"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

——数学物理方程与特殊函数（第五版）

ENGINEERING MATHEMATICS

东南大学数学学院 王元明 编

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数（第五版）

ENGINEERING MATHEMATICS

东南大学数学学院 王元明 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第五版保留了作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材的第四版全部内容及结构，只是对书中一些疏漏及不够严谨、不够清晰的表述作了修改，删去了少数多余的或不在研究范围的内容，尽可能地使这本经历了40年的小册子逐渐成为精品之作。

本书是高等学校理工科各专业本科生的教材，也可作为物理类、工程类有关专业硕士研究生的教材及相关研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.数学物理方程与特殊函数/王元明编.--5版.--北京:高等教育出版社,2019.4

ISBN 978-7-04-051237-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②数学物理方程-高等学校-教材③特殊函数-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11②O175.24③O174.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第011963号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	李　茜	封面设计	赵　阳	版式设计	童　丹
插图绘制	于　博	责任校对	马鑫蕊	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	13	版　次	1978年11月第1版
字　数	210千字		2019年4月第5版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	25.70元

物 料 号　51237-00

第五版前言

本书从第一版到现在的第五版整整经历了40个年头。40年来，我对广大同行们给予的支持、帮助、理解、包容表示衷心的感谢。第四版被推荐为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材后，我就反复地思考这样一个问题：怎样做才对得起“国家级”这三个字？答案只有一个，就是尽最大努力把它做好。

经过认真、仔细地阅读，发现书中仍存在一些疏漏及不够严谨、不够清晰或不够精炼的地方，需要作些修补。此外，为了便于读者较轻松地读懂本书，从第三版起我就本着“温故、启示、巩固”的原则，编写了与之相对应的辅导材料《数学物理方程与特殊函数学习指南与习题解答》(简称《学习指南》)。除了对教材中所有习题作了启示和详细解答外，还对需要用到、读者已经学过但可能被遗忘的知识作了简要回顾，对书中重要的内容作了力所能及的点评，对一些建议读者自己完成的推演、验证工作也作了必要的填补，精选了30道复习题。应该说，为了写好辅导书我还是花了一番心血的。但教材中并未反映出两本书之间的关联，给读者带来了一些不便。

针对上面所述两个方面的问题，这次修订主要做了两件事：

1. 对全书作了认真、细致的审订。填补了极少数的遗漏；修改了一些不够严谨或者不够清晰的表述；删去了累赘的或不在研究范围的内容；对书中的文字作了几乎是逐字逐句的审校、订正，力求做到准确、易读。

2. 为便于读者借助《学习指南》阅读教材，凡教材中没必要再展开讨论但《学习指南》中已给出了明确表述的内容，在相关的页面都加了脚注，体现了两本书的关联性。

此外，为了拓宽读者的视野，本版增加了两个以二维码形式呈现的内容，它们是两端固定弦的自由振动问题解的存在性证明及勒让德多项式的罗德里格斯表达式的推导。这次修改得到了高等教育出版社高等教育理工出版事业部数学分社有关同志的支持。特别是，于丽娜、蒋青、李茜等同志为此付出了辛勤的劳动。在此向她们及所有关心和帮助本书再版的同志表示诚挚的感谢。

王元明
2018年8月

第四版前言

《数学物理方程与特殊函数(第三版)》问世以后,得到了国内同行和广大读者的认可和支持,虽然书中还有一些不足或失误之处,但都给予了极大的宽容和理解,并通过高等教育出版社编辑同志转达了不少建议和希望,使我非常感动。

本书第三版和第二版相比最大的改变就是增加了一些内容,主要表现在书中第七、八、九章中。经过这几年的实践,回过头来反思,我觉得这些改变未必完全符合当前高等教育教学改革的实际需要。例如,第七章能量积分法过于理论化,与全书的总体风格有点不一致;又如第九章有关非线性偏微分方程的例子过于复杂、有的内容也偏难;再如删去第二版中的差分解法似乎也不妥当,因为差分方法毕竟是求解偏微分方程最基本的近似方法。

基于以上思考,这次修订的重点将放在如下几个方面:

1. 对全书的内容和文字表述作进一步地、细致地审校、修改和增减,并适当补充例题和注解。

2. 在第三章增加一节“傅里叶变换和拉普拉斯变换”。这样做的目的就是让一些不需要单独开设“积分变换”课程的专业的学生能够顺利地学习积分变换解法,当然这些内容不会占用很大篇幅。

3. 删去第三版中的第七章。

4. 恢复第二版中的差分解法,将这些内容与第三版中的变分方法合在一起,作为新版的第七章,名为“数学物理方程的近似解法”。

5. 简化和精炼第三版中第九章的内容,删去一些理论推导,补充物理解释,从而构成新版的第八章。这章重点是让学生了解非线性方程与线性方程有什么本质差异以及两个重要的波——激波和孤立波的概念。

本书经修订后由八章组成,新版的体系更合理,难度更适中。除了保留原有的特色和风格外,由于对文字作了再加工,应该更便于“教”和“学”。这本教材从第一版面世以来,已经历了三十多个春秋,几经修订,渐趋成熟。书中八章内容之间既相互呼应,又相对独立。教师完全可以根据学时数及教学要求,选择部分或全部内容进行讲授。讲完全部内容约需 45~48 学时,讲授前 6 章内容约需 36~40 学时。书中带有“*”号的内容可略去不讲,作为学生自学

的材料。

学生在学习这门课程时会遇到一些困难，主要原因是由于涉及较多的知识，除了物理学以外，仅就数学而言，就涉及微积分、常微分方程、傅里叶分析、复变函数等，这些内容虽然读者在学习本课程之前大多已学习过，但到真正用的时候仍然会感到困难。为了便于广大读者学好这本书并顺利完成书内所有的习题，我同时编写出版了《数学物理方程与特殊函数（第四版）学习指南与习题解答》，在这本指南里，我们把上面提到的知识都作了较系统的概述，对各章内容也作了点评，对书中所有习题除了作较详细的释疑和启示外，还给出了全部的解答。只要读者把这本指南和教材配合使用，就一定能轻松地完成本课程的学习任务。

本书修订再版得到了高等教育出版社数学分社的大力支持，于丽娜和蒋青两位同志为本书的再版付出了许多辛勤的劳动，在这里对他们表示衷心的感谢。虽然经过4次修订，但仍难免会百密一疏，希望广大读者给予指正。

王元明
于东南大学
2011年12月

目　录

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前,我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题的正确提法.为此,我们从两方面来讨论,一方面要建立描述某种物理过程的微分方程,另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来.

§1.1　基本方程的建立

在本节,我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程,这些方程构成本书的主要研究对象.

例 1　弦的振动

弦的振动问题,虽然是一个古典问题,但对于初学者仍然具有一定的启发性.

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外,不受外力影响.下面研究弦作微小横向振动的规律.所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图1-1).所谓"微小"是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以至它们的高于一次方的项都可略而不计.

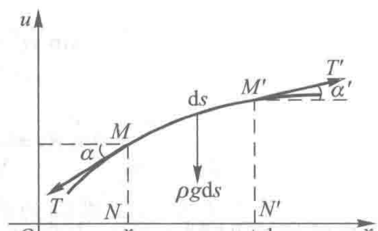

图 1-1

设弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 时的位置为 M,位移 NM 记作 u.显然,在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x,t)$,现在来建立位移 u 满足的方程.我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况.在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$,其长为 ds,设 ρ 是弦的线密度,弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记作 T,T'.由于假定弦是柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向.现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况.用**牛顿运动定律**,作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘该方向上的

加速度.

在 x 轴方向,弧段$\widehat{MM'}$受力的总和为$-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'$,由于弦只作横向振动,所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \tag{1.1}$$

按照上述弦振动微小的假设,可知在振动过程中弦上 M 点与 M'点处切线的倾角都很小,即 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$,从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

可知,当我们略去 α 与 α'的所有高于一次方的各项时,就有

$$\cos\alpha \approx 1,\quad \cos\alpha' \approx 1,$$

代入(1.1)式,便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u 方向,弧段$\widehat{MM'}$受力的总和为$-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\mathrm{d}s$,其中$-\rho g\mathrm{d}s$ 是弧段$\widehat{MM'}$的重力.又因当 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x},$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$,小弧段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$,所以

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

或

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g\mathrm{d}x \approx \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化而引起的$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$的改变量,可用微分近似代替,即

$$\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial u}\approx\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x,$$

于是
$$\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho g\right]\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

或
$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+g.$$

一般说来,张力较大时弦振动速度变化很快,即$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$要比 g 大得多,所以又可以把 g 略去.经过这样逐步略去一些次要的量,抓住主要的量,在 $u(x,t)$ 关于 x,t 都是二次连续可微的前提下,最后得出$u(x,t)$应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.3}$$

这里的 $a^2=\frac{T}{\rho}$.(1.3)式称为**一维波动方程**.

如果在振动过程中,弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力,且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$,显然,这时(1.1)及(1.2)分别为

$$T'\cos\alpha'-T\cos\alpha=0,$$

$$F\mathrm{d}s-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\mathrm{d}s\approx\rho\mathrm{d}s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的质量,可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1.3$'$}$$

其中 $f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$,表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力密度.

方程(1.3)与(1.3)$'$的差别在于(1.3)$'$的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x,t)$,这个项称为**自由项**.包括非零自由项的方程称为**非齐次方程**,自由项恒等于零的方程称为**齐次方程**.(1.3)为齐次一维波动方程,(1.3)$'$为非齐次一维波动方程.

注 1 在研究均匀细杆作纵向振动时,也会得到方程(1.3)及(1.3)$'$,其中 $u(x,t)$表示杆上点 x 在时刻 t 的纵向位移(见习题一第 3 题.其推导过程见《数

学物理方程与特殊函数(第五版)学习指南与习题解答》(以后简称《**学习指南**》).

注 2 如果我们研究薄膜的振动或者声波在空气中的传播,就得到二维或三维波动方程,其形式和方程(1.3)′相似:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f,$$

其中 $\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$,$n$ 是维数($n=2$ 或 3),$\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 称为**拉普拉斯**(Laplace)算子.

例 2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电,电路的**基尔霍夫**(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等.但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况),电路中导线的自感和电容的效应不可忽略,因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线,它被当作具有分布参数的导体(图 1-2),我们来研究这种导体内电流流动的规律.在具有分布参数的导体中,电流通过的情况,可以用电流密度 i 与电压 v 来描述,此处 i 与 v 都是 x,t 的函数,记作 $i(x,t)$ 与 $v(x,t)$.以 R,L,C,G 分别表示下列参数:

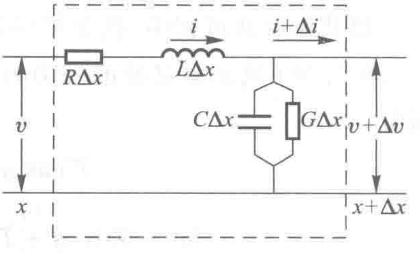

图 1-2

R——每一回路单位的串联电阻,

L——每一回路单位的串联电感,

C——每单位长度的分路电容,

G——每单位长度的分路电导.

根据**基尔霍夫第二定律**,在长度为 Δx 的传输线中,电压降应等于导线电阻 $R\Delta x$ 上的电压降和两线之间的电感 $L\Delta x$ 上的感生电动势之和,即

$$v-(v+\Delta v)=R\Delta x\cdot i+L\Delta x\cdot\frac{\partial i}{\partial t}.$$

由此可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1.4}$$

另外,由**基尔霍夫第一定律**,流入节点的电流应等于流出该节点的电流,

即

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x \cdot v,$$

其中右端第二项为两线之间的电容 $C\Delta x$ 上的充放电,右端第三项为两线间的漏电流.由此式得

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t} - Gv. \tag{1.5}$$

将方程(1.4)与(1.5)合并,即得 i,v 应满足如下方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\dfrac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + L\dfrac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0. \end{cases}$$

从这个方程组消去 v(或 i),即可得到 i(或 v)所满足的方程.例如,为了消去 v,我们将方程(1.5)对 x 求导(假定 v 与 i 对 x,t 都是二次连续可微的),同时在方程(1.4)两端乘 C 后再对 t 求导,并把两个结果相减,即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G\frac{\partial v}{\partial x} - LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC\frac{\partial i}{\partial t} = 0,$$

将(1.4)中的$\dfrac{\partial v}{\partial x}$代入上式,得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \tag{1.6}$$

这就是电流 i 满足的微分方程.采用类似的方法从(1.4)与(1.5)中消去 i 可得电压 v 满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \tag{1.7}$$

方程(1.6)或(1.7)称为**传输线方程**.

根据不同的具体情况,对参数 R,L,C,G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式.例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G=R=0$,此时方程(1.6)与(1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这两个方程称为**高频传输线方程**.

若令 $a^2=\dfrac{1}{LC}$,这两个方程与(1.3)完全相同.由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象.一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程.

***例 3**　电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 以及电感应强度 $\boldsymbol{D}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述.联系这些量的**麦克斯韦**(Maxwell)方程组①为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div}\ \boldsymbol{B}=0, \tag{1.10}$$

$$\operatorname{div}\ \boldsymbol{D}=\rho. \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为传导电流的面密度,ρ 为电荷的体密度.

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

联立,其中 ε 是介质的介电常数,μ 是磁导率,σ 为电导率,我们假定介质是均匀而且是各向同性的,此时 ε,μ,σ 均为常数.

方程(1.8)与(1.9)都同时包含有 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$,从中消去一个变量,就可以得到关于另一个变量的微分方程.例如先消去 $\boldsymbol{H}$,在(1.8)式两端求旋度(假定 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$ 都是二次连续可微的)并利用(1.12)与(1.14)得

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}+\sigma\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{E},$$

将(1.9)与(1.13)代入上式得

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{H}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

---

①　向量场的散度与旋度参阅《学习指南》1.2.2.

而 $\mathbf{rot\ rot}\ \boldsymbol{H}=\mathbf{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{H}-\Delta\ \boldsymbol{H}$,且 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\mathrm{div}\ \boldsymbol{B}=0$,所以最后得到 $\boldsymbol{H}$ 所满足的方程为

$$\Delta\boldsymbol{H}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

同理,若消去 $\boldsymbol{H}$ 即得 $\boldsymbol{E}$ 所满足的方程

$$\Delta\boldsymbol{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

如果介质不导电($\sigma=0$),则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{H},\tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{E},\tag{1.16}$$

(1.15)与(1.16)是以向量函数表示的三维波动方程.若用向量函数的分量来表示,则每个方程就代表一个方程组.

从方程(1.11)与(1.12)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程.事实上,以(1.12)代入(1.11)得

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D}=\mathrm{div}\ \varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}=\rho,$$

而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位 u 之间存在关系

$$\boldsymbol{E}=-\ \mathbf{grad}\ u,\tag{1.17}$$

所以可得

$$\mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ u=-\frac{\rho}{\varepsilon},$$

或

$$\Delta u=-\frac{\rho}{\varepsilon}.\tag{1.18}$$

这个非齐次方程称为**泊松(Poisson)方程**.

如果静电场是无源的,即 $\rho=0$,则(1.18)变成

$$\Delta u=0,\tag{1.19}$$

这个方程称为**拉普拉斯方程**.

例 4 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化,所以解决传热问题都要归结为求物

体内温度的分布，现在我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程.与例 1 类似，我们不是先讨论一点处的温度，而应该先考虑一个区域的温度.为此，在物体中任取一闭曲面 S，它所包围的区域记作 V（图 1-3）.假设在时刻 t 区域 V 内点 $M(x,y,z)$ 处的温度为 $u(x,y,z,t)$，$\boldsymbol{n}$ 为曲面元素 ΔS 的法向量（从 V 内指向 V 外）.

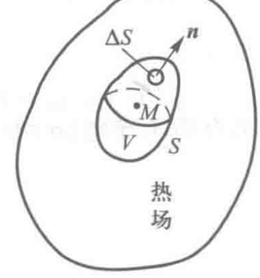

图 1-3

由传热学中**傅里叶（Fourier）实验定律**可知，物体在时间段 $\mathrm{d}t$ 内，流过一个面积微元 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$、曲面面积 $\mathrm{d}S$ 以及物体温度 u 沿曲面 $\mathrm{d}S$ 的法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q &= -k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\ &= -k\ (\mathbf{grad}\ u)_n\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\ &= -k\ \mathbf{grad}\ u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $k=k(x,y,z)$ 称为物体的热传导系数，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{n}$，当物体为均匀且各向同性的导热体时，$k$ 为常数.

上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向即 $\mathbf{grad}\ u$ 的方向相反而产生的.这就是说，当 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{n}>(<)0$ 时，物体的温度沿 $\boldsymbol{n}$ 的方向增加（减少），而热流方向却与此相反，故沿 $\boldsymbol{n}$ 的方向通过曲面的热量应该是负（正）的.

利用上面的关系，从时刻 t_1 到时刻 t_2，通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_S k\ \mathbf{grad}\ u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)\mathrm{d}t.$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化，在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 内区域 V 内各点温度从 $u(x,y,z,t_1)$ 变化到 $u(x,y,z,t_2)$，则在 $[t_1,t_2]$ 内 V 内温度升高所需要的热量为

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V,$$

其中 c 为物体的比热，ρ 为物体的密度，对均匀且各向同性的物体来说，它们都是常数.

由于热量守恒，流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量，即