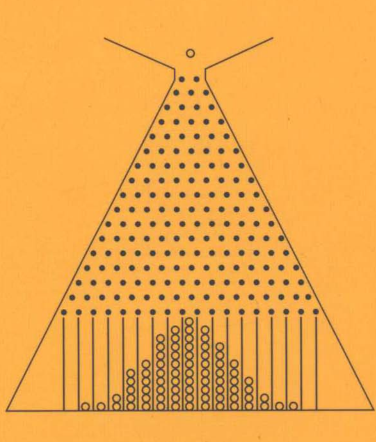
普通高等教育“十三五”规划教材

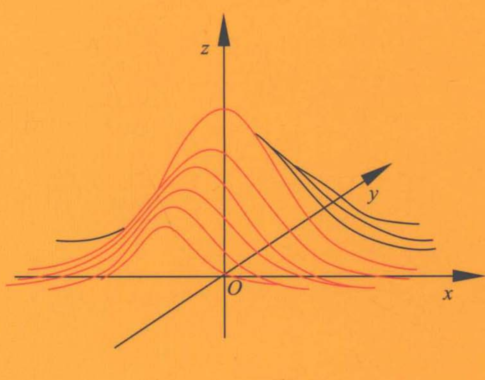
大学数学基础丛书

丛书主编　袁学刚　周文书　刘　满

概率论与数理统计

齐淑华　刘　强　主　编
丁淑妍　李　阳　副主编





清华大学出版社

| 大学数学基础丛书 |

概率论与数理统计

齐淑华　刘　强　主　编
丁淑妍　李　阳　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书系统地论述了概率论与数理统计的概念、方法、理论及其应用，是一本为高等院校非数学专业本科生学习而编写的教材或教学参考书。全书共分9章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。本书注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养，每节后配有练习题，每章配有总复习题，并在书后附有习题答案，便于教师教学和学生自学。

本书可作为高等学校工科、理科（非数学类专业）、农医、经济、管理等专业的概率论与数理统计课程的教材，亦可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/齐淑华，刘强主编．—北京：清华大学出版社，2019
（大学数学基础丛书）
ISBN 978-7-302-52624-7

Ⅰ．①概… Ⅱ．①齐… ②刘… Ⅲ．①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第047083号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：14.75 字 数：355千字
版 次：2019年3月第1版 印 次：2019年3月第1次印刷
定 价：36.00元

产品编号：082397-01

前言

FOREWORD

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的一门学科。它的应用十分广泛，在自然科学、工程技术、农业生产等领域有着广泛的应用。随着计算机的发展，概率论与数理统计在经济、医学、金融、保险等领域也有着越来越广泛的应用，正因如此，概率论与数理统计课程也成为各专业大学生最重要的数学必修课之一。它对培养和提高学生的数学思维能力、创新精神以及量化分析问题的能力有非常重要的作用。为此我们努力将概率论与数理统计的思想融入到各个部分当中，力求做到科学性与通俗性的结合，并有意识地提高学生的数学能力。

本书是我们在总结多年教学实践经验基础上编写而成的，本书具有以下特色：

1. 在注意保持数学学科本身的科学性、系统性、严谨性的同时，力求做到由浅入深、深入浅出、通俗易懂、重点突出、简单扼要，既便于教师教学，又便于学生自学。

2. 在每一节都有课后习题，其中包括基础题和提高题，每一章最后还有总复习题，以供不同层次的学生选用。本书在例题和习题的选取上，力求做到典型性、应用性和现代性，以期注重学生学习兴趣的培养，达到提高综合运用数学知识能力的目的。

3. 在重点的数学概念后附有英文，可以使学生在学习这门课的过程中，逐渐学会英文词汇，这对学生查阅概率论与数理统计外文资料有很大的好处。

4. 在有些章节，大胆地改变了传统的书写顺序，改变后的顺序对老师的教学和学生系统的学习大有益处。

5. 书中提高题部分，有些题目是全国硕士研究生入学考试概率论与数理统计试题，通过真题，可使读者深入地了解考研的要求、题型及重要的考点，开阔学生的视野。

在撰写《概率论与数理统计》过程中，为了便于读者理解和掌握，我们力求将概念叙述得清晰易懂，同时还注意了例子的多样性，所举例子涉及工业、农业、工程技术、保险、医学、经济等多个领域，以使读者在理解基本概念、掌握基本方法的同时，体会到概率统计应用的广泛性。

本书可作为高等学校工科、理科（非数学类专业）本科生概率论与

数理统计课程的教材，也可作为经济、管理类有关专业本科生概率论与数理统计课程的教材。本书中带有“*”的部分可供对概率论与数理统计知识有较高要求专业的学生选用。

学习《概率论与数理统计》内容只需微积分和线性代数的相关知识，全书共9章，包括两部分内容，前5章是概率论部分，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；后4章是数理统计部分，包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。

讲授本教材的全部内容建议用64学时，如果讲前8章，建议用48学时，如果讲前5章，建议用32学时。

本教材是大学数学基础丛书系列教材之一，由大连民族大学理学院组织编写，主编齐淑华、刘强，副主编丁淑妍、李阳，参加编写的还有王金芝、周庆健、刘力军、刘恒、刘红梅、谢丛波、董莹、楚振艳、董丽、张誉铎、曲程远、余军、唐玲丽、李秀文、何晓、邹燕清、李娇、殷亮、臧林，理学院领导和同事对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，在此表示感谢。

由于作者水平有限，难免有不当之处或错误，敬请同行和广大读者指正。

编 者

2018年11月

目录

CONTENTS

第1章 随机事件及其概率 …… 1
1.1 随机事件及其运算 …… 1
1.1.1 随机现象 …… 1
1.1.2 样本空间 …… 2
1.1.3 随机事件 …… 2
1.1.4 事件间的关系与运算 …… 3
1.1.5 排列与组合 …… 5
习题 1.1 …… 6
1.2 概率的定义及其性质 …… 7
1.2.1 事件的频率 …… 7
1.2.2 概率的定义 …… 8
习题 1.2 …… 9
1.3 古典概型和几何概型 …… 10
1.3.1 古典概型 …… 10
1.3.2 几何概型 …… 14
习题 1.3 …… 15
1.4 条件概率与全概率公式 …… 16
1.4.1 条件概率 …… 16
1.4.2 乘法公式 …… 17
1.4.3 全概率公式 …… 18
1.4.4 贝叶斯公式 …… 19
习题 1.4 …… 20
1.5 独立性 …… 21
1.5.1 两个事件的独立性 …… 21
1.5.2 多个事件的独立性 …… 22
习题 1.5 …… 24
总复习题 1 …… 25
第2章 随机变量及其分布 …… 27
2.1 随机变量的定义及其分布函数 …… 27

2.1.1 随机变量的定义 …… 27
2.1.2 随机变量的分布函数 …… 28
习题 2.1 …… 29
2.2 离散型随机变量及其分布 …… 30
2.2.1 离散型随机变量及其分布律 …… 30
2.2.2 几种常见的离散型随机变量 …… 32
习题 2.2 …… 35
2.3 连续型随机变量及其分布 …… 37
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度函数 …… 37
2.3.2 几种常见的连续型随机变量 …… 38
习题 2.3 …… 43
2.4 随机变量函数的分布 …… 44
2.4.1 离散型随机变量函数的分布 …… 45
2.4.2 连续型随机变量函数的分布 …… 46
习题 2.4 …… 48
总复习题 2 …… 49

第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 51

3.1 多维随机变量及其分布函数 …… 51
3.1.1 二维随机变量 …… 51
3.1.2 二维随机变量的联合分布函数 …… 51
3.1.3 二维随机变量的边缘分布函数 …… 52
3.1.4 n 维随机变量的联合分布函数 …… 53
习题 3.1 …… 53
3.2 二维离散型随机变量 …… 54
3.2.1 二维离散型随机变量的联合分布律 …… 54
3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律 …… 55
3.2.3 二维离散型随机变量的条件分布 …… 57
3.2.4 二维离散型随机变量的相互独立性 …… 58
习题 3.2 …… 59
3.3 二维连续型随机变量 …… 61
3.3.1 二维连续型随机变量的概率密度函数 …… 61
3.3.2 两个常用二维连续型随机变量的概率密度函数 …… 62
3.3.3 二维连续型随机变量的边缘概率密度函数 …… 62
*3.3.4 二维连续型随机变量的条件分布 …… 64
3.3.5 二维连续型随机变量的独立性 …… 65
习题 3.3 …… 66
3.4 两个随机变量函数的分布 …… 68
3.4.1 二维离散型随机变量的函数的分布 …… 68

3.4.2 二维连续型随机变量的函数的分布 …… 69
习题 3.4 …… 71
总复习题 3 …… 72

第 4 章 随机变量的数字特征 …… 74

4.1 随机变量的数学期望 …… 74
4.1.1 离散型随机变量的数学期望 …… 74
4.1.2 连续型随机变量的数学期望 …… 76
习题 4.1 …… 78
4.2 随机变量函数的数学期望与数学期望的性质 …… 79
4.2.1 随机变量函数的数学期望 …… 79
4.2.2 数学期望的性质 …… 80
习题 4.2 …… 82
4.3 方差 …… 83
4.3.1 方差的定义 …… 83
4.3.2 常用分布的方差 …… 85
4.3.3 方差的性质 …… 86
习题 4.3 …… 87
4.4 协方差、相关系数与矩 …… 88
4.4.1 协方差与相关系数 …… 88
*4.4.2 矩与协方差矩阵 …… 92
习题 4.4 …… 93
总复习题 4 …… 94

第 5 章 大数定律与中心极限定理 …… 97

5.1 大数定律 …… 97
5.1.1 切比雪夫不等式 …… 97
5.1.2 大数定律 …… 98
习题 5.1 …… 100
5.2 中心极限定理 …… 101
习题 5.2 …… 103
总复习题 5 …… 104

第 6 章 数理统计的基础知识 …… 107

6.1 总体、样本及统计量 …… 107
6.1.1 总体和样本 …… 107
6.1.2 统计量 …… 108
6.1.3 常用的统计量 …… 108
习题 6.1 …… 109

6.2 常用分布与分位点 …… 110
6.2.1 常用分布 …… 110
6.2.2 四种常见分布的上 α 分位点 …… 113
习题 6.2 …… 115
6.3 正态总体的抽样分布 …… 116
习题 6.3 …… 118
总复习题 6 …… 118

第 7 章 参数估计 …… 120

7.1 点估计 …… 120
7.1.1 矩法估计 …… 120
7.1.2 最大似然估计 …… 122
习题 7.1 …… 125
7.2 估计量的评选标准 …… 126
7.2.1 无偏性 …… 126
7.2.2 有效性 …… 127
7.2.3 一致(相合)性 …… 128
习题 7.2 …… 129
7.3 区间估计 …… 129
7.3.1 单个正态总体参数的区间估计 …… 130
7.3.2 两个正态总体参数的区间估计 …… 132
7.3.3 单侧置信区间 …… 134
习题 7.3 …… 136
总复习题 7 …… 137

第 8 章 假设检验 …… 140

8.1 假设检验的基本概念 …… 140
8.1.1 问题的提出 …… 140
8.1.2 假设检验的基本思想 …… 141
8.1.3 两类错误 …… 141
8.1.4 假设检验的基本步骤 …… 142
8.1.5 双侧检验与单侧检验 …… 142
习题 8.1 …… 142
8.2 单个正态总体参数的假设检验 …… 143
8.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验 …… 143
8.2.2 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验 …… 146
习题 8.2 …… 147

8.3 两个正态总体参数的假设检验 …… 149
8.3.1 关于两个正态总体均值的检验 …… 149
8.3.2 关于两个正态总体方差的检验 …… 152
习题 8.3 …… 154
总复习题 8 …… 156

第 9 章 方差分析与回归分析 …… 158

9.1 单因素方差分析 …… 158
9.1.1 问题的提出 …… 159
9.1.2 单因素方差分析模型 …… 159
9.1.3 平方和的分解 …… 160
9.1.4 F 检验 …… 161
习题 9.1 …… 164
9.2 双因素方差分析 …… 166
9.2.1 无重复试验的双因素方差分析 …… 166
9.2.2 等重复试验的双因素方差分析 …… 169
习题 9.2 …… 173
9.3 一元线性回归 …… 174
9.3.1 引例 …… 175
9.3.2 一元线性回归模型 …… 175
9.3.3 参数 a,b 的最小二乘估计 …… 176
9.3.4 回归方程的显著性检验 …… 177
习题 9.3 …… 180
*9.4 非线性回归的线性化处理 …… 181
9.4.1 几种常见的曲线及其变换 …… 181
9.4.2 非线性回归分析实例 …… 183
习题 9.4 …… 183
*9.5 多元线性回归简介 …… 184
9.5.1 多元线性回归模型 …… 184
9.5.2 参数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 的最小二乘估计 …… 184
9.5.3 线性回归的显著性检验 …… 185
习题 9.5 …… 187
总复习题 9 …… 188

附录 概率论与数理统计附表 …… 190

附表 1 泊松分布表 …… 190
附表 2 标准正态分布表 …… 192

附表 3 χ^2 分布表 …… 194
附表 4 t 分布表 …… 196
附表 5 F 分布表 …… 198

习题答案 …… 206

参考文献 …… 223

第1章 随机事件及其概率

CHAPTER 1

本章介绍概率论与数理统计中用到的基本概念及随机事件的关系与运算，重点论述概率的定义、古典概率的求法、条件概率和乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式以及事件的相互独立性。

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

概率论与数理统计研究的对象是随机现象。客观世界中，人们观察到的现象，大体上存在着两种现象，一种是在一定条件下必然发生的现象，称为**确定性现象**或**必然现象**。例如，在一个标准大气压下，水在100℃时一定沸腾；两个同性的电荷一定互斥。另一种称为**随机现象**(random phenomenon)，它是指在进行个别试验或观察时其结果具有不确定性，但在大量的重复试验中其结果又具有统计规律性的现象。例如，向上抛一枚质地均匀的硬币，硬币落地的结果可能正面朝上，也可能反面朝上；掷一枚质地均匀的骰子，可能出现1点到6点中的任一点。在随机现象中，虽然在一次观察中，不知道哪一种结果会出现，但在大量重复观察中，其每种可能结果却呈现出某种规律性。例如，在多次抛一枚硬币时，正面朝上的次数大致占总次数的一半；掷一枚质地均匀的骰子，出现1点到6点中的任何一点的可能性为$\frac{1}{6}$。这种在大量重复观察中所呈现出的固有规律性，就是我们所说的统计规律性。概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

把对某种随机现象的一次观察、观测或测量等称为一个**试验**。

下面看几个试验的例子：

(1) 将一枚硬币抛三次，观察正面H、反面T出现的情况；

(2) 掷一枚骰子，观察出现的点数；

(3) 观察某城市某个月内交通事故发生的次数；

(4) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命；

(5) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命是否小于200h。

上述试验具有以下特点：(1)在相同的条件下试验可以重复进行；

(2)每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验前可以明确试验的所有可能结果；(3)在每次试验前，不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果。称这样的试验为**随机试验**(random experiment)，简称**试验**，记为 E。

注 本书以后所提到的试验均指随机试验。

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知其试验结果，但试验的所有可能结果是已知的，称试验所有可能结果组成的集合为**样本空间**(sample space)，记为 $\Omega=\{\omega\}$。其中试验结果 ω 为样本空间的元素，称之为**样本点**(sample point)。

设 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$ 分别表示上述试验(1)～试验(5)，以 Ω_i 表示试验 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的样本空间，则

(1) $\Omega_1=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\}$；

(2) $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(3) $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

(4) $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

(5) $\Omega_5=\{$寿命小于 200h，寿命不小于 200h$\}$。

注 虽然随机试验(4)和试验(5)都观察某只灯泡的使用寿命，但试验目的不同，所以对应的样本空间也不同。

1.1.3 随机事件

一般地，我们称试验 E 的样本空间 Ω 的任意一个子集为**随机事件**(random event)，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。

做试验 E 时，若试验结果属于 A，则称**事件 A 发生**；否则为**事件 A 不发生**。

如果事件中只包含一个样本点，则称该事件为**基本事件**(elementary event)。

【例 1】 掷一枚骰子，随机试验的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。指出下述集合表示什么事件？并指出哪些是基本事件。

事件 $A_1=\{1\},A_2=\{2\}$；事件 $B=\{2,4,6\}$；事件 $C=\{1,3,5\}$；事件 $D=\{4,5,6\}$。

解 事件 $A_1=\{1\},A_2=\{2\}$——分别表示“出现 1 点”，“出现 2 点”，都是基本事件；

事件 $B=\{2,4,6\}$——表示“出现偶数点”，非基本事件；

事件 $C=\{1,3,5\}$——表示“出现奇数点”，非基本事件；

事件 $D=\{4,5,6\}$——表示“出现点数不小于 4 点”，非基本事件。

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且其也是自身的一个子集，故在每次试验中 Ω 一定发生，因此，称 Ω 为**必然事件**(certain event)。

例如，掷一枚骰子，事件“出现的点数小于 7”是必然事件。

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，但它也是样本空间 Ω 的一个子集，由于它在每次试验中肯定不发生，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**(impossible event)。

例如，掷一枚骰子，事件“出现 7 点”是不可能事件。

1.1.4 事件间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然可按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理。

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集。

1. 事件间的关系

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生，必有事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**（如图 1-1(a)所示），记作 $A\subset B$。特别地，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，记作 $A=B$。

例如，掷一枚骰子，事件 A=“出现 4 点”，B=“出现偶数点”，则 $A\subset B$；掷两枚骰子，事件 A=“两颗骰子的点数之和为奇数”，B=“两颗骰子的点数为一奇一偶”，则 $A=B$。

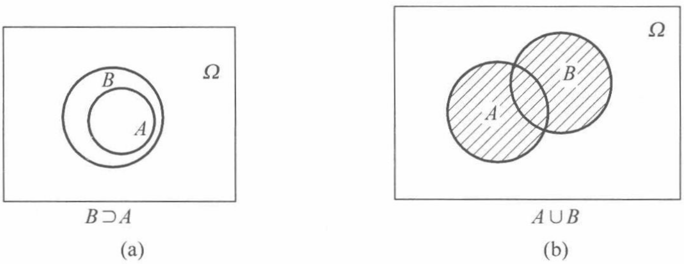


图 1-1

(2) 事件的和

事件 A 或 B 至少有一个发生，称为**事件 A 与事件 B 的和事件**(union of events)（如图 1-1(b)所示），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

例如，掷一枚骰子，事件 A=“出现的点数小于 3 点”，B=“出现奇数点”，则

$$A\cup B=\{1,2,3,5\}。$$

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，含义就是事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生。

(3) 事件的积

事件 A 与 B 同时发生，称为**事件 A 与事件 B 的交事件**(intersection of events)（如图 1-2(a)所示），也称事件 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$ 或 AB。

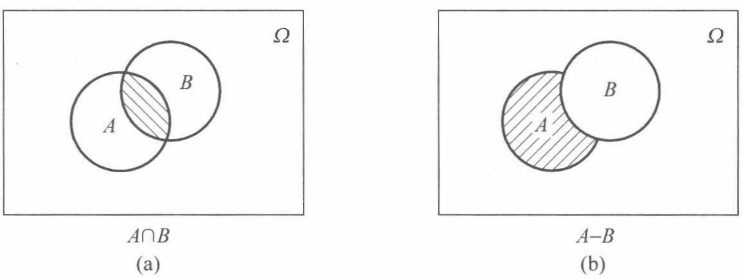


图 1-2

例如，掷一枚骰子，事件 A="出现的点数小于 5 点"，B="出现偶数点"，则 $A\cap B=\{2,4\}$。

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生。

(4) 事件的差

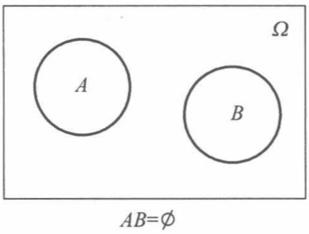
事件 A 发生而 B 不发生，称为**事件 A 与事件 B 的差事件**(如图 1-2(b)所示)，记作 $A-B$。

例如，掷一枚骰子，事件 A="出现的点数小于 4"，B="出现奇数点"，则 $A-B=\{2\}$。

(5) 互不相容事件

当 $AB=\varnothing$ 时，称事件 A 与事件 B 为**互斥事件**(mutually exclusive events)(或**互不相容事件**)(如图 1-3(a)所示)，简称 A 与 B 互斥，也就是说事件 A 与事件 B 不能同时发生。

例如，在电视机寿命试验中，"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生。



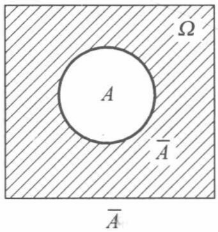


图 1-3

(6) 对立事件

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或互为**逆事件**(complementary event)(如图 1-3(b))，A 的对立事件记作 $\bar{A}$，则 $\bar{A}=B$。

例如，掷一枚骰子，事件 A="出现奇数点"，B="出现偶数点"，则 A 与 B 互为对立事件。

注 由事件的关系可得 $A-B=A\bar{B}$。

2. 事件的运算

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$。

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

(4) 德摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

注 由分配律我们还可推出如下常用的运算：$A=A(B\cup\bar{B})=AB\cup A\bar{B}$。

【例 2】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$)，试表示：

(1)三次都取到合格品；(2)三次中至少有一次取到合格品；(3)三次中恰有两次取到合格品；(4)三次中都没取到合格品；(5)三次中最多有一次取到合格品。

解 (1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ 或 $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；

(4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$或$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$；

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$或$\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}$。

1.1.5 排列与组合

在接下来的古典概率中要用到排列组合的知识，因此在这里我们简要介绍一下排列组合。

排列与组合公式的推导都基于如下两条原理。

1. 乘法原理

如果某件事需经 k 个步骤才能完成，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 k 步有 m_k 种方法，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_k$ 种方法。

譬如，甲城到乙城有三条旅游线路，由乙城到丙城有两条旅游线路，那么从甲城经乙城去丙城共有 $3\times2=6$ 条旅游线路。

2. 加法原理

如果某件事可由 k 类不同途径之一去完成，在第一类途径中有 m_1 种完成方法，在第二类途径中有 m_2 种完成方法，……，在第 k 类途径中有 m_k 种完成方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法。

譬如，由甲城到乙城去旅游有三类交通工具：汽车、火车和飞机，而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 $5+3+2=10$ 个班次供旅游者选择。

排列与组合都是计算“从 n 各元素中任取 r 个元素”的取法总数公式，其主要区别在于：如果不讲究取出元素间的次序，则用组合公式，否则用排列公式。而所谓讲究元素间的次序，可以从实际问题中得以辨别，例如两个人相互握手是不讲次序的；而两个人排队是讲次序的，因为“甲右乙左”与“乙右甲左”是两件事。

3. 排列

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素出来（要考虑元素出现的先后次序），称此为一个排列，这种排列的总数记为 P_n^m。

由乘法原理，取出第一个元素有 n 种取法，取出第二个元素有 $n-1$ 种取法，……，取出第 m 个元素有 $n-m+1$ 种取法，故 $\mathrm{P}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

若 $m=n$，则称为全排列，记为 P_n^n，显然 $\mathrm{P}_n^n=n!$。

4. 组合

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组（不考虑元素出现的先后次序），称此为一个组合，这种组合的总数记为 $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$ 或 C_n^m。

按照乘法原理，$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{P}_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$。这里规定 $0!=1$。

习题 1.1

基础题

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 掷两枚骰子，观察出现的点数；

(2) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止，正面用“1”表示，反面用“0”表示；

(3) 一超市在正常营业的情况下，某一天内接待顾客的人数；

(4) 某城市一天内的用电量。

2. 同时掷两枚骰子，设事件 A 表示“两枚骰子出现点数之和为奇数”，B 表示“点数之差为零”，C 表示“点数之积不超过 20”，用样本点的集合表示事件 $B-A$，BC，$B+\bar{C}$。

3. 设 A,B,C 为三事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；　(2) A 与 B 发生，C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；　(4) A,B,C 都不发生；

(5) A,B,C 不都发生；　(6) A,B,C 中至少有一个发生；

(7) A,B,C 中不多于一个发生；　(8) A,B,C 中至少有两个发生。

4. 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立：

(1) $A\cup B=A\bar{B}\cup B$；　(2) $\bar{A}B=A\cup B$；

(3) $(AB)(A\bar{B})=\varnothing$；　(4) 若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$；　(6) 若 $A\subset B$，则 $AB=A$；

(7) 若 $A\subset B$，则 $\bar{B}\subset\bar{A}$；　(8) $(\overline{A\cup B})C=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

5. 设 A,B 是两个事件，那么事件“A,B 都发生”，“A,B 不都发生”，“A,B 都不发生”中，哪两个是对立事件？

6. 从数字 $1,2,\cdots,9$ 中可重复地任取 n 次（$n\geqslant 2$）。以 A 表示“所取的 n 个数字中没有 5”，B 表示“所取的 n 个数字中没有偶数”，问事件“所取的 n 个数字的乘积能被 10 整除”如何用 A,B 表示？

提高题

1. 设事件 A 与 B 满足条件 $AB=\bar{A}\bar{B}$，则下面结论正确的是（　　）。

A. $A\cup B=\varnothing$　B. $A\cup B=\Omega$　C. $A\cup B=A$　D. $A\cup B=B$

2. 设 A,B,C 是随机事件，满足 $AB\subset C$，则下面结论正确的是（　　）。

A. $\bar{A}\bar{B}\supset\bar{C}$　B. $A\subset C$ 且 $B\subset C$

C. $\bar{A}\cup\bar{B}\supset\bar{C}$　D. $A\subset C$ 或 $B\subset C$

3. 设 A,B 为随机事件，试证明下列等式：

(1) $A\cup B=A\bar{B}\cup B$；　(2) $(A-B)C=AC-BC$；

(3) $(A\cup B)-B=A-B=A-AB$；　(4) $(A\cup B)-AB=(A-B)\cup(B-A)$。