一部用怀疑眼光探究高等数学的手边书

《高数笔谈》姊妹篇

工数笔谈

GONG SHU BI TAN

谢绪恺 编著

数学问题工程化 工程问题数学化

東北大學出版社
Northeastern University Press

工数笔谈

谢绪恺　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

工数笔谈 / 谢绪恺编著. —沈阳：东北大学出版社，2018.12
ISBN 978-7-5517-2067-0

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. ①工程数学 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 287785 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路三号巷 11 号
邮编：110819
电话：024-83687331（市场部） 83680267（社务部）
传真：024-83680180（市场部） 83680265（社务部）
网址：http://www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170 mm×240 mm
印　　张：13.25
字　　数：252
出版时间：2018 年 12 月第 1 版
印刷时间：2018 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑：向　阳　孙　锋
责任校对：刘乃义　邱　静
封面设计：潘正一
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-2067-0　　定　价：48.00 元

序 言

该讲的话，已经在《高数笔谈》的前言中一吐无遗，本无言可说。可是，念想着工程数学毕竟并非高等数学，只得再补充两点。

第一，工程数学比较难学，为帮助初学者易于理解，方便记忆，更需时刻联系实际，不免存在牵强附会之处，务请指正。

第二，某些概念比较抽象，初看之后，只能见其“一斑”，为让读者能窥其“全貌”，只好不厌其烦，反复重述，不免存在啰嗦絮聒之处，敬希赐示。

在编写本书过程中，笔者不断得到东北大学蒋仲乐教授的关怀和帮助，对此表示衷心的感谢。同时，上海交通大学胡毓达教授、东北大学王贞祥教授、淮阴工学院盖如栋教授、东北大学外聘王殿辉教授对本书提出了一系列宝贵的意见，笔者一并深致谢意。

在编写本书过程中，笔者常怀“士为知己，女为悦己”之心，一是归之于东北大学出版社的倾力相扶，当然也有作为老教师理应为莘莘学子奉献余力的心愿。而本书能如期杀青并与读者见面，又应归功于向阳副社长、王钰慧副编审和刘乃义编辑，笔者在其长期、全方位的帮助下，坐收事半功倍之硕果。

最后，敬盼翻阅过本书的学者学子多提意见，甚至批评，这才是给予笔者最实惠的赠品，将大大有利于笔者今后的写作。

编著者
2018年7月

《高数笔谈》前言

从1950年我走上高等学校讲台，到2005年走下讲台，屈指算来，整整55年。年复一年，高等数学我不知教过多少遍，还编写过讲义，出版过教材。

偶然翻阅一本高等数学教材，令我十分惊诧，自己对其中的许多理论证明虽似曾相识，却已茫然。联想教过的学生，他（她）们还能留存几许？作为老师，总觉不安。

原因是多方面的，主要在于：我国现行的高等数学教材品种单一，且偏重演绎推理，很难兼顾工科学生的特点。因此，常事倍而功半。有鉴于此，为了安心，竟不自量力，决定写本高等数学参考资料，其主旨是“数学问题工程化，工程问题数学化”。直白地说，就是使工科数学通俗化，接地气，成为“下里巴人”。所以，本书多是树根，少有枝蔓，不分开闭区间，罔视左右导数，用到的函数不但连续，而且光滑，如此等等。目的是避免工科读者误入歧途，以便早日登堂入室。

本书第一步是希望读者知晓工科数学主要内容的实际含义是什么；第二步是启发读者去怀疑并思考这是为什么；第三步是盼望读者敢为人先做点什么。坦诚地讲，笔者也正在前行，三步并未走全，愿与大家共勉！

在本书的编写过程中，笔者不断得到东北大学杨佩祯教授的关怀和支持，对此表示衷心的感谢。同时，北京航空航天大学李心灿教授、哈尔滨工业大学吴从炘教授、东北大学张国范教授对书中部分章节提出了许多宝贵意见，笔者对此一并深致谢意。

本书得以出版，除了东北大学张庆灵教授、天津大学张国山教授的帮助外，东北大学出版社的向阳副社长应该是功不可没的。因此，希望读者看过本书之后，多提修改意见，促使笔者不断前进，以免辜负本书所有参与者的期望。

编著者

2016年10月

目 录

第1章　傅里叶级数

走路要寻捷径，解题也是如此。一是想将复杂问题简单化，二是想将所有问题标准化。大家已经学过的泰勒级数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k \\
&= f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \\
&\quad \cdots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \cdots
\end{aligned}
$$

把一个复杂的函数 $f(t)$ 标准化为由幂函数 t^k 所组成的级数，两者兼而有之，十分完美，便是一个很好的例子。

无独有偶，另一级数——傅里叶级数与之异曲同工，且后来居上，把一个复杂的周期函数 $f(t)$ 标准化为由三角函数 $\sin n\omega t$ 和 $\cos n\omega t$ 所组成的级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

此级数的理论价值暂且不论，只要意识到，所有的波，不管是声波、光波、电波都能用三角函数 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 来表述，便可窥知其在科技领域的应用是异常广泛的。这就是本书即将对其进一步讨论的原因。

1.1　概述

设有函数 $y = x(t)$，其导数

$$\dot{x}(t) = f(t)$$

试求 $x(t)$。这并不难，根据上式直接可得

$$x(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$$

即 $\dot{x}(t)$ 的原函数。据此可知，对不同的函数 $f(t)$，将取不同的积分，不仅费事，且多数积分是无法进行到底的。能否想点其他办法呢？

① 将上式中的函数 $f(t)$ 展成泰勒级数，则在任何情况下，至少能得到函数 $x(t)$ 的泰勒级数表达式。

② 将函数 $f(t)$ 展成傅里叶级数，则得到 $x(t)$ 的傅里叶级数表达式。

③ 试问，函数 $f(t)$ 还有无其他表达方式？回想一下，在求函数 $f(t)$ 的定积分时，是否见到过如图1-1所示图形？

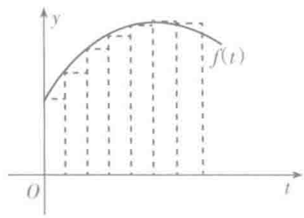

图1-1

从图1-1可见，函数 $f(t)$ 已转变成一系列细长小矩形之和。这当然是近似的，详情在定积分中讲过，不再重复。但由此不难得到启示：函数 $f(t)$ 能转变成一系列小矩形之和，自然也能转变成其他小几何图形之和。

下面将函数 $f(t)$ 转变成一系列小三角形之和，如图1-2所示。此外，还有无其他可能？读者不妨一试。如有兴趣，可就图1-2求函数 $f(t)$ 的定积分，这是个值得思考的练习。

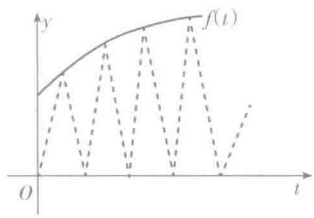

图1-2

综上所述，很容易作出判断：函数 $f(t)$ 的表达方式可谓无穷无尽！究竟选用哪种，当然得视具体情况而定。

开始时，给出了方程

$$\dot{x}(t)=f(t)$$

欲求函数 $f(t)$ 的原函数 $x(t)$ 。事实上，是想解决更一般的问题。例如，求下述微分方程

$$2\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t)$$

的解。在这种情况下，经过分析就会明白，宜将函数 $f(t)$ 展成傅里叶级数。其中缘由，看完下面的例子便知端倪。

易知，方程

$$\dot{x}(t)=\sin t$$

的解为 $x(t)=-\cos t+c$ ，式中 c 是个常数。据此，通过简单运算，则可得出方程

$$\dot{x}(t)=a_n\sin nt$$

的解为 $x(t)=-\dfrac{a_n}{n}\cos nt+c$ 。当然，这样的解说并非全面的。

1.2 傅里叶级数

傅里叶经过多年精心研究，于1811年向法国科学院呈交了一篇论文，证实任何的周期函数都可展成由一系列的三角函数组成的级数，现称傅里叶级数。对此，分两种情况阐述如下。

1.2.1 周期等于 2π

在中学读书时学过，$\sin t$ 和 $\cos t$ 都是周期等于 2π 的三角函数。$\sin nt$ 和 $\cos nt$ 都是周期等于 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的函数，不过说它们的周期等于 2π 也不为过。这一点，正如图1–3所示。正弦函数是奇函数，而余弦函数是偶函数。此外，它们还具有一项重要的属性：相互正交。

何谓正交？最初是指两条直线，若其间的夹角等于直角，则称两者相互垂直，也称相互正交。现时常用的坐标系，因坐标轴相互垂直，而称为正交坐标系，如图1–4所示。

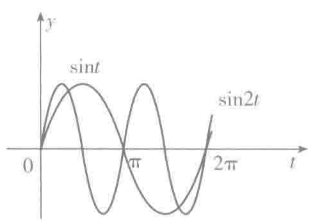

图1–3

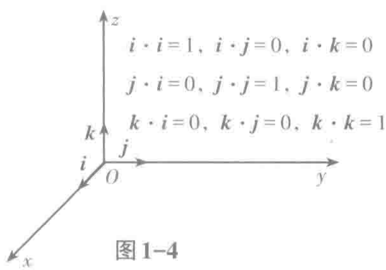

图1–4

从图1–4可见，两个向量，如$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$或$\boldsymbol{k}$，其间的夹角等于直角，即二者的数量积等于零，同样称为相互正交。事后，相互正交的概念被推广到函数。设有两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$，其乘积 $f(t)\cdot g(t)$ 在一特定区间 $[0, L]$ 上的积分等于零，即

$$\int_0^L f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t=0 \tag{1-1}$$

则称函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 相互正交，而式（1–1）则暗寓函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 为“向量”，而其乘积的积分为两者的数量积。关于此，在第3章还要深谈。

上文提出，正弦函数和余弦函数具有“相互正交”的属性，果真如此？现在有了标准，正好看个明白，而经过计算，一下子就证实了等式（1–2）至等式（1–4）：

$$\int_0^{2\pi}\sin nt\cdot\cos mt\,\mathrm{d}t=0 \tag{1-2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{当} n = m = 0 \text{时} \\ \pi, & \text{当} n = m > 0 \text{时} \\ 0, & \text{当} n \neq m \text{时} \end{cases} \tag{1-3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi, & \text{当} n = m = 0 \text{时} \\ \pi, & \text{当} n = m > 0 \text{时} \\ 0, & \text{当} n \neq m \text{时} \end{cases} \tag{1-4}$$

式中n和m是等于或大于零的整数。

上文说过，函数可视作向量，其乘积的积分可视作两个函数的数量积。依此，将式（1-2）、式（1-3）、式（1-4）逐一同式（1-1）对比，不难确定：正弦函数系列$\sin nt$和余弦函数系列$\cos mt$（n和m的意义同上）合起来的整个函数系列是相互正交的，也就是说，构成了一个正交函数系。其含义深远，现择要叙述如下。

众所周知，单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$构成了一个正交系。因此，任何一个三维向量$\boldsymbol{a}$都可用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$表示为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

且

$$a_1 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}, \quad a_2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}, \quad a_3 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

借助等式（1-5）和（1-6），并联想到函数$f(t)$也可视作向量，加之由正弦函数系列与余弦函数系列合成的正交函数系，记作Ω，自然会猜想：函数$f(t)$是否能像三维向量$\boldsymbol{a}$展开成式（1-5）那样，也展成正交系Ω中各项之和呢？

时间已经过去了两百多年，傅里叶当时是如何想的已无从得知，但他确实在1811年前后证实了上述猜想，开创性地给出了周期为2π的函数$f(t)$的展开式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1-7}$$

式（1-7）就是久负盛名的傅里叶级数，式中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \, \mathrm{d}t \tag{1-8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \, \mathrm{d}t \tag{1-9}$$

有兴趣的读者不妨将傅里叶级数（1-7）同三维向量的展开式（1-5）作个比较，就会意识到：两者在概念上是一致的。式（1-8）和式（1-9）与式（1-6）比较，也是如此。不过，就内涵而言，傅里叶级数远为宽广，并存在如下定理。

定理1.1 设函数$f(t)$是以2π为周期的周期函数，且

① 单值连续，或只存在有限个第一类间断点；

② 在一个周期内只存在有限个极值。

则函数 $f(t)$ 的傅里叶级数收敛。当 t 是连续点时，级数收敛于 $f(t)$；当 t 是间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}\big(f(t+0)+f(t-0)\big)$。

在定理中，函数 $f(t)$ 所附加的条件称为狄利克雷（Dirichlet）条件，以保证其傅里叶级数处处收敛。至于定理的证明，笔者一无所知，不敢妄言，仅举例如下。

例 1.1　试将周期函数

$$f(t)=\begin{cases}-1, & \text{当} -\pi \leqslant t<0 \text{时} \\ 1, & \text{当} 0 \leqslant t<\pi \text{时}\end{cases}$$

展成傅里叶级数，其图形如图 1-5 所示。

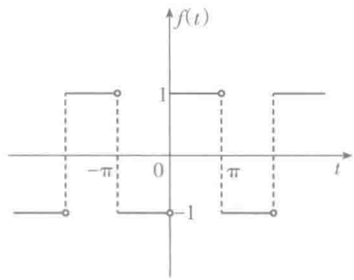

图 1-5

解　函数 $f(t)$ 的傅里叶级数如式（1-7）所示。现在针对给定的函数求其中的系数 a_n 和 b_n。就例 1.1 而言，利用式（1-8），得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nt)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

利用式（1-9），得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nt)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \end{aligned}$$

从上式可知，余弦函数的系数 a_n 全部等于零；正弦函数的系数 b_n，当 n 为偶数时等于零，当 n 为奇数时等于 $\frac{4}{n\pi}$。据此，得如图 1-5 所示方形波函数的傅里叶级数。

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}+\cdots\right]$$

读者可能已经在想，上式中为什么缺少余弦函数？请给出自己的答案。此外，在上式中令 $t=\frac{\pi}{2}$，得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

这可用来计算圆周率 π 的近似值，但并不理想。

例1.2 求如图1–6所示三角形波周期函数的傅里叶级数。

解 首先，求图1–6所示函数 $f(t)$ 的表达式。从图1–6所给定的条件，易知

$$f(t)=\begin{cases}|t|, & \text{当}-\pi\leqslant t<0\text{时}\\ t, & \text{当}0\leqslant t<\pi\text{时}\end{cases}$$

其次，求傅里叶级数（1–7）中的常数项 $\frac{a_0}{2}$。为此，直接对式（1–7）两边积分，积分区间为 $[-\pi,\ \pi)$，即函数 $f(t)$ 的一个周期，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t$$

$$2\int_0^{\pi}t\mathrm{d}t=a_0\pi+0$$

由上式，有 $a_0=\pi$。

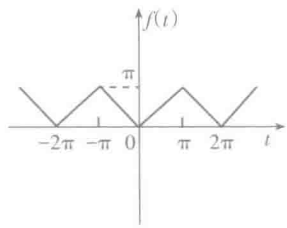

图1–6

再次，求余弦函数的系数 a_n，借助式（1–8），得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{n}\sin nt+\frac{1}{n^2}\cos nt\right)\Bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi n^2}\cos nt\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\\&=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2}, & \text{当}n\text{为奇数时}\\ 0\ , & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}\end{aligned}$$

借助式（1–9），得

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}|t|\sin nt\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin nt\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)\sin nt\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin nt\,\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

综合上述结果，得三角形波周期函数 $f(t)$ 的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots\right)$$

实际上，单凭直观，就能判定上面关于系数 b_n 的积分必然等于零，道理何在?

（1）偶函数和奇函数

不言而喻，偶函数的傅里叶级数只能包含余弦函数，因余弦函数是偶函

数，所以，余弦函数的系数 a_n（a_0例外）一定等于零，如例1.1。

补充几句，偶函数在一个周期上的积分等于2倍其在半个周期上的积分，如例1.1求系数 b_n 时，其中的被积函数 $f(t)\sin nt$ 正是偶函数，便可直接有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

奇函数在一个周期上的积分一定等于零，如例1.2求系数 b_n 时，其中的被积函数 $f(t)\sin nt$ 正是奇函数，所以说凭直观判断就知道系数 b_n 的积分一定等于零。最后，建议读者画出例1.1和例1.2中函数的图形，以加深理解。

再说一个问题，已知例1.2中函数的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots\right) \tag{1-10}$$

例1.1的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}+\cdots\right] \tag{1-11}$$

两相对比，是否发现了什么问题?

（2）傅里叶级数的导数

将上列两个级数仔细对比之后，马上就会发现：后一个级数的每一项恰好是前一个级数逐项求导的结果！为便于区分，改记式(1-10)中的函数为 $f_2(t)$，式(1-11)中的为 $f_1(t)$。以上表明

$$\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=f_1(t) \tag{1-12}$$

式（1-12）有双重含义：一是 $f_2(t)$ 的傅里叶级数的导数就是 $f_1(t)$ 的傅里叶级数，这已经交代过了；二是 $f_2(t)$，即三角形波周期函数，其在周期 $(-\pi,\ \pi)$ 内的导数恰好等于同一周期 $(-\pi,\ \pi)$ 内的 $f_1(t)$，即方形波周期函数。这并非偶然，实际上存在如下定理：

定理1.2　设函数 $f_2(t)$ 和 $f_1(t)$ 都是周期函数，满足狄利克雷条件，且函数 $f_2(t)$ 在周期内的导数等于函数 $f_1(t)$，则函数 $f_2(t)$ 的傅里叶级数逐项求导后的级数便是函数 $f_1(t)$ 的傅里叶级数。

关于傅里叶级数的积分，同样存在类似的结论，但涉及积分常数，不易处理，又非重点，不再多叙。

在结束本节之前，请回顾讲过的内容，做个猜想：直接写出如图1-7所示函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶级数。

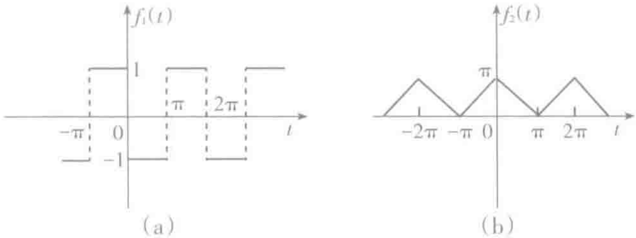

图 1–7

1.2.2 周期等于任意数

前面讲过，函数 $\sin t$ 和 $\cos t$ 的周期都是 2π，请回答，函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 的周期是多少，其中ω为某一正数？易知，函数此时的周期（记为T）为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\quad 或 \quad \omega T=2\pi$$

关于上式，在下节会有更多的说明。为将周期等于T的函数 $f(t)$ 展成傅里叶级数，当务之急是验证函数系列 $\sin n\omega t$和 $\cos n\omega t$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是否也像函数系列 $\sin nt$和 $\cos nt$ 一样同属于正交函数系？经过直接计算后，有

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin m\omega t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t=0 \tag{1–13}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin m\omega t\cdot\sin n\omega t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0,\ 当n=m=0时\\ \dfrac{\pi}{\omega},\ 当n=m>0时\\ 0,\ 当n\neq m时\end{cases} \tag{1–14}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos m\omega t\cdot\cos n\omega t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\omega},\ 当n=m=0时\\ \dfrac{\pi}{\omega},\ 当n=m>0时\\ 0,\ 当n\neq m时\end{cases} \tag{1–15}$$

式（1–13）、式（1–14）、式（1–15）中，n和m是等于或大于零的整数。将上列结果与式（1–2）、式（1–3）和式（1–4）相比，立刻可知：函数系列 $\sin n\omega t$和 $\cos n\omega t$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是正交函数系。

有了上述验证的结论，则可以完全仿照将周期等于 2π 的函数展成傅里叶级数的做法，将周期等于T的函数 $f(t)$ 展成如下傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1–16}$$

其中

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{1–17}$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \tag{1–18}$$