

[美]  
G·波利亚

著

涂 泓 冯承天

译


解  
题

HOW  
TO  
SOLVE  
IT

怎  
样

数学思维的  
新方法

A  
New Aspect  
of  
Mathematical  
Method

 上海科技教育出版社

解  
题

HOW  
TO  
SOLVE  
IT

怎  
样

数学思维的  
新方法

A New Aspect  
of Mathematical Method

[美]

G·波利亚

著

涂 泓 冯承天

译



上海科技教育出版社

How to Solve It:  
A New Aspect of Mathematical Method

by

G. Polya

Copyright © 1945 by Princeton University Press

Copyright © renewed 1973 by Princeton University Press

Second Edition Copyright © 1957 by G. Polya

Second Edition Copyright © renewed 1985 by Princeton University Press

Chinese (Simplified Character) Trade Paperback copyright © 2007 by

Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House

Published by arrangement with Princeton University Press

ALL RIGHTS RESERVED

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher.

上海科技教育出版社业经普林斯顿大学出版社

取得本书中文版版权

责任编辑 卢源 李凌 封面设计 肖祥德

怎样解题

——数学思维的新方法

〔美〕G·波利亚 著

涂泓 冯承天 译

上海科技教育出版社有限公司出版发行

(上海市柳州路218号 邮政编码200235)

网址 [www.sste.com](http://www.sste.com) [www.ewen.co](http://www.ewen.co)

各地新华书店经销 上海商务联西印刷有限公司印刷

ISBN 978-7-5428-6731-5/O·1066

图字09-2008-672号

开本 720×1000 1/16 印张 15.75 字数 218 000

2018年8月第1版 2018年8月第1次印刷

定价: 49.80元

图书在版编目(CIP)数据

怎样解题:数学思维的新方法/(美)G·波利亚著;涂泓,  
冯承天译. —上海:上海科技教育出版社,2018.8

ISBN 978-7-5428-6731-5

I. ①怎… II. ①G…②涂…③冯… III. ①数学—  
思维方法 IV. ①01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第103332号



## 内 容 提 要

这本经久不衰的畅销书出自一位著名数学家的手笔,虽然它讨论的是数学中发现和发明的方法和规律,但是对在其他任何领域中怎样进行正确思维都有明显的指导作用。本书围绕“探索法”这一主题,采用明晰动人的散文笔法,阐述了求得一个证明或解出一个未知数的数学方法可以怎样有助于解决任何“推理”性问题——从建造一座桥到猜出一个字谜。一代又一代的读者尝到了本书的甜头,他们在本书的指导下,学会了怎样摒弃不相干的东西,直捣问题的核心。



## 作者简介

波利亚(George Polya, 1887~1985),著名美国数学家和数学教育家。生于匈牙利布达佩斯。1912年获布达佩斯大学博士学位。1914年至1940年在瑞士苏黎世工业大学任数学助理教授、副教授和教授,1928年后任数学系主任。1940年移居美国,历任布朗大学和斯坦福大学的教授。1976年当选美国国家科学院院士。还是匈牙利科学院、法兰西科学院、比利时布鲁塞尔国际哲学科学院和美国艺术和科学学院的院士。其数学研究涉及复变函数、概率论、数论、数学分析、组合数学等众多领域。1937年提出的波利亚计数定理是组合数学的重要工具。长期从事数学教学,对数学思维的一般规律有深入的研究,这方面的名著有《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等,它们被译成多种文字,广为流传。



## 第一次印刷序(摘录)

一个重大的发现可以解决一道重大的题目,但是在解答任何一道题目的过程中都会有点滴的发现。你要解答的题目可能很平常,但是如果它激起你的好奇心,并使你的创造力发挥出来,而且如果你用自己的方法解决了它,那么你就能经历那种紧张状态,而且享受那种发现的喜悦。在一个易受外界影响的年龄段,这样的经历可能会培养出对智力思考的爱好,并对思想和性格留下终生的影响。

因此,一位数学教师就有着很大的机会。如果他把分配给他的时间都用来让学生操练一些常规运算,那么他就会扼杀他们的兴趣,阻碍他们的智力发展,从而错失他的良机。相反地,如果他用和学生的知识相称的题目来激起他们的好奇心,并用一些激励性的问题去帮助他们解答题目,那么他就能培养学生对独立思考的兴趣,并教给他们某些方法。

如果一个学生的大学课程中包含了某些数学科目,那么他也就有了一个独特的机会。当然,如果他把数学看成是一门这样的课程,他必须从中得到多少多少学分,而在期末考试后则应尽可能快地把它遗忘掉,那么他就失掉了这个机会。即使这个学生数学上有些天赋,他也有可能失掉这一机会,因为和任何其他一样,他必须去发现他自己的天赋和兴趣。要是他从未尝过树莓馅饼,他就不可能知道自己会喜欢树莓馅饼。然而,他却有可能发现一道数学题目会如同一个纵横字谜游戏一样有趣,或者发现充满活力的思维

练习就像一场激烈的网球比赛一样令人神往。在尝到了数学带来的乐趣以后,他就不会轻易地忘记,于是数学就很有机会成为他生活中的一部分:一种爱好,或者他专业工作中的一种工具,或者是他的职业,或者是一种崇高的抱负。

作者还记得自己的学生时代,那时他还是一个有点雄心的学生,渴望能懂一点数学和物理学。他听课、看书,试图领会所给出的解答及事实。但是有一个问题却一再困扰着他:“是的,这个解答看来是行的,它似乎是正确的,但怎样才能想到这样一个解答呢?是的,这个实验看起来可行,这似乎是事实,但是人们怎么会发现这些事实的?而我自己如何才能想到或发现它们呢?”如今,作者正在一所大学中教授数学。他认为,或者说他希望,他的一些更努力的学生能提出类似的一些问题,他会尽力去满足他们的好奇心。不仅要尽力去理解这道或那道题目的解答,而且要去理解这个解答的动机和步骤,并尽力向别人解释这些动机和步骤,这就最终导致他写了现在这本书。作者希望本书对于那些期望提高学生解题能力的教师,以及对于渴望提高个人能力的学生都会有用。

虽然本书特别关注对于数学专业的学生和教师的要求,但它也应能引起任何关心创造和发现的各种途径和方法的人的兴趣。这种兴趣可能比一个人不经过思考而随意设想的要广泛得多。在那些流行的报纸和杂志上由纵横字谜游戏及其他谜语所占的篇幅似乎说明,人们会在解不合实际的题目上花费时间。在解答这道或那道不涉及物质利益的题目的愿望背后,也许有着一个更深切的好奇







心,一个要求理解解答的各种途径和方法、动机和步骤的愿望。

本书写得有些简明扼要,但又尽可能浅显,并且是根据作者对求解方法的长期认真严肃的研究来写就的。这种研究方法被某些作者称为探索法(heuristic),虽然现在它已经不再那么流行了,但是它有了一段很长的历史,而且也许还会有其将来。

通过研究解题的方法,我们察觉到了数学的另一面。是的,数学具有两个面,它既是欧几里得(Euclid)的严谨的科学,但同时也是别的什么。以欧几里得方式表现出来的数学看上去是一种系统的演绎科学;但在形成过程中的数学看上去却是一种实验性的归纳科学。这两个方面都如同数学科学本身一样古老,但是第二个方面从某种意义上来说又是新的,因为我们正处于创造过程中的数学从未完全以这种方式呈现给学生或教师自己,乃至一般的公众。

关于探索法的这一主题和各个方面都有着联系。因此数学家、逻辑学家、心理学家、教育家,甚至哲学家都会提出将它的各个不同部分纳入他们各自的专门领域。由于充分认识到对立方有可能会提出批评,并敏锐地意识到自己的局限性,作者要作一点声明:在解题及教授各种层次的数学方面,作者都有一定的经验。

此主题在作者的一本即将完成的、内容更为宽泛的书有了更为充分的阐述。

1944年8月1日

于斯坦福大学



## 第七次印刷序(摘录)

我很高兴地告诉大家,我现在已经成功地(至少是部分地)实现了我在第一次印刷序中许下的诺言:构成我的近著《数学与猜想》(*Mathematics and Plausible Reasoning*)的两个分卷《数学中的归纳和类比》(*Induction and Analogy in Mathematics*)以及《合情推理模式》(*Patterns of Plausible Inference*),延续了在《怎样解题》中所开始的思路。

1954年8月30日  
于苏黎世



## 第二版序

除了一些小的改进外,第二版新增了第四部分:“题目、提示、解答”。

在本版即将付印之际,出现了一篇论文[新泽西州普林斯顿教育测验服务中心(Educational Testing Service),参见《时代》,1956年6月18日号],它似乎系统地提出了一些中肯的意见,虽然这些意见对于知情者来说已了无新意,但是向公众表述它们却正是时机:“……数学的声誉令人怀疑,它是专业课程中最不受欢迎的一门……未来的教师在小学毕业时变得憎恶数学了……当他们回到小学去执教时又教出痛恨数学的下一代。”

我希望为使本书有更广大的读者面而修订的这一版,能使一些读者确信,数学除了作为通向工程工作和科学知识的必由之路以外,还可能有乐趣,并能为最高水平的智力活动开辟一个前景。

1956年6月30日

于苏黎世

# 怎样解题

<p><b>第一</b> 你必须理解题目。</p>	<p style="text-align: center;">理解题目</p> <p>未知量是什么?已知数据是什么?条件是什么?条件有可能满足吗?条件是否足以确定未知量?或者它不够充分?或者多余?或者矛盾?</p> <p>画一张图,引入适当的符号。</p> <p>将条件的不同部分分开。你能把它们写出来吗?</p>
<p><b>第二</b> 找出已知数据与未知量之间的联系。</p> <p>如果找不到直接的联系,你也许不得不去考虑辅助题目。</p> <p>最终你应该得到一个解题方案。</p>	<p style="text-align: center;">拟订方案</p> <p>你以前见过它吗?或者你见过同样的题目以一种稍有不同的形式出现吗?</p> <p>你知道一道与它有关的题目吗?你知道一条可能有用的定理吗?观察未知量!并尽量想出一道你所熟悉的具有相同或相似未知量的题目。</p> <p>这里有一道题目和你的题目有关而且以前解过。你能利用它吗?你能利用它的结果吗?你能利用它的方法吗?为了有可能应用它,你是否应该引入某个辅助元素?</p> <p>你能重新叙述这道题目吗?你还能以不同的方式叙述它吗?</p> <p>回到定义上去。</p> <p>如果你不能解所提的题目,先尝试去解某道有关的题目。你能否想到一道更容易着手的相关题目?一道更为普遍化的题目?一道更为特殊化的题目?一道类似的题目?你能解出这道题目的一部分吗?只保留条件的一部分,而丢掉其他部分,那么未知量可以确定到什么程度,它能怎样变化?你能从已知数据中得出一些有用的东西吗?你能想到其他合适的已知数据来确定该未知量吗?你能改变未知量或已知数据,或者有必要的话,把两者都改变,从而使新的未知量和新的已知数据彼此更接近吗?你用到所有的已知数据了吗?你用到全部的条件了吗?你把题目中所有关键的概念都考虑到了吗?</p>
<p><b>第三</b> 执行你的方案。</p>	<p style="text-align: center;">执行方案</p> <p>执行你的解题方案,检查每一个步骤。你能清楚地看出这个步骤是正确的吗?你能否证明它是正确的?</p>
<p><b>第四</b> 检查已经得到的解答。</p>	<p style="text-align: center;">回顾</p> <p>你能检验这个结果吗?你能检验这个论证吗?</p> <p>你能以不同的方式推导这个结果吗?你能一眼就看出它来吗?</p> <p>你能在别的什么题目中利用这个结果或这种方法吗?</p>

## 引 言

以下的这些论述都是围绕前面题为“怎样解题”的这张表中的问题和建议而组织的。凡是从该表中引述的问题或建议都将以斜体印刷\*,而这张表本身也将被简称为“该表”或“我们的表”。

接下来的几页将讨论该表的意图,通过一些例子来说明它的实际应用,并解释那些作为基础的概念和思维活动。用通俗易懂的话来解释,这些也可以说成是:如果你能恰当地使用这些问题和建议,而对你自己提出它们,那么它们也许能帮助你解决你的题目。如果你能恰当地使用这些同样的问题和建议,进而向你的学生提出它们,你也许就可以帮助他解决他的题目。

本书共分为四部分:

第一部分的标题是“在教室里”,包括了20个小节,今后引用到其中的每个小节都会用黑体数字的形式来表示,如“第7节”。第1节到第5节以笼统的方式讨论了我们的表的“目的”。第6节到第17节解释了该表的“主要部分,主要问题”是什么,并讨论了第一个实际的例子。第18、19、20节则加入了“更多例子”。

第二部分非常简短,标题为“怎样解题”。它以对话的形式写成,描写了一位有些理想化了的教师对一位有些理想化了的学生的的一些简短问题的回答。

---

\* 中译本里用楷体表示。——译者



第三部分也是最为宽泛的那一部分，是一部“探索法小词典”，下面我们将它称为“词典”。它包括按英文字母顺序排列的67个条目。例如，**探索法**(Heuristic)这个术语的含义就可以在第112页的这个标题下找到\*。如果在文中提到这样的一个条目的话，就会用小号的大写字母来表示\*\*。有几个条目下的段落比较专业化，这些段落就用方括号把它们括起来。某些条目和第一部分的联系比较紧密，并对它作了进一步的说明和更具体的评论。其他的条目则在一定程度上超出了第一部分的主旨，它们的目的是阐明背景情况。关于**现代探索法**(Modern Heuristic)有一个关键的条目。它解释了这些主要的条目和构成该词典基础的方案之间的联系。同时，它也包括了指导读者如何从该表中找出关于那些特定项目的信息。由于该词典中的这些条目在外在形式上变化多端，所以必须强调，存在一个通用方案和某些统一性。有些比较长的条目致力于系统而凝练地讨论某个普遍性的主题，有一些则包含了更为专门的评论，还有一些则是相互参照，或为历史数据，或为引文，或为格言，或者甚至是笑料。

对于这部词典，读者不应该读得太快；它的文字常常是凝练的，而且不时还有点微妙。读者可以参照这部词典来查找关于那些特定点的信息。如果这些点来自他在自己的题目或在他自己的学生

---

\* 见中译本第102页。——译者

\*\* 中译本里用黑体表示。——译者

中得到的经验,那么这种阅读就更有可能会有所裨益。

第四部分的标题是“题目、提示、解答”。它对更有雄心的读者提出了几道题目。每道题目(在适当的距离之后)都跟随着一个“提示”,这个提示可能会揭示出一条通往结论的道路,而这个结论则在“解答”中作了解释。

我们已经一再地提到过“学生”和“教师”,而且我们还将会再三提到他们。我们最好能意识到,这里的“学生”可能是一个中学生,或是一个大学生,也可能是其他任何一个正在学习数学的人。同样,这里的“教师”可能是一位中学教师,或是一位大学讲师,也可能是任何一个对教授数学的技巧有兴趣的人。作者在看待情况时,有时是从学生的观点出发,有时则是从教师的观点出发(后面的这种方式在第一部分中出现较多)。然而在大多数的情况中(尤其是在第三部分中),作者是以一个既不是教师,也不是学生,而只是一个渴望解决他眼前题目的人的观点来看待问题的。

# 目 录

## 第一部分 在教室里

### 目的

1. 帮助学生 / 1
2. 问题, 建议, 思维活动 / 1
3. 普遍性 / 2
4. 常识 / 2
5. 教师和学生, 模仿和实践 / 3

### 主要部分, 主要问题

6. 四个阶段 / 4
7. 理解题目 / 5
8. 例子 / 5
9. 拟订方案 / 6
10. 例子 / 8
11. 执行方案 / 10
12. 例子 / 10
13. 回顾 / 11
14. 例子 / 12
15. 不同的方法 / 15



16. 教师提问的方法 /16

17. 好问题与坏问题 /17

### 进一步的例子

18. 一道作图题 /18

19. 一道证明题 /20

20. 一道速率题 /23

## 第二部分 怎样解题

一段对话 /27

## 第三部分 探索法小词典

类比 /31

辅助元素 /39

辅助题目 /43

波尔察诺 /48

出色的念头 /49

你能检验这个结果吗? /50

你能以不同的方式推导这个结果吗? /52

你能应用这个结果吗? /55

执行 /58

条件 /61