九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·吴传生主编

教你用更多的自信面对未来！

经济数学

线性代数（第三版）同步辅导及习题全解

主编 高宇

一书三用

同步辅导+考研复习+教师备课

扫码在线阅读电子书，让你的学习更简单！

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济数学——线性代数（第三版）同步辅导及习题全解

主　编　高　宇

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版，吴传生主编的《经济数学——线性代数》（第三版）一书配套的同步辅导和习题全解辅导书。

本书共 7 章：线性方程组的消元法和矩阵的初等变换，行列式、克拉默法则，矩阵的运算，线性方程组的理论，特征值和特征向量、矩阵的对角化，二次型，应用问题。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习要求、知识点归纳、重点与难点、典型例题与解析、考研真题解析、习题解析、总习题、小结 8 部分内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽、简明易懂。

本书可作为高等院校“经济数学——线性代数”课程的辅导教材，也可作为研究生入学考试备考辅导教材，同时可供教师备课命题参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学. 线性代数（第三版）同步辅导及习题全解/高宇主编. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2018.5
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-6491-6

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教学参考资料②线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①F224.0②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第117341号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：焦艳芳　孟宏　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 经济数学——线性代数（第三版）同步辅导及习题全解 JINGJI SHUXUE——XIANXING DAISHU（DI-SAN BAN） TONGBU FUDAO JI XITI QUANJIE
作　　者	主 编 高 宇
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	三河航远印刷有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　11.75 印张　260 千字
版　　次	2018 年 5 月第 1 版　2018 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	0001—5000 册
定　　价	23.80 元

前　言

PREFACE

吴传生主编的《经济数学——线性代数》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出等特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程、掌握更多的知识,我们根据多年教学经验编写了这本辅导用书,旨在帮助广大读者理解基本概念、掌握基本知识、学会基本解题方法和技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到"经济数学——线性代数"这门课程的特点,在内容上作了以下安排:

1. 学习要求。简单扼要地说明本章学习目标,明确学习任务。

2. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。

3. 重点与难点。梳理本章重难点,帮助记忆。

4. 典型例题与解析。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

5. 考研真题解析。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

6. 习题解析。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。对教材中的课后习题给出了详细解答。

7 总习题。对教材的总习题给出了详细解答。

8. 小结。对本章内容进行总结。

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏甚至错误之处,恳请广大读者和专家批评指正。如有疑问,请联系我们(微信:JZCS15652485156 或 QQ:753364288)。

编者

2018 年 1 月

CONTENTS

前言

第一章　线性方程组的消元法和矩阵的初等变换 …… 1

学习要求 …… 1
知识点归纳 …… 1
重点与难点 …… 2
典型例题与解析 …… 2
考研真题解析 …… 5
习题解析 …… 8
总习题 …… 13
小结 …… 15

第二章　行列式　克拉默法则 …… 17

学习要求 …… 17
知识点归纳 …… 17
重点与难点 …… 20
典型例题与解析 …… 21
考研真题解析 …… 27
习题解析 …… 29
总习题 …… 39
小结 …… 42

第三章　矩阵的运算 …… 43

学习要求 …… 43

CONTENTS

知识点归纳 ………… 43
重点与难点 ………… 47
典型例题与解析 ………… 47
考研真题解析 ………… 52
习题解析 ………… 56
总习题 ………… 72
小结 ………… 75

第四章　线性方程组的理论 ………… 76

学习要求 ………… 76
知识点归纳 ………… 76
重点与难点 ………… 80
典型例题与解析 ………… 80
考研真题解析 ………… 84
习题解析 ………… 90
总习题 ………… 104
小结 ………… 109

第五章　特征值和特征向量　矩阵的对角化 ………… 110

学习要求 ………… 110
知识点归纳 ………… 110
重点与难点 ………… 113
典型例题与解析 ………… 113
考研真题解析 ………… 118

目录

CONTENTS

习题解析 …… 123
总习题 …… 131
小结 …… 139

第六章　二次型 …… 140

学习要求 …… 140
知识点归纳 …… 140
重点与难点 …… 142
典型例题与解析 …… 142
考研真题解析 …… 145
习题解析 …… 149
总习题 …… 160
小结 …… 166

第七章　应用问题 …… 167

学习要求 …… 167
知识点归纳 …… 167
重点与难点 …… 168
典型例题与解析 …… 168
习题解析 …… 171
小结 …… 180

第一章

线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

学习要求

1. 理解线性方程组的概念，了解齐次线性方程组和非齐次线性方程组，掌握线性方程组的线性组合，包括加法、常数乘法.

2. 掌握消元法求解线性方程组.

3. 理解矩阵的概念，线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

4. 熟练掌握初等变换、等价矩阵的性质，能够将矩阵转化为标准形矩阵.

知识点归纳

线性方程

用消元法解线性方程组，一般是通过初等变换将方程组的系数矩阵变换为阶梯矩阵，然后求解.

矩阵的初等行变换

(1) 对调矩阵的两行(对调第 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$).

(2) 以非零常数 k 乘矩阵某一行的各元(第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$).

(3) 把某一行所有的元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$)，初等变换包括初等行变换和初等列变换.

等价矩阵

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 不难验证,矩阵之间的等价具有下列性质:

(1) 自反性:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$.

(2) 对称性:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(3) 传递性:若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

系数矩阵等价的齐次线性方程组同解,增广矩阵等价的非齐次线性方程组同解.

重点与难点

1. 在解线性方程组时,所有的初等变换都是行变换,消元法也是行之间的消元.

2. 在利用等价关系解线性方程组时,必须是经过初等行变换得到的等价矩阵.

典型例题与解析

例 1 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0,\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0.\end{cases}$$

【分析】 求解齐次线性方程组,首先将其系数矩阵进行初等行变换,化为行最简矩阵,然后求解行最简矩阵所对应的线性方程组的解,便可求得原方程组的解(利用等系数矩阵等价的齐次方程组同解的性质).

【解】 对齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换,化为行最简矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

原方程组的同解方程组为$\begin{cases}x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4,\\x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4.\end{cases}$

令 $x_3=C_1,x_4=C_2$,则原方程组的解可表述为$\begin{cases}x_1=2C_1+\dfrac{5}{3}C_2,\\x_2=-2C_1-\dfrac{4}{3}C_2\\x_3=C_1,\\x_4=C_2.\end{cases}(C_1,C_2\in\mathbf{R})$,

写成向量形式$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2C_1+\frac{5}{3}C_2\\-2C_1-\frac{4}{3}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}(C_1,C_2\in\mathbf{R})$.

例 2 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4,\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0.\end{cases}$$

【分析】 解非齐次线性方程组,对其增广矩阵进行初等行变换,所得到的等价矩阵对应的方程组与原方程组同解.

【解】 对非齐次线性方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换,转化为最简形矩阵.

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\0&-16&24&28&4\\0&4&-6&-7&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{r_2+4r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

令$\begin{cases} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$($C_1, C_2$ 为任意值),则原方程组的解可表述为$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}C_1 - \frac{3}{4}C_2 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2 - \frac{1}{4}, \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$

写成向量形式$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}C_1 - \frac{3}{4}C_2 + \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2 - \frac{1}{4} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$($C_1, C_2 \in \mathbf{R}$).

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

【分析】 在对增广矩阵进行初等行变换时应注意,非齐次线性方程组可能会无解.

【解】 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

由第三行所给出的方程 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$ 无解,则原方程组无解.

例 4 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix},$$

试求(1)$\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵;(2)$\boldsymbol{A}$ 的标准形.

【解】 (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - \frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&-2&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&7&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{7}]{r_1-\frac{5}{14}r_3}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&0&0\\0&0&1&\frac{5}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 的最简形矩阵进行初等列变换：

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4+\frac{2}{7}C_1]{C_2+2C_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_3]{C_4-\frac{5}{7}C_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的标准形矩阵.

考研真题解析

1 (2010 年第 20 题) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ,a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

【分析】 由非齐次线性方程组有两个解，可推出无穷多解，已知系数矩阵不满秩，行列式为零，可求出 λ 的值，由方程组有解可求出 a；对增广矩阵进行初等行变换，化为行最简形矩阵，可以求得方程组的通解.

【解】 (1) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，于是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

对增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a+1-\lambda\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解.

当 $\lambda=-1$ 且 $a+1-\lambda=0$ 时，即 $\lambda=-1,a=-2$ 时，方程组有多个解.

(2) 将增广矩阵化为行最简形矩阵：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

2 (2005 年第 20 题) 已知齐次线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \quad 和 \quad (2)\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解,求 a,b,c 的值.

【分析】 方程组(2) 显然有无穷解,则方程组(1) 也有无穷解,可确定 a 的值;解出(1) 的通解,再代入方程组(2) 进而确定 b,c 值.

【解】 对方程组(1) 系数矩阵进行初等变换,化为行最简形矩阵:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$,可以推出 $a-2=0$,进而解得 $a=2$. 解得方程组(1) 的一个基础解系 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,代入方程组(2) 解得 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

当 $b=1,c=2$ 时,对方程组(2) 的系数矩阵进行初等行变换:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,可知与方程组(1) 同解.

当 $b=0,c=1$ 时,对方程组(2) 的系数矩阵进行初等行变换:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,可知此时方程组(1) 与(2) 不同解.

因此,当 $a=2,b=1,c=2$ 时,方程组(1) 与(2) 同解.

3 (2003年第9题)已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0\\ \qquad\qquad\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}\neq 0$,试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b$满足何种关系时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

【分析】 方程个数与变量个数相等时,系数行列式不等于0时,方程组仅有零解.

【解】 (1) 计算系数矩阵行列式:

$$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

当$b\neq 0$且$b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$时,$r(\mathbf{A})=n$,方程组仅有零解.

(2) 当$b=0$时,原方程组化为$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$.

由$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$可知$a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零. 不妨设$a_1\neq 0$,解得原方程组的一个基础解系为$\xi_1=(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\xi_n=(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

当$b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$时,因$b\neq 0$,原方程组的系数矩阵可化为:

$$\begin{pmatrix}a_1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

可得到原方程组的基础解系为$\xi=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

习题解析

习题1－1

1 解题过程 (1) 通过方程间的线性组合进行消元.

方程 2 加上方程 1 的两倍,方程 3 减方程 1,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_2 + x_3 = 3, \\ -6x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

方程 2 减方程 3,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 11x_2 = 11, \\ -6x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

得 $x_2 = 1$,代入方程 3,得 $x_3 = -2$.

将 $x_2 = 1, x_3 = -2$ 代入方程 1,得

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}, 即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 方程 2 和方程 3 消去 x_1,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 7x_2 + 5x_4 = 6, \\ 3x_2 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

由方程 2 消去 x_4,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_2 = 2, \\ 3x_2 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

进一步消元,消去方程 3 解 x_2,方程 1 消去 x_2 和 x_4,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = \dfrac{1}{2}, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}, \\ x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

令 $x_3 = C$(C 为任意实数),则原方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} - 2C, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 = C, \\ x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad 即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - 2C \\ \dfrac{1}{2} \\ C \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} (C \in \mathbf{R}).$$

(3) 消去方程 1 和方程 2 中的 x_1,得

$$\begin{cases} -10x_2 - x_3 = -30, \\ -10x_2 + 2x_3 = -14, \\ x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

消去方程 1 中的 x_2,得

$$\begin{cases} -3x_3 = -16, \\ -10x_2 + 2x_3 = -14, \\ x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

将 $x_3 = \dfrac{16}{3}$ 代入方程 2,得 $x_2 = \dfrac{37}{15}$,再代入方程 3,原方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5}, \\ x_2 = \dfrac{37}{15}, \\ x_3 = \dfrac{16}{3}. \end{cases} \quad 即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{37}{15} \\ \dfrac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

2 分析 判断齐次方程组是否存在非零解,主要看解集合中是否存在可任意取值的变量. 此外,通过消元法化简方程组,若方程组中方程数少于变量数,则存在非零解;否则,不存在非零解.

解题过程 (1) 方程 2 减方程 1 的两倍,得 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ -y + 3z = 0. \end{cases}$

进一步化简可得 $\begin{cases} x + 4z = 0, \\ y - 3z = 0. \end{cases}$ 显然存在非零解.

(2) 方程 3 减去方程 1 和方程 2,得$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+y+5z=0. \end{cases}$

方程数少于变量个数,显然存在非零解.

习题 1-2

1 分析 对线性方程组的系数矩阵式增广矩阵进行初等行变换,原方程组的解转化为求等价方程的解.

解题过程 (1) $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+\frac{6}{5}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & -\frac{22}{8} \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{5}]{r_3\times\frac{5}{11}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-\frac{1}{5}r_3]{r_1-2r_2-\frac{3}{5}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$

原方程解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{r_1+\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_3\times(-\frac{1}{10})} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$

原方程组的同解方程组为