经济应用数学基础（二）

线性代数

第五版 学习参考

赵树嫄　胡显佑　陆启良　褚永增 / 编著

$$Ax=b$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

扫码下资源

中国人民大学出版社

经济应用数学基础（二）

线性代数

第五版 学习参考

赵树嫄 胡显佑 陆启良 褚永增 / 编著

$$Ax=b$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（第五版）学习参考/赵树嫄等编著．—北京：中国人民大学出版社，2018.12
（经济应用数学基础）
ISBN 978-7-300-26436-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.②赵… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 264771 号

经济应用数学基础（二）
线性代数（第五版）学习参考
赵树嫄　胡显佑
陆启良　褚永增　编著
Xianxing Daishu（Di-wu Ban）Xuexi Cankao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2018 年 12 月第 1 版
印　　张	17	**印　　次**	2019 年 2 月第 2 次印刷
字　　数	395 000	**定　　价**	38.00 元

出版说明

由赵树嫄教授主编的“经济应用数学基础”系列教材，30 多年来深受广大读者喜爱，发行量极大，影响很广。该套教材的读者既有在校师生，也有很多自学读者。为适应读者学习或参考的需要，我社听取了许多方面的意见和建议，为此教材提供了配套的学习辅导和教学参考读物。

为适应公共数学教学形势的发展，我社邀请赵树嫄教授主持对《线性代数》(第四版）的修订工作，推出了第五版。同时，为了满足广大读者尤其是自学读者的学习需要，我们邀请了赵树嫄、胡显佑、陆启良、褚永增等老师编写了这本《线性代数》(第五版）的学习参考读物。本书是一本教与学的参考书。

这里要特别指出的是，编写、出版学习参考书的目的是使读者更加清晰、准确地把握正确的解题思路和方法，扩大知识面，加深对教材内容的理解，及时纠正在解题中出现的错误，克服在一些习题求解过程中遇到的困难，读者一定要本着对自己负责的态度，先自己做教材中的习题，不要先看解答或抄袭解答，在独立思考、独立解答的基础上，再参考本书，并领会注释中的点评，总结规律、加深对基本概念的理解、提高解题能力。

本书各章内容均分为两部分。

（一）习题解答与注释

该部分基本上对《线性代数》(第五版）中的习题给出了解答，并结合教与学作了大量注释。通过这些注释，读者可以深刻领会教材中的基本概念的准确含义，开阔解题思路，掌握解题方法，避免在容易发生错误的环节上出现问题，从而提高解题能力，培养良好的数学思维。

（二）参考题（附解答）

该部分编写了一些难度略大且有参考意义的题目，目的是给愿意多学一些、多练一些的学生及准备考研的读者提供一些自学材料，也为教师在复习、考试环节的命题工作提供一些参考资料。

本书给出了较多单项选择题。单项选择题是答案唯一且不要求考核推理步骤的题型，因此，不论用什么方法（诸如排除法、图形法、计算法、逐项检查法，等等），只要

能找出正确选项即可。在必须使用逐项检查法时，只要检查到符合题目要求的选项，就可得出答案，停止检查，不必将所有选项全部检查完。但是选择题的各个选项恰恰是概念模糊、不易辨别的内容或计算容易出错的环节，也恰恰是需要读者搞清楚的问题，所以本书作为辅导书，在使用逐项检查法时，对四个选项均做了探讨，目的是使读者不仅能解答这个题目，而且能对这个题目有更全面、更准确的认识，通过总结规律，提高知识水平与解题技能。必须提醒读者，在参加考试时，一旦辨别出所要求的选项，即可停止探讨，不必继续往下讨论，以免浪费考试时间。

本书是我社出版的赵树嫄教授主编的《线性代数》（第五版）的配套参考书，但它本身独立成书，选用其他线性代数教材的读者也可以将本书选做参考书，同时自学读者或准备考研的读者也可以将本书作为自学和练习的读物。

由于多方面原因，书中不妥之处在所难免，我们衷心欢迎广大读者批评指正。

中国人民大学出版社

2018 年 7 月

目　　录

第一章　行列式

（一）习题解答与注释

(A)

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4-3\times 1=1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2-1\times(-1)=5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6\times 12-9\times 8=0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2-ba^2=ab(b-a)$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1)-x^2=x^3-x^2-1$

(6) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1-\log_a b\cdot\log_b a=1-1=0$

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-1\times2\times3-2\times3\times1$

$$-3\times1\times2=1+8+27-6-6-6=18$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1\times1\times5+1\times4\times8+1\times3\times9-1\times4\times9-1\times3\times5-1\times1\times8$

$= 5+32+27-36-15-8=5$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\times5\times1+0\times0\times0+(-1)\times3\times4-1\times0\times4$

$-0\times3\times1-(-1)\times5\times0=5-12=-7$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0$

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证： *方法 1*

左边 $= a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3$

右边 $= a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$

$= a_1b_2c_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3$

左边 $=$ 右边

所以等式成立.

方法 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3$$

$$= a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

4. 当 k 为何值时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$?

解： $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k^2-4k+3=(k-1)(k-3)$

当 $k=1$ 或 $k=3$ 时，$(k-1)(k-3)=0$，即 $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$. 所以可得，当 $k=1$ 或 $k=3$ 时，给定行列式等于零.

5. 当 x 为何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$?

解： $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2 - x^2 - 4x = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 时，$2x(x-2) \neq 0$，即 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$. 所以可得，当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 时，给定行列式不等于零.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解： $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2 + 4$

若 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$，则有 $a^2 < 4$，即 $|a| < 2$. 反之，若 $|a| < 2$，则 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$，即当且仅当 $|a| < 2$ 时，$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$.

故行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $|a| < 2$.

7. 解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

解： $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3x - x - x^2 = -(x+1)(x-3) = 0$

解　　$-(x+1)(x-3) = 0$

得　　$x_1 = -1, x_2 = 3$

注释： 第 1～7 题是复习二阶、三阶行列式的定义，要求用画线法求行列式的结果，其结果是一个常数或代数式.

8. 求下列排列的逆序数：

(1) 41253　(2) 3712456　(3) 36715284　(4) $n(n-1)\cdots 21$

解：(1) 41253 所含逆序为 41，42，43，53，所以 41253 的逆序数$N(41253)=4$.

(2) 3712456 所含逆序为 31，71，32，72，74，75，76，所以 3712456 的逆序数$N(3712456)=7$.

注释：求由不同数码1，2，…，n组成的有序数组$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数，即求排列在各个数码前面比它大的数码个数的总和，可以按下面的方法求.

观察排在1前面而比1大的数码个数，设为k_1，再观察排在2前面而比2大的数码个数，设为k_2，…，最后观察排在n前面而比n大的数码个数，设为$k_n(k_n=0)$，于是可得

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=k_1+k_2+\cdots+k_n$$

以题(2)为例,那么有

$$k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=0,\quad k_4=1,\quad k_5=1,\quad k_6=1,\quad k_7=0$$

所以$N(3712456)=2+2+0+1+1+1+0=7$.

(3) 36715284 的逆序数为

$$N(36715284)=3+4+0+4+2+0+0+0=13$$

(4) $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}N(n(n-1)\cdots 21)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0\\&=\frac{n}{2}(n-1+0)=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

9. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素连乘积前面应冠以什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$　(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$　(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解：(1) $N(532416)=8$，为偶数，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 前面应冠以正号.

(2) $N(162435)=5$，为奇数，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 前面应冠以负号.

(3) $N(251463)+N(136254)=6+5=11$，为奇数，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前面应冠以负号.

(4) $N(531462)=8$，为偶数，所以 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 前面应冠以正号.

(5) $N(654321)=15$，为奇数，所以 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 前面应冠以负号.

注释：如果行标(列标)的排列为正常顺序排列，即 $i_1i_2\cdots i_n(j_1j_2\cdots j_n)$ 为 $12\cdots n$,那么对该项的符号只需考察列标(行标)的逆序数 $N(j_1j_2\cdots j_n)(N(i_1i_2\cdots i_n))$.

10. 选择k，l使$a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ $(i,j=1,2,\cdots,5)$ 中前面冠以负号的项.

解：欲使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中冠以负号的项，k，l 只能依次取 1、5 或 5、1，且 $N(3k42l)$ 为奇数.

当 $k=1$，$l=5$ 时，$N(31425)=3$；当 $k=5$，$l=1$ 时，$N(35421)=8$. 所以，当 $k=1$，$l=5$ 时，$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中前面冠以负号的项.

11. 设n阶行列式中有n^2-n个以上元素为零，证明该行列式为零.

证：n阶行列式有n^2个元素,若它有n^2-n个以上的元素为零，那么该行列式的非零元素少于n个. 而n阶行列式是取自不同行不同列的n个元素连乘积的代数和，因此每个连乘

积的项中至少有一个元素为零，从而所有项皆为零. 故行列式为零.

注释：行列式非零元素的个数小于阶数，是行列式为零的充分而非必要条件.

12. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：(1) 设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=|a_{ij}| \quad (i, j=1, 2, 3, 4).$

根据行列式的定义，$|a_{ij}|$ 的展开式中除 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ 连乘积这一项外，其余各项至少含有一个零元素，故皆为零. 因此

$$|a_{ij}|=(-1)^{N(3241)}a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=(-1)^4\times1\times1\times1\times1=1$$

所以可得 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1$

(2) 设 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=|a_{ij}| \quad (i, j=1, 2, \cdots, n).$

显然在 $|a_{ij}|$ 的展开式中，只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 连乘积这一项不等于零，其余项皆为零，因此

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &= (-1)^{N(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1} \\ &= (-1)^{n-1}1\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot(n-1)\cdot n \\ &= (-1)^{n-1}n! \end{aligned}$$

所以可得 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$

(3) 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$.

对于 $|a_{ij}|$ 的展开式中的非零项，第一列必须取 a_{11}，第四行必须取 a_{43}，取定 a_{11}，a_{43} 后，第二列可取的元素有 a_{22}，a_{32}，第四列可取的元素有 a_{24}，a_{34}. 因此组成 $|a_{ij}|$ 的非零项只有 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 与 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ 两个连乘积，所以

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &= (-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + (-1)^{N(1423)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ &= (-1)^1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 + (-1)^2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

所以可得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(4) 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |a_{ij}| \quad (i, j = 1, \cdots, 5)$.

考察 $|a_{ij}|$ 的展开式中的非零项.

$|a_{ij}|$ 的第五行只有 a_{51}，a_{52} 不等于零，第四行只有 a_{41}，a_{42} 不等于零，第三行只有 a_{31}，a_{32} 不等于零.

若在 $|a_{ij}|$ 的展开式中第五行选取 a_{51}，则第四行只能选取 a_{42}，若第五行选取 a_{52}，则第四行只能选 a_{41}，不论选取 $a_{51}a_{42}$，还是选取 $a_{52}a_{41}$，第三行的元素均不能再选自第一列和第二列，只能取自第三、四、五列，但 a_{33}，a_{34}，a_{35} 均等于零，故 $|a_{ij}|$ 的各项均为零，即 $|a_{ij}| = 0$. 所以可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

注释：用定义求行列式时，要注意下面的问题.

(1) n 阶行列式共有 $n!$ 项.

(2) 某项中含有零元素，则该项为零. 按定义求行列式的值，一般地，首先要排除含有零元素的项，只考虑非零项.

(3) n 阶行列式各项均为 n 个元素的连乘积，n 个元素要取自不同行不同列，如果某项已取了第 i 行第 j 列的元素，那么该项不能再取第 i 行和第 j 列的其他元素.

(4) $n!$项中冠以正号的项和冠以负号的项各占 $\frac{n!}{2}$ 项.

各项前应冠的符号取决于该项 n 个元素的行排列与列排列的逆序数总和，例如某项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，该项前应冠以$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}$. 如果 $i_1i_2\cdots i_n(j_1j_2\cdots j_n)$ 为自然顺序排列，那么该项前的符号只取决于 $j_1j_2\cdots j_n(i_1i_2\cdots i_n)$ 的逆序数，即该项前只冠以$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$ $((-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)})$ 即可.

13. 用行列式的性质计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 34\,215 & 35\,215 \\ 28\,092 & 29\,092 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab(b-a)$

(2) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \times 1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 34\,215 & 35\,215 \\ 28\,092 & 29\,092 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ll} \times(-1) & \uparrow \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 34\,215 & 1\,000 \\ 28\,092 & 1\,000 \end{vmatrix} = 1\,000\begin{vmatrix} 34\,215 & 1 \\ 28\,092 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1\,000 \times (34\,215 - 28\,092) = 6\,123\,000$

(4) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \times 1 & \times 1 \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix}$

$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$

$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$

$= (2x+2y)(-x^2+xy-y^2) = -2(x^3+y^3)$

14. 用行列式的性质证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0 \quad (n>2)$

证:(1) 方法 1

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & c_1 & c_1 \\ kb_2 & c_2 & c_2 \\ kb_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

方法 2 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\times k$ $\quad$ $\times 1$

或 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\times(-1)$ $\quad$ $\times(-k)$

(2) 方法 1

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$\times 1$ $\quad$ $\times 1$ $\qquad$ $\times(-1)$ $\quad$ $\times(-1)$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix}$$

$\times 1$ $\quad$ $\times 1$

$$=2\times(-1)\times(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ -2a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ -2a_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)\quad\times(-1)$

$$=-2\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

方法2

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \\ c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+0+0+0+0+0+0+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= (b_1-b_2)\cdots(b_1-b_n)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2-b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (n>2)$$

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 \end{vmatrix} = (a_1-b_1)(a_2-b_2)-(a_1-b_2)(a_2-b_1)$

$$= (a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

15. 现有行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 及 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}+2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} (k \neq 1)$$

利用行列式的性质，判断 D_1，D_2，D_3，D_4，D_5，D_6 与行列式 D 的关系.

解： $D_1 = D^{\mathrm{T}} = D$.

D_2 是 D 中第一列元素乘 (-2) 加到第二列，故 $D_2 = D$.

D_3 是 D 的第三列乘 2 之后，再把第一列加到第三列，故 $D_3 = 2D$.

$D_4 = -D$.

D_5 是 D 的第三行与第二行交换后，再与第一行交换，共进行了两次行交换，故 $D_5 = (-1)\cdot(-1)D = D$.

$D_6 = k^3 D$.

16. 设五阶行列式 $|a_{ij}| = m$ $(i, j = 1, 2, \cdots, 5)$，依下列次序对 $|a_{ij}|$ 进行变换后求其结果.

交换第一行与第五行，再转置，用 2 乘所有元素，再用 (-3) 乘第二列加于第四列，最后用 4 除第二行各元素.

解：交换第一行与第五行所得到的行列式为$(-m)$，再转置所得行列式结果不变，仍为$(-m)$. 用2乘所有元素所得行列式的结果为$2^5\times(-m)=-32m$，再用(-3)乘第二列加于第四列，结果不变，仍为$(-32m)$，最后用4除第二行各元素，所得行列式的结果为$\frac{-32}{4}m=-8m$.

故行列式$|a_{ij}|$经上面五种变换后，所得行列式的结果是$-8m$.

注释：行列式的性质对行列式的计算有很重要的作用，利用行列式的性质时，应注意下面一些问题：

(1) 行列式转置，其值不变.

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式变号，交换多少次，要改变多少次符号，因此对行列式的行(列)进行多次交换时，要弄清共交换了多少次，以确定改变多少次符号.

(3) 行列式某行(列)所有元素有公因子，公因子可提到行列式符号外面.

(4) 对n阶行列式$|a_{ij}|$，有$|ka_{ij}|=k^n|a_{ij}|$. 当$k\neq1$且$k\neq0$时，$|a_{ij}|\neq k|a_{ij}|$.

(5) 两行列式中两行(列)对应元素相等或成比例，行列式的值为零.

(6) 将行列式$|a_{ij}|$的第j行(列)乘以k，再加于第i行(列)上$(i\neq j)$，行列式的值不变，若将第j行(列)加于乘以k的第i行(列)上，所得行列式等于原行列式乘以k.

(7) 如果行列式的每一行都能写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)的对应位置的元素，其他元素与原行列式相同.

例如$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

但应注意，一般说来

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

17. 用行列式性质，化下列行列式为上三角形行列式，并求其值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times1\ \times1\ \times1 \\ \\ \\ \\ \end{array}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$