分数阶复杂网络同步

马维元　田双亮　汤玉荣　著

科学出版社

分数阶复杂网络同步

马维元　田双亮　汤玉荣　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了复杂网络、分数阶导数的概念和基本性质，探讨了一般分数阶复杂网络、两个不同分数阶复杂网络、分数阶模糊神经网络、带有外部扰动的分数阶时滞复杂网络的同步问题. 本书在选材时注重新颖性，反映了近年来分数阶复杂网络同步方面的部分最新研究成果，写作时体现了通俗性与简洁性，论述深入浅出.

本书可作为应用数学、信息与计算科学、软件工程等相关专业的高年级大学生或研究生的教科书或参考书，也适合从事分数阶复杂网络同步研究的科研人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶复杂网络同步/马维元，田双亮，汤玉荣著. —北京：科学出版社，2019.4

ISBN 978-7-03-061003-4

Ⅰ.①分…　Ⅱ.①马…　②田…　③汤…　Ⅲ.①计算数学-研究　Ⅳ.①O24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 067901 号

责任编辑：王胡权　李　萍／责任校对：杨聪敏
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 4 月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2019 年 4 月第一次印刷　印张：7 3/4
字数：157 000

定价：49.00 元

前　言

分数阶微积分与整数阶微积分几乎同时诞生. 早在 1695 年, Leibniz 写给 L'Hospital 的一封信中首次提到分数阶微分的概念. Leibniz 写道:“这会导致悖论, 不过总有一天会得到有用的结果.”早期对分数阶微积分有贡献的数学家包括 Liouville, Riemann 等. 后来的三个世纪, 分数阶微积分理论的研究主要在纯数学领域里进行, 然而最近几十年里, 许多学者指出分数阶微积分非常适合刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程, 在经典模型中这些性质往往是被忽略的. 如今, 分数阶微分方程已经被广泛用来描述光学和热学系统、流变学及材料和动力系统、信号处理和系统辨识、控制和机器人及其他领域中的问题.

网络在生活中无处不在. 复杂网络是一个包含了大量节点及节点之间相互作用的系统. 大量自然界中的自然系统和人类社会中的人造系统都可以通过形形色色的复杂网络加以刻画. 例如, 航空网络、电力网络、社会网络、生物网络、城市公交网络等. 因此, 复杂网络的研究具有非常重要的现实意义. 人们研究复杂网络的目标之一就是理解复杂网络上的动力行为, 预测复杂网络的变化趋势. 例如, 传染病在复杂网络上的传播, 如何提高传输信息包的效率, 大型电力网络的局部故障导致连锁性大停电事故等. 目前, 对复杂网络的动力学研究中, 复杂网络的同步问题是值得关注的一种动力学现象, 也是当前复杂网络研究的热点问题之一. 复杂网络的同步与控制有助于理解和解决自然和社会中的许多问题, 是复杂网络上非常典型的集体行为, 也是复杂网络中最重要的动力学特征之一.

最近十几年, 复杂网络被推广到分数阶情形, 一方面分数阶复杂网络可以更好地刻画模型所具有的记忆和遗传性质, 另一方面分数阶复杂网络通过分数阶导数的阶数增加了一个自由度, 极大地丰富了动力学行为. 因此, 分数阶复杂网络的同步与控制有着更加广阔的应用空间. 分数阶复杂网络同步的一般性, 使得分数阶复杂网络的同步成为富有挑战性的领域, 如何设计合理的控制器来减少控制成本、加快同步速度值得关注. 近年来, 为了实现分数阶复杂网络的同步, 学者们提出了各种各样的控制方法, 如主动控制 (active control)、自适应控制 (adaptive control)、滑模控制 (sliding mode control)、牵制控制 (pinning control)、脉冲控制 (impulsive control) 等.

本书致力于介绍分数阶复杂网络同步的基础知识和研究进展. 由于分数阶复杂网络同步研究具有很强的跨学科特色, 并且新的问题和研究成果不断涌现, 因此本书着眼于分数阶复杂网络同步研究中已取得的主要研究进展, 不过在材料的选取上

也不可避免地反映了作者自己的偏好. 本书基于分数阶导数、模糊神经网络、复杂网络和控制理论等方面的知识, 分析了自适应控制、牵制控制、脉冲控制、牵制脉冲控制等方法在实现分数阶复杂网络同步中的有效性.

本书的研究工作和撰写得到了西北民族大学引进人才经费、西北民族大学甘肃省一流学科专项经费 (31920180119)、甘肃省自然科学基金 (17JR5RA284) 等的资助, 在此表示衷心感谢.

第 1, 2 章由西北民族大学田双亮编写, 第 3—7 章由西北民族大学马维元编写, 全书由兰州现代职业学院汤玉荣统稿. 由于作者水平有限, 书中难免存在不足之处, 敬请读者批评指正.

作 者

2018 年 6 月

目　录

第 1 章　复杂网络 ······ 1

1.1　复杂网络的特性 ······ 1

1.2　复杂网络基本概念 ······ 2

1.2.1　网络的定义 ······ 2

1.2.2　聚类系数 ······ 3

1.2.3　平均路径长度 ······ 3

1.2.4　度分布 ······ 4

1.2.5　度相关性 ······ 5

1.2.6　介数 ······ 6

1.2.7　模块性 ······ 6

1.3　基本网络模型 ······ 6

1.3.1　规则网络 ······ 6

1.3.2　随机网络 ······ 7

1.3.3　小世界网络 ······ 8

1.3.4　无标度网络 ······ 10

1.4　复杂网络同步 ······ 11

第 2 章　分数阶导数及其性质 ······ 13

2.1　几类特殊函数及变换 ······ 13

2.1.1　Gamma 函数 ······ 13

2.1.2　Beta 函数 ······ 15

2.1.3　Laplace 变换 ······ 15

2.1.4　Mittag-Leffler 函数 ······ 16

2.2　分数阶导数的定义 ······ 17

2.3　Caputo 分数阶导数的性质 ······ 18

2.4　分数阶系统的渐近稳定性 ······ 20

2.4.1　分数阶线性系统的渐近稳定性 ······ 20

2.4.2　分数阶非线性系统的渐近稳定性 ······ 21

2.4.3　分数阶线性时滞系统的渐近稳定性 ······ 21

2.4.4　分数阶非线性时滞系统的渐近稳定性 ······ 24

2.5　分数阶微分方程的数值求解 ······ 26

2.6 分数阶导数的应用 …… 27
2.6.1 天气和气候的研究 …… 27
2.6.2 医学图像处理 …… 28
2.6.3 地震奇异性分析 …… 28
2.7 矩阵的一些性质 …… 28
第 3 章 分数阶复杂网络的牵制同步及自适应同步 …… 30
3.1 分数阶复杂网络同步的一些基本概念 …… 30
3.1.1 分数阶复杂网络的动力学角度 …… 30
3.1.2 分数阶复杂网络的同步角度 …… 31
3.1.3 分数阶复杂网络的控制角度 …… 33
3.1.4 复杂网络达到同步的数量角度 …… 35
3.2 分数阶复杂网络的牵制同步 …… 36
3.2.1 网络模型 …… 36
3.2.2 牵制同步 …… 37
3.2.3 数值例子 …… 39
3.3 分数阶复杂网络的自适应同步 …… 41
3.3.1 模型描述 …… 42
3.3.2 自适应同步 …… 42
3.3.3 数值例子 …… 45
第 4 章 两个不同分数阶复杂网络间的外部同步 …… 48
4.1 网络模型 …… 48
4.2 具有相同拓扑结构的分数阶网络间的外部同步 …… 49
4.3 具有不同拓扑结构的分数阶网络间的外部同步 …… 50
4.4 数值模拟 …… 52
4.4.1 具有相同拓扑结构的分数阶复数网络间的同步 …… 53
4.4.2 两个具有不同拓扑结构的分数阶复数网络之间的同步 …… 57
第 5 章 分数阶模糊神经网络的有界性及其自适应同步 …… 61
5.1 相互作用的分数阶模糊神经网络模型 …… 61
5.2 分数阶模糊神经网络的一些性质 …… 63
5.3 分数阶模糊神经网络的自适应同步 …… 68
5.4 数值试验 …… 71
5.4.1 有界性及自同步 …… 71
5.4.2 自适应同步 …… 73
第 6 章 带有外部扰动的分数阶时滞复杂网络的牵制同步 …… 79
6.1 准备工作及数学模型 …… 79

6.2　牵制同步条件 …… 81
6.3　数值试验 …… 85
6.3.1　分数阶混沌复杂网络 …… 85
6.3.2　分数阶超混沌复杂网络 …… 88
第 7 章　分数阶复杂网络的牵制脉冲同步 …… 92
7.1　准备工作和网络模型 …… 92
7.2　牵制脉冲同步条件 …… 95
7.3　数值例子 …… 99
7.3.1　带有负权的耦合网络 …… 100
7.3.2　全局耦合网络 …… 103
7.3.3　小世界耦合网络 …… 105
7.3.4　无标度耦合网络 …… 108
参考文献 …… 112

第 1 章 复 杂 网 络

20 世纪 50 年代末 60 年代初, 匈牙利数学家 Erdös 和 Rényi (ER) 在图论领域的开创性工作 —— 随机图理论, 被认为是复杂网络理论系统性研究的先驱. 然后, 20 世纪的后 40 年中, 数学家在图论基础上展开了对复杂网络的研究. 近些年来, 关于复杂网络的研究方兴未艾. 1998 年, Watts 和 Strogatz 引入了小世界 (small-world) 网络模型[1], 揭示了复杂网络的小世界特征. 1999 年, Barabási 和 Albert 在 *Science* 上发表文章[2] 指出, 许多实际的复杂网络具有幂律形式的连接度分布, 且幂律分布没有明显的特征长度, 该类网络被称为无标度 (scale-free) 网络. 上述两项创造性工作, 掀起了一股不小的研究复杂网络的热潮. 在此基础上, 复杂网络的研究迅速展开.

1.1 复杂网络的特性

在复杂网络中, 网络中的每一个节点表示实际网络中的每个个体, 节点之间的连线表示个体之间的连接关系. 钱学森给出了复杂网络的一个较严格的定义: 具有自组织、自相似、吸引子、小世界、无标度中部分或全部性质的网络称为复杂网络.

复杂网络即呈现高度复杂性的网络, 其复杂性主要表现在以下几个方面.

(1) 结构复杂: 表现在节点数目巨大, 网络结构呈现多种不同特征.

(2) 网络进化: 表现在节点或连接的产生与消失. 例如, 全球网络 (world-wide network), 网页或链接随时可能出现或断开, 导致网络结构不断发生变化.

(3) 连接多样性: 节点之间的连接权重存在差异, 且有可能存在方向性.

(4) 动力学复杂性: 节点集可能属于非线性动力学系统, 例如, 节点状态随时间发生复杂变化.

(5) 节点多样性: 复杂网络中的节点可以代表任何事物, 例如, 人际关系构成的复杂网络节点代表单独个体, 万维网组成的复杂网络节点可以表示不同网页.

(6) 多重复杂性融合: 以上多重复杂性相互影响, 导致更为难以预料的结果. 例如, 设计一个电力供应网络需要考虑此网络的进化过程, 其进化过程决定网络的拓扑结构. 当两个节点之间频繁进行能量传输时, 它们之间的连接权重会随之增加, 通过不断的学习与记忆逐步改善网络性能.

另外, 复杂网络一般具有以下特性:

(1) 小世界. 它以简单的措辞描述了大多数网络尽管规模很大但是任意两个节

(顶) 点间有一条相当短的路径的事实. 以日常语言看, 它反映的是相互关系的数目可以很小但却能够连接世界的事实. 例如, 在社会网络中, 人与人相互认识的关系很少, 但是却可以找到很远的无关系的其他人. 正如麦克卢汉所说, 地球变得越来越小, 变成一个地球村, 也就是说, 变成一个小世界.

(2) 集群即聚类系数 (clustering coefficient) 的概念. 例如, 社会网络中总是存在熟人圈或朋友圈, 其中每个成员都认识其他成员. 聚类系数的意义是网络集团化的程度, 这是一种网络的内聚倾向. 聚类系数概念反映的是一个大网络中各集聚的小网络分布和相互联系的状况. 例如, 它可以反映这个朋友圈与另一个朋友圈的相互关系.

(3) 幂律 (power law) 的度分布 (degree distribution) 概念. 度指的是网络中某个节 (顶) 点 (相当于一个个体) 与其他顶点关系 (用网络中的边表达) 的数量; 度的相关性指顶点之间关系的联系紧密性; 介数 (betweenness) 是一个重要的全局几何量. 顶点 u 的介数含义为网络中所有的最短路径之中, 经过 u 的数量. 它反映了顶点 u (即网络中有关联的个体) 的影响力. 无标度网络 (scale-free network) 的特征主要反映了度具有严重的不均匀性.

复杂网络的学科性体现出多学科交叉的特点, 融合了数学、物理、通信和社会等学科相关知识. 复杂网络的交叉性及其复杂性, 增加了研究难度, 也激起了喜欢挑战的国内外学者的浓厚兴趣. 随着复杂网络研究的逐渐深入, 其所涉及的研究对象、研究方法、所得结论等越来越多, 复杂网络的专著不断涌现 [3−11], 对这些情况进行了深入总结和研究. 总体来说, 目前复杂网络的研究主要集中于三个方面:

(1) 真实网络的统计特性研究, 如平均路径长度 (average path length)、聚类系数、度分布、介数等.

(2) 构建符合真实情况的复杂网络模型, 理解网络的统计特性, 分析网络运行机制, 预测网络发展趋势.

(3) 分析和预测复杂网络上的动力学行为, 如网络的稳定性、同步、鲁棒性、控制等, 进一步充分利用网络特点, 改善网络性能. 复杂动力网络的同步是一种最常见的动力学行为, 可以解释很多自然和社会现象, 也可以应用到很多领域, 因而引起了学者广泛关注.

1.2 复杂网络基本概念

1.2.1 网络的定义

一个具体的网络可以看成是一个由点集 V 和边集 E 组成的图 $G=(V,E)$, 这里节点数记为 $N=|V|$, 边数记为 $M=|E|$, 并且边集 E 中的每条边都有点集 V

中的一对节点 (u,v) 与之相对应. 若点集 V 中任意的节点对 (u,v) 和 (v,u) 对应同一条边, 那么该网络就称为无向网络, 否则称为有向网络; 若给网络中的每条边都赋予相应的权值, 则该网络称为加权网络, 否则称为无权网络. 当然无权网络可以看成是边集 E 中每条边权值都为 1 的等权网络. 边所连接的节点称为端点, 两个端点相同的边称为环. 有公共起点和公共终点的两条边称为平行边或重边. 在图论中, 无环且无重边的图称为简单图. 下面以无权无向的简单图为例来介绍复杂网络结构的一些基本概念: 聚类系数、平均路径长度、度分布、度相关性 (degree correlations)、介数和模块性 (modularity).

1.2.2　聚类系数

聚类系数又称为簇系数, 它表示的是网络的集团化程度, 是网络的一个重要参数. 对于社会网络, 集团表示网络中的朋友圈. 例如, 在朋友关系网络中, 一个人的两个朋友很有可能彼此之间也是朋友. 为了衡量网络的这一特性, 提出了聚类系数这一概念. 节点 i 的聚类系数 C_i 指的是网络中与该节点相连接的 k_i 个节点之间的连接概率, 即这 k_i 个节点间实际存在的边数 E_i 占总的可能的边数 $k_i(k_i-1)/2$ 的比例,

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}, \quad i=1,2,\cdots,N.$$

网络的聚类系数 C 就是该网络中所有节点 i 的聚类系数 C_i 的算术平均值, 即

$$C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i.$$

显然, 有 $0 \leqslant C \leqslant 1$. 当 $C=1$ 时, 网络是全局耦合的, 即该网络中任意节点对之间都有一条边相连; 而当 $C=0$ 时, 网络中没有任意的三个节点是互相连接的. 对于一个含有 N 个节点的完全随机网络来说, 当阶数 N 很大时, $C=O(N^{-1})$. 许多大规模的实际网络都具有非常明显的聚类效应, 这些网络的聚类系数虽然远远小于 1, 但是比起 $O(N^{-1})$ 来说却要大得多. 在许多不同类型的实际网络中, 你的朋友同时也是你朋友的朋友这一概率, 会随着网络规模的逐渐变大最终趋于某一个非零的正常数, 即当 $N\to\infty$ 时, 有 $C=O(1)$. 这一现象表明这些网络并不是完全随机的, 而是在一定程度上拥有类似于社会关系网络中的"物以类聚, 人以群分"这一特性.

1.2.3　平均路径长度

平均路径长度是网络的另一个重要的特征度量. 网络中两个节点 i 和 j 之间的距离 d_{ij} 指的是连接这两个节点的最短路径上的边数. 一个网络中所有节点对之

间距离的最大值称为该网络的直径 (diameter), 记为 $D = \max\limits_{i,j} d_{ij}$. 网络的平均最短路径长度 L 指的是网络中所有节点对之间的距离的平均值, 即

$$L = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{i>j} d_{ij},$$

其中, N 为网络的节点数. 网络的直径和平均路径长度分别衡量的是网络的效率和传输性能.

如果一个网络同时具有较大的聚类系数和较小的平均路径长度, 则称该网络具有“小世界特性”. 这里所说的较小的平均路径长度指的是, 该网络的平均路径长度按照网络规模 N 的对数形式或者以比对数形式更慢的速度增长.

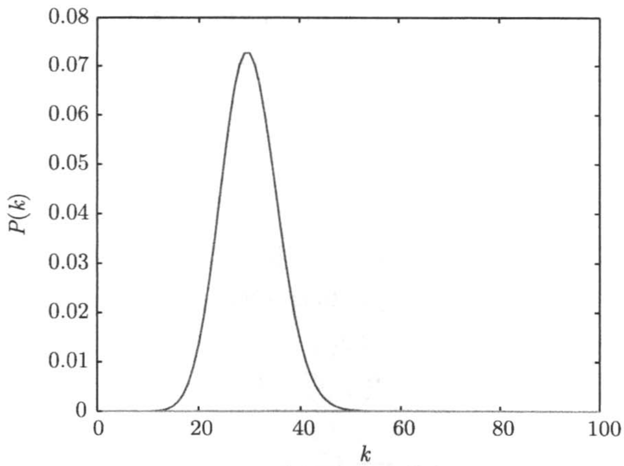
1.2.4　度分布

度分布是网络的又一个重要统计特征. 一个节点的度指的是与该节点所连接边的数目, 通常节点 i 的度记为 k_i. 度在不同的网络中代表的含义也是不同的, 例如, 在社会网络中, 度可以表示该个体的影响力和重要性, 该个体的度越大就意味着它在网络中影响力越大. 网络中所有节点的度的算术平均值称为网络的平均度, 记为 $\langle k \rangle$. 由于网络中每一条边对度的贡献为 2, 因此网络的平均度为

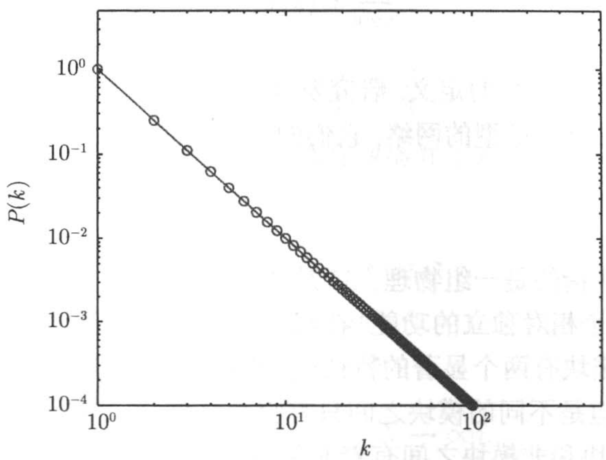
$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2M}{N},$$

其中, N 和 M 分别为网络的节点数和边数.

网络中节点的度分布可用节点分布函数 $P(k)$ 来表示, 它描述的是随机选取的节点刚好有 k 条边连接的概率. 网络可以按照度分布的不同分为均匀网络 (homogeneous network) 和异质网络 (heterogeneous network). 规则网络、完全随机网络和小世界网络等都属于均匀网络. 完全随机网络的度分布近似为 Poisson 分布 (图 1.1 (a)), 它的形状在远离峰值处呈现指数下降的变化趋势, 这意味着该网络中度相对很高的节点实际上是不存在的. 而近几年来, 科学家们发现许多实际网络的度分布明显与 Poisson 分布不同, 其中有许多网络的度分布服从幂律形式 $P(k) \propto k^{-\gamma}$, 我们称这类网络为异质网络 (图 1.1 (b)). 从图 1.1 可知, 幂律分布曲线要明显比 Poisson 分布曲线下降速度缓慢很多. 由于服从幂律分布的网络中的节点没有很明显的特征长度, 该网络也可称为无标度网络. 对于一个服从幂律度分布 (通常幂指数在 2 和 3 之间) 的大规模无标度网络, 它的绝大部分节点的度相对很低, 但是也存在少量度相对很高的节点, 这些节点称为网络的“hub”节点.



(a) Poisson 分布



(b) 幂律分布

图 1.1 两种度分布的比较

1.2.5 度相关性

度相关性指的是网络中不同节点之间的连接关系. 如果网络中度大的节点倾向于和度大的节点相连, 则称该网络是同配的 (assortative); 反之, 如果度大的节点倾向于和度小的节点相连, 则称该网络是异配的 (disassortative). Newman 给出了一个比较简单的度相关性计算方法, 他指出只需要计算顶点度的 Pearson 相关系数 r 就可以来表示网络的度相关性. 系数 r 的定义如下式所示:

$$r = \frac{M^{-1}\sum_i j_i k_i - \left[M^{-1}\sum_i \frac{1}{2}(j_i + k_i)\right]^2}{M^{-1}\sum_i \frac{1}{2}(j_i^2 + k_i^2) - \left[M^{-1}\sum_i \frac{1}{2}(j_i + k_i)\right]^2},$$

其中, k_i, j_i 分别表示第 i 条边的两个端点的度数, M 为网络中的总边数. 系数 r 的取值范围为 $-1 \leqslant r \leqslant 1$. 当 $r>0$ 时, 网络是同配的; 当 $r<0$ 时, 网络是异配的; 当 $r=0$ 时, 网络是不存在相关性的.

1.2.6 介数

介数可以分为顶点介数和边介数两种类型, 它反映了该节点或边在网络中的作用和影响力. 如果一对节点 (u,v) 之间共有 $C(u,v)$ 条不同的最短路径, 其中经过节点 i 的最短路径有 $C_i(u,v)$ 条, 则节点 i 对这对节点 (u,v) 的重要程度可用比值 $C_i(u,v)/C(u,v)$ 来表示. 进一步, 节点 i 的介数 B_i 可定义为

$$B_i = \sum_{u \neq v} \frac{C_i(u,v)}{C(u,v)}.$$

类似地, 可以给出边的介数的定义. 研究发现, 网络中节点的介数和度之间有着很强的联系, 并且对于不同类型的网络, 它们的介数分布也大不一样.

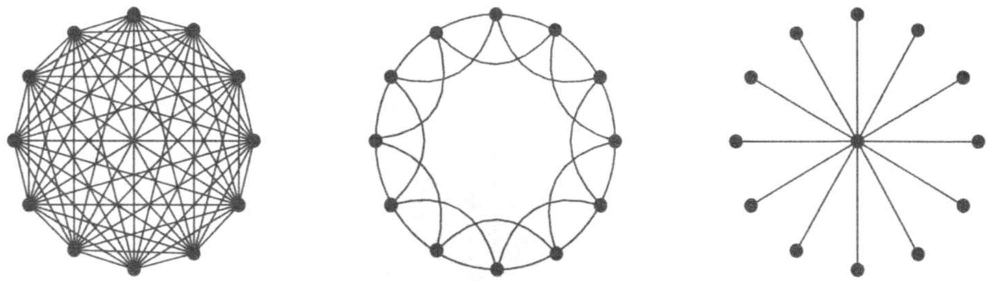
1.2.7 模块性

一般来说, 模块指的是一组物理上或是功能上连接在一起的节点, 并且这些节点能够共同完成一个相对独立的功能. 在现实世界中, 许多网络是由一种高度模块化的方式组成的. 模块有两个显著的特征: 模块内部的节点之间有着高度的连接和直接的相互作用; 但是不同的模块之间只有很少的连接, 甚至都不存在连接, 并且模块和模块或者模块和非模块之间有着非常清晰的边界. 在复杂网络研究领域中, 模块也可以称为社区 (community).

1.3 基本网络模型

1.3.1 规则网络

全局耦合网络 (globally coupled network)、最近邻耦合网络 (nearest-neighbor coupled network) 和星形耦合网络 (star coupled network) 等是几种比较常见的规则网络. 在全局耦合网络中, 任意两个节点之间都有边直接相连 (图 1.2 (a)). 从而相对于具有相同节点数 N 的所有网络来说, 全局耦合网络有最小的平均路径长度 $L_{gc}=1$ 和最大的聚类系数 $C_{gc}=1$. 然而大多数实际网络都是很稀疏的, 因此全局耦合网络具有比较明显的局限性.



(a) 全局耦合网络　(b) 最近邻耦合网络　(c) 星形耦合网络

图 1.2　几种规则网络

最近邻耦合网络相对来说是一个比较稀疏的规则网络，该网络的每一个节点只和它左右各 $K/2$ (K 为偶数) 个的邻居节点相连 (图 1.2(b)). 当 K 比较大时，最近邻耦合网络的聚类系数为

$$C_{nc} = \frac{3(K-2)}{4(K-1)} \approx \frac{3}{4}.$$

从而该网络是高度聚类的. 然而最近邻耦合网络并不具有小世界特征，该网络的平均路径长度为

$$L_{nc} \approx \frac{N}{2K} \to \infty \quad (N \to \infty).$$

星形耦合网络只有一个中心节点，其他的 $N-1$ 个节点都只和该中心节点相连接 (图 1.2 (c)). 该网络的平均路径长度为

$$L_{star} = 2 - \frac{2}{N} \to 2 \quad (N \to \infty).$$

星形耦合网络是一个比较特殊的网络. 这里假定只有一个邻居节点的节点聚类系数为 1，则星形耦合网络的聚类系数为 1.

1.3.2 随机网络

一个比较典型的随机网络模型是由两位匈牙利数学家 Erdös 和 Rényi 于 20 世纪 60 年代提出的，即 ER 随机图模型. 后来，另一种和 ER 随机图模型等价的随机网络模型 (图 1.3) 被提出，该模型的定义为: 首先给定网络的节点数目为 N，然后以相同的概率 p 来连接网络中的任意节点对，最后形成的网络边数的期望值是 $pN(N-1)/2$. 该随机网络模型的平均度为 $\langle k \rangle = p(N-1) \approx pN$，平均路径长度为 $L_{\mathrm{ER}} \sim \ln N / \ln\langle k \rangle$，聚类系数为 $C_{\mathrm{ER}} = p$，度分布可用 Poisson 分布来表示. 虽然随机网络具有较小的平均路径长度，但是它的聚类系数也比较小，而很多实际网络都具有比较明显的聚类特性，因此用随机网络作为实际网络的模型具有比较明显的缺陷.

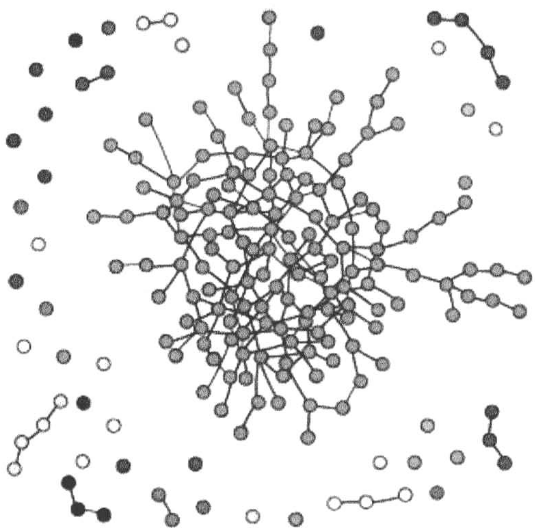


图 1.3　随机网络模型

1.3.3　小世界网络

近年来, 随着计算机数据处理与计算能力的不断提高, 科学家们发现许多实际网络既不是完全规则的, 也不是完全随机的, 而是具有其他的拓扑特征. 1998 年, Watts 和 Strogatz 提出了一个具有较大的聚类系数和较小的平均路径长度的小世界网络模型 (WS 小世界网络模型). 该模型由一个具有 N 个节点, 平均度为 $\langle k\rangle$ 的最近邻耦合网络开始, 然后以概率 p 对网络中的每条边随机进行重新连接 (自环和重边除外). 重新连接的边称为"长程连接", 这些长程连接大大地减小了该网络的平均路径长度, 同时对该网络的聚类系数的影响很小. 对于该模型, 当 $p = 0$ 时, 该网络仍然为最近邻耦合网络; 当 $p = 1$ 时, 网络中所有的边都随机重新连接, 该网络变为完全随机网络; 当 $0 < p < 1$ 时, 该网络是一个介于规则网络和完全随机网络之间的网络 (图 1.4). 由 WS 小世界网络模型的构造算法可知, 该模型的聚类

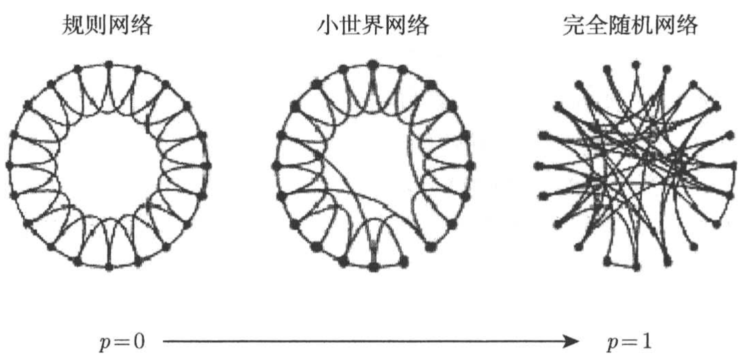


图 1.4　WS 小世界网络模型

系数 $C(p)$ 和平均路径长度 $L(p)$ 都可以看作是关于重连概率 p 的函数. 图 1.5 给出了 WS 小世界网络模型的聚类系数 $C(p)$ 和平均路径长度 $L(p)$ 关于重连概率 p 的变化关系. 此时, 当重连概率 p 比较小时, 随机产生的重连边对聚类系数的影响很小, 但是却大大降低了网络的平均路径长度.

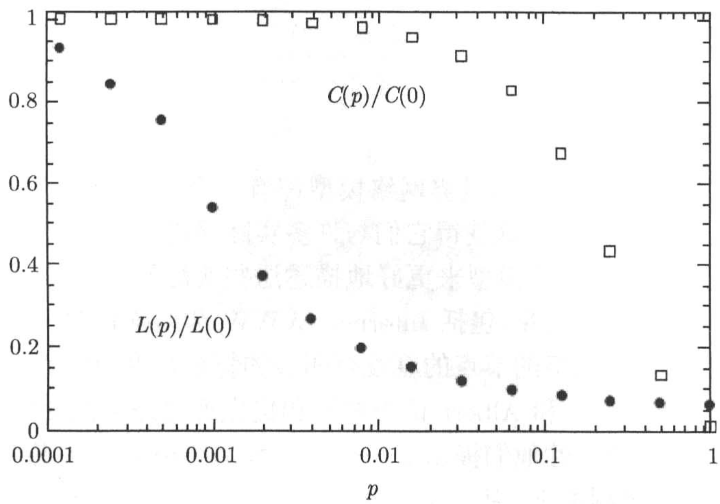


图 1.5 WS 小世界网络模型的聚类系数 $C(p)$ 和平均路径长度 $L(p)$ 关于重连概率 p 的变化关系

WS 小世界网络模型的聚类系数为

$$C(p) = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^3.$$

但是关于 WS 小世界网络的平均路径长度的计算是一个比较困难的问题. 不过, Newman 等利用重正化群方法得到了下面的公式:

$$L(p) = \frac{2N}{K} f(NKp/2),$$

其中, $f(x)$ 为一普适标度函数, 并且满足

$$f(x) = \begin{cases} \text{常量}, & x \ll 1, \\ (\ln x)/x, & x \gg 1. \end{cases}$$

不久之后, Newman, Moore 和 Watts 用平均场方法得到了如下的近似表达式:

$$f(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \operatorname{artanh}\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$