本资产定价模型 (capital asset pricing model); 二是布莱克 - 斯科尔斯 (Black - Scholes) 关于期权和其他衍生证券的套利定价。基于无套利理论的模型可以进一步研究利率期限结构问题。

用数学方法去研究金融, 首要问题就是数据问题。根据金融数学的基本内容, 利息理论所研究的利率问题大体为非随机范畴, 通过历史数据进行数学模型构建, 探寻规律性的东西。金融衍生品则涉及了偶然性及随机性因素影响分析。上述两个方面都会碰到很多数学问题, 为解决这些问题, 产生了许多理论和方法, 构成了金融数学的基本内容。另外, 大多数金融业务涉及的是离散过程而非连续过程, 这并不意味着连续过程没有实际意义, 实务中其可以近似用于日计息的近似处理。

## 第二节 价格及价格波动性

价格是金融数学领域出现频率非常高的词, 最典型的价格是利率和汇率。在全球化背景下, 利率和汇率相辅相成, 是所有金融资产定价研究的出发点。本节通过瓦尔拉斯一般均衡系统阐述价格 (利率、汇率) 形成及其变动问题。

### 一、假设

亨德森、匡特 (1988) 假定存在这样一个世界市场:

(1) 若干种货币都可引入一般均衡经济系统, 但得到公认的是美元, 即美元充当一般等价物, 作为价值标准, 所有价格都可以用它的单位数来表示;

(2) 存在  $m$  种商品;

(3) 所有的企业和个人作为交换者, 都可以用美元去换取  $m$  种商品;

(4) 交换者会积蓄美元也可以赠予, 因为美元的价值在于可以用它来进行交换;

(5) 在上述市场, 交换者进行着交换, 但交换是有条件的, 该条件由交换比率来描述。求解这些交换行为, 可以得到相对于任意选定的物品的  $(m-1)$  种交换比率, 这个物品通常称作货币兑换率标准。

### 二、交换模拟

#### 1. 交换比率确定

对于  $m$  种物品, 如果一次取两种物品, 则会存在  $m^2$  种交换比率:  $p_j/p_k (j, k = 1, \dots,$

$m$ )。这些  $m$  都是单位元, 它表明一种物品对于自身的交换比率等于 1: 对于  $j=k$ , 则有  $p_j/p_k=1$ 。 $m^2$  种交换比率不是独立的。考虑单位元和  $Q_1$  作为货币兑换率标准的  $(m-1)$  种交换比率。其他  $m(m-1)$  种交换比率和单位元可从这些交换比率和单位元中推导出来:

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{p_j}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_k}, \quad (j, k = 1, \dots, m) \quad (1-1)$$

设  $Q_1$  是梨、 $Q_2$  是橘子、 $Q_3$  是苹果, 并且 2 个橘子交换 1 个梨 ( $p_2/p_1=1/2$ ), 而 1 个苹果则交换 2 个梨 ( $p_3/p_1=2$ )。运用式 (1-1) 可知, 4 个橘子交换 1 个苹果 ( $p_2/p_3=1/4$ )。交换比率的完全集合由  $(m-1)$  种交换比率和货币兑换率单位元直接或间接给定。

## 2. 价值标准确定

货币兑换率标准可从  $Q_1$  至  $Q_k$  替变, 只要把对  $Q_1$  的交换比率和单位元除以  $p_k/p_1$  即可:

$$\frac{1}{p_k/p_1} \left( 1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_k}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1} \right) = \left( \frac{p_1}{p_k}, \frac{p_2}{p_k}, \dots, 1, \dots, \frac{p_m}{p_k} \right) \quad (1-2)$$

交换比率不受这种变换的影响, 即货币兑换率的标准选定是随意的。

货币兑换率标准也可用作价值标准。令其价格一律等于 1, 交换比率变为  $p_j/p_1=p_j$ 。均衡交换比率不受这种变换影响。每种物品元首价格被表达成货币兑换率的单位数, 也就是为了取得 1 单位物品必须交换掉的货币兑换率标准物品数量。橘子的价格变成每个橘子交换 0.5 个梨, 苹果的价格则变成每个苹果交换 2 个梨。苹果价格为橘子价格的 4 倍大, 在均衡状态 1 个苹果仍可交换 4 个梨。从货币兑换率标准单位被当作价值标准这一意义上说, 它已变成货币。然而, 它不能当作价值储藏品, 因为它和其他物品一样, 在相同基础上成为一种生产要素或可消费商品。在这一意义上, 任何物品都可当作价值标准。

价格用梨表示并不是通常做法。价格一般表示成像美元这样的货币单位, 作为记账货币导入一般均衡系统框架。令货币兑换率标准 (或任何其他物品) 价格等于一定货币单位数, 可以导入可记账货币, 进而推导出所有其他物品的货币价格。如果  $Q_1$  是货币兑换率标准、 $p_1$  被设定为  $\beta$  美元, 则  $Q_k$  美元价格  $\rho_k$  为:

$$\rho_k = \beta \frac{p_k}{p_1}, \quad k=2, \dots, m \quad (1-3)$$

如果一个梨的价格设定为 2 美元, 则一个橘子的价格为 1 美元, 而一个苹果的价格为 4 美元。在上述情形下, 货币只当作抽象的计量单位, 在实物意义上它是不存在的。

物品仍然交换物品。没有人持有货币，也没有人想持有货币。可记账的货币只当作价值标准，但并不当作一种收藏品。

如果价格表示为某一非美元货币——英镑，就形成了美元与某一非美元货币的交换率，引出了购买力平价说（PPP），反映了不同货币购买商品的能力。假设一个梨的价格设定为 1.5 英镑，那么就形成了美元和英镑之间的交换比率：1 美元 = 0.75 英镑。当梨以美元和英镑表示的价格发生变动，那么美元和英镑之间的交换比率也就相应发生变化，即反映了汇率适应价格变化的调整。如果继续引入其他货币，就会形成一系列汇率。

当任一国家对任何别一国家的汇率等于这两个国家对任何第三国汇率之比时，就实现了国际贸易汇率水平一般均衡：

$$E_{3,2} = \frac{E_{3,1}}{E_{2,1}} \quad (1-4)$$

如果  $E_{3,2} = \frac{E_{3,1}}{E_{2,1}}$  受到干扰，即汇率水平平衡受到破坏，平衡如何恢复呢？即苹果和苹果的交换比率将发生变动。同时，通过资金流动实现均衡的恢复，即利率平价理论。引入汇率后，两个国家的商品不同质必然导致交换比率发生变化。

### 三、价格波动

价格波动是风险的来源，被定义为未来价格偏离期望值的可能性。这种波动性可用统计学的度量加以量化，最为常用的指标是方差、标准差、协方差和组合方差。价格风险定义还提出了另一种思路：既然价格风险代表了实际价格偏离期望值的可能性，我们可以尽力改善期望值的准确性。

在实际研究工作中，价格方差存在着一个严重问题，即原始价格时间序列通常是不平稳的，随着价格水平的变动，其均值和方差也在发生变动。最简单的修正方法是把价格变动序列转变为收益率时间序列，即将前后两期价格做差并除以前一期价格得到当期收益率。这样做的好处是可以将不同性质的价格序列直接比较，收益率序列更加平稳，偏离稳定状态更为弱化。

如果假定收益率本身服从正态分布，依据中心极限定理，采取随机抽样办法得到的收益率均值服从正态分布，进而可以借助概率分布开展与收益率相关的统计研究，如 CAPM 模型所研究的风险和收益率之间的关系。

### → 第三节 利息及利率

对于某一投资项目而言，利息是刻画投资项目成本和收益的最基本概念。从利息度量角度看，利息是指在一定时期内某一投资项目期末总金额和期初投入金额之间的差额。利息概念还可以从债券债务关系角度理解，利息是债务人为取得资金使用权而支付给债权人的报酬。

利率是收入和资本之间的桥梁或联系。利率是对某一日期货币所支付贴水的百分率，这一贴水以一年后货币表示。现在和将来之间交换的只是货币，因此利率又称为货币的价格（欧文·费雪，2016）。基于借贷业务视角，利率是借款人因获得资金使用权而向贷款者所支付的代价，亦是贷款人放弃其资金使用权、推迟消费，借给借款人所获得的回报。利率通常以一年期所获利息与本金的百分比计算。一般来说，利率根据计量期限标准不同，表示方法有年利率、月利率、日利率。

**例 1.1** 今天的 100 元与一年后的收入 140 元相交换，求贴水或货币价格？

解：

贴水等于 40 元，利率 = 40 元 / 100 元 = 40%，货币价格为 40%。

### → 第四节 贴现

利率使用有两个方面：一是由现在价值计算未来价值；二是由未来价值计算现在价值。基于投资决策视角，后一使用为重要。每位投资者对他所愿意做出的投入，必须知道：（1）关于这一投资活动所将提供的未来利益的价值；（2）将未来价值贴现为现在价值所依据的利率——贴现率，利率的选择主要依据对未来风险的判断，未来收益风险较大，贴现率较高；未来收益风险较小，贴现率较低。

### → 第五节 资本价值

资本就资本价值的意义来讲，只不过是将来收入的折现，或者说将来收入的资本化。任何财产（包括现金、债券、股票和黄金等各种形式）价值或财富权利价值，是它作为收入源泉的价值，是由这一期预期收入贴现来求得的。无论财产用什么方法来分配

和代表，全部财产只不过是达到一个目的——收入的手段而已。收入是经济学的起点和终点。资本价值产生的原因有以下三点：第一，资本价值反映了资源稀缺性问题。社会资源既能用于生产现时物质产品，也能用于生产未来物质产品。一般而言，未来物质产品的效用低于现时物质产品的效用。在货币经济条件下，货币是商品的价值体现，现时货币用于支配现在的商品，将来货币用于支配将来的商品，所以现时货币的价值自然高于未来货币的价值，人们放弃现在的货币及其价值，必须付出一定代价，利息便是这一代价。第二，受货币贬值、通货膨胀因素影响，现时货币在价值上也总是高于未来货币。第三，货币时间价值反映了人们的认知心理。人的认识是有局限性的，一般而言，人们对现时事物的感知能力强，对未来事物的认识则相对较差，现时货币能够满足人们现实支出需要，未来货币只能支配未来不确定性商品，所以现时单位货币的价值要高于未来单位货币的价值，为使人们放弃现时货币及其价值，必须付出一定代价，利息便是这一代价（欧文·费雪，2016）。

具体而言，资本价值取决于以下三个因素：（1）预期未来现金收入。预期未来现金收入一般由主观而定，具有不可验证性。（2）贴现率，即资金机会成本。（3）期限。期限越长，未来收入的不确定性就越大。

## 第六节 效用

在风险和不确定条件下，人们以某种方式进行决策，是为了获得最大期望效用值。效用通过规范的数学定义，人们的偏好可以用效用函数表示。效用函数包括两个基本性质：（1）边际效用递减的数学含义是效用函数的一阶导数大于零、效用函数的二阶导数小于零；金融含义是每增加一元财富都会增加总效用，但其总效用增加量会小于前一元带来的总效用增加量。（2）最大效用原理指获得最大期望效用值，而非最大期望金额值。

在现代金融学理论框架下，效用、收益、现值和风险密不可分。

效用和收益的关系包括两个方面：一是正相关，收益越多，财富相应越多，更多的财富意味着更多的消费，而更多的消费带来更多的效用；二是为了赚得更多的收益，要付出一定代价，推迟消费。第二个方面引出了现值概念，即一笔财富未来消费所产生的效用值与等量财富即刻消费所带来的效用值的大小比较问题。

一般而言，基于效用函数  $U = \ln(W_{\text{财富}})$ ，未来 100 元的现值小于现在 100 元的现值；对应着效用，未来 100 元的现值带来的效用小于现在 100 元带来的效用。

进而可以讨论以下问题：个人在投资期间要获得多少增加的财富，才能使最终财富

带来的效用现值等于初始财富带来的效用现值呢？该问题的答案因人而异，因为每个人的效用函数不同，有助于解释不同人为何对未来现金流采用不同贴现率，进而解释了有人将可支配收入的很大一部分用于储蓄而另一些人很少储蓄的现象。

效用函数的另一个特性就是假定理性人均为风险规避者，即风险增加、效用降低。

效用、收益、现值和风险四者之间的关系有助于解释证券投资组合问题。



## 第二章

# 利息基本度量方法

本章主要介绍计算利息基本函数及计算过程所涉及的基本处理方法。

### 第一节 本金、积累值

日常生活或相关金融业务涉及借钱问题，如大学生学费贷款、购房抵押借款等。对应于借钱，某人有闲置资金，可以将闲置资金用于储蓄、购买债券，资金借出方都会收到一笔对应于借款的相应回报，也可以认为是让渡资金使用权的租金。具体而言，原始贷款或投资额度指期初投入金额或本金，又称为期初值。原始贷款加上利息或投资到期值是指期末总金额，又称为终值。

假设期初 0 时刻和期末  $t$  时刻之间没有资金投入和撤出，积累函数  $a(t)$  为本金 1 在  $t$  时刻的积累值，有时被称为  $t$  期积累因子。 $a(t)$  为金融数学基础公式，其他函数均以其为基础推导而来。积累函数的性质有以下三点：(1)  $a(t) = 1$ 。(2)  $a(t)$  是递增函数，其值随时间不断增长。(3)  $a(t)$  为连续函数，这种情况较为常见，即连续计息；反之， $a(t)$  为非连续函数。

总量函数和积累函数的关系为：

$$A(0) = k, \quad A(t) = ka(t) \quad (2-1)$$

以  $I$  表示期初 0 时刻和期末  $t$  时刻期间产生的利息，即：

$$\begin{aligned} I &= A(t) - A(0) \\ I_n &= A(n) - A(n-1) = P \times a(n) - P \times a(n-1) \\ &= P \times [a(n) - a(n-1)], \quad \text{对整数 } n \geq 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

$n$  个时期上总的利息金额为：

$$\begin{aligned} I &= A(n) - A(0) = P \times a(n) - P \times a(0) \\ &= P \times [a(n) - 1] = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \end{aligned} \quad (2-3)$$

## → 第二节 实质利率

两笔储蓄业务，期初分别存入1万元、1000元，一年到期，均得到利息2000元，合理吗？5万元存10年赚1.5万元利息，存1年赚2000元利息，无法直接比较，如何处理？将利息转化为下述利率概念，就可以进行比较。

利率由两个要素——单位时间和单位资本决定。即某一度量期 $(n-1, n)$ 上的实质利率（一个度量期的时间区间长度设为1），是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资本金金额之比。需要注意的是，时间长度通常表示为1年，但也有非1年的情况，因此，在给出利率定义时，同时陈述具体时间单位。实质利率用字母 $i$ 来表示，利息在期末支付。实质利率用总量函数和积累函数表达如下：

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2-4)$$

$i_n$ 为从投资日算起第 $n$ 个时期的实质利率，也可以表示为：

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2-5)$$

另外，本书第二章至第五章假定利率不受相同金融产品利率、资金投向和通货膨胀等因素影响，在相应时间内保持为常数。

**例 2.1** 积累函数为 $a(t) = 0.06t^2 + 2$ ，并且 $a(0) = 2$ ，计算 $i_1$ 。

解：

$$i_1 = [a(1) - a(0)]/a(0) = (0.06 + 2 - 2)/1 = 0.06$$

**例 2.2** 积累函数为 $a(t) = 0.06t^2 + 2$ ，期初0时刻投资100元，经过三个度量期投资，该投资项目将会获得多少利息？

$$\text{解：} I = 100[a(3) - a(0)] = 100[(0.06)3^2 + 2 - 2] = 54 \text{ (元)}$$

**例 2.3** 某人存1000元进银行，第1年末存款余额为1030元，第2年末存款余额为1040元，求 $i_1$ 、 $i_2$ 、 $d_1$ 、 $d_2$ 等于多少？

解：

$$\therefore A(0) = 1000, A(1) = 1030, A(2) = 1040$$

$$\therefore I_1 = A(1) - A(0) = 30, I_2 = A(2) - A(1) = 10$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{I_1}{A(0)} = \frac{30}{1000} = 3\%, d_1 = \frac{I_1}{A(1)} = \frac{30}{1030} = 2.91\%$$