应用技术型高等教育"十三五"精品规划教材

SHIYONG YUNCHOUXUE

实用运筹学

（第二版）

主　编◎邢育红　于晋臣

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

实用运筹学

（第二版）

主编 邢育红 于晋臣

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内容提要

根据运筹学的学科特点，本书对传统运筹学的内容和方法做了较大的改革. 在系统介绍运筹学的基本概念、基本原理、基本思想、基本方法的基础上，借助专业的优化软件Lingo来求解模型，特别突出解决实际问题的实用性.

全书共分8章，主要内容包括线性规划、运输问题、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论. 书中除了精选的例题外，每章后附有大量的习题，章末附有实用案例以供教学和自学用.

本书可作为普通本科院校和高职高专院校相关专业的教材，也可作为管理人员和工程技术人员的参考用书，还可以作为数学建模活动的培训用书和参赛学生的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

实用运筹学/邢育红，于晋臣主编．—2版．—北京：中国水利水电出版社，2019.1

应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

ISBN 978-7-5170-7375-8

Ⅰ.①实… Ⅱ.①邢… ②于… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第016317号

书　　名	应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材 **实用运筹学（第二版）SHIYONG YUNCHOUXUE**
作　　者	主编　邢育红　于晋臣
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www. waterpub. com. cn E-mail：sales@waterpub. com. cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印　　刷	三河市龙大印装有限公司
规　　格	170mm×240mm　16开本　13.25印张　252千字
版　　次	2014年8月第1版 2019年1月第2版　2019年1月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	36.00元

第二版前言

运筹学是20世纪40年代发展起来的一门应用学科，是管理科学和现代化管理方法的重要组成部分，主要运用科学方法尤其是数学方法研究现实世界中各种运行系统的最优化问题，目的是为决策者提供科学的决策依据. 随着管理科学和计算机技术的发展，运筹学已广泛应用于国防、工业、农业、交通运输业、商业、政府机关等各个部门和领域. 运筹学课程已逐渐成为管理科学、系统科学、工程管理、交通运输、物流工程等专业的专业基础课.

运筹学是一门应用性很强的课程，对于应用领域的实际问题，建立的数学模型大多比较复杂，人工计算要耗费大量的时间，很难得出最优解. 随着计算机技术的普及，利用软件求解运筹学中的计算问题势在必行. 另一方面，社会发展对应用型人才提出了更高需求，越来越多的运筹学教师意识到，运筹学的教学应以引导学生在理解运筹学基本理论和方法的基础上提升学生的实践应用能力为首要目标.

本书是第二版，从总体上保持了第一版的基本体系与特点. 根据教学需要，增加线性规划的图解法、非线性规划的内容，去掉了决策论，更换了部分例题. 在系统介绍运筹学的基本原理、基本思想、基本方法的同时，更注重于培养学生解决实际问题的能力. 本书的特色主要体现在以下几个方面：

(1) 力求深入浅出，通俗易懂. 本书侧重点在于讲清楚运筹学的基本思想、方法、分析问题的思路，语言表达和内容选择上力求做到深入浅出，通俗易懂，避免烦琐的理论推导和计算，适于教学和自学.

(2) 传承经典，强调应用. 作为教材，本书在内容的选择、例题的安排等方面尽量选用运筹学的经典实例和实践中最常见的运筹学问题，同时吸收了近年来出现的一些最新应用成果.

(3) 注重学生实践能力的训练. 每章末配置了与实际应用相关的习题以及与本章内容联系紧密的案例，便于读者理解、巩固书中内容，提高解决实际问题的能力.

(4) 应用 Lingo 软件. 为了让读者实现用最快捷的方法解决问题，本书应用 Lingo 软件作为解决问题的工具. Lingo 软件操作比较简单，语言易学易用，演示版可以在 Lingo 公司网站免费获取，方便教师和学生使用.

本书各个部分内容具有一定的独立性，可根据专业所侧重的应用领域以及具体教学目的，有选择地组织教学内容.

全书共分8章，包括线性规划、运输问题、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论. 编写工作的具体分工如下：于晋臣编写了第1至4章，邢育红编写了第5至8章. 全书由于晋臣、邢育

红统稿.

在编写过程中，参考了大量文献，直接或间接引用了他们的部分成果，我们表示深深的谢意！山东交通学院教务处、理学院的领导与同事对本书的编写给予了热情的支持与指导，在此表示衷心的感谢！

限于编者水平有限，书中难免有不当或疏漏之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2018 年 12 月

目　录

第 1 章

线性规划

本章学习目标

- 了解线性规划模型的特点
- 理解线性规划解的概念
- 理解线性规划的对偶问题
- 熟练掌握线性规划问题的软件求解
- 熟练掌握线性规划的几个典型应用

1.1 线性规划问题及其数学模型

1.1.1 引例

本节将举两个简单实例，说明如何根据实际问题经过抽象来建立线性规划的数学模型.

1. 生产计划问题

例 1.1.1 某工厂在计划期内要安排生产 A、B 两种产品，已知生产单位产品所需设备台时及对甲、乙两种原材料的消耗，有关数据如表 1－1 所示. 问：应如何安排生产计划，使工厂获利最大?

表 1－1 生产单位产品所需设备台时及对甲、乙两种原材料的消耗

资源	A	B	可用资源
设备/台时	1	2	8
甲/kg	4	0	16
乙/kg	0	4	12
单位利润/百元	3	5	

解 现在建立这个问题的数学模型.

设 x_1、x_2分别为计划期内 A、B 两种产品的产量，z 为这两种产品的总利润，根据题意，显然有

$$z=3x_1+5x_2$$

使总利润 z 达到最大是该厂追求的目标，因此称上式为**目标函数**，而变量 x_1、x_2的值需要该厂进行决策，故称为**决策变量**.

由于生产 A、B 两种产品所需设备台时和对甲、乙两种原料的消耗分别不超过 8 台时和 16 kg、12 kg，则决策变量 x_1、x_2的值需满足：

$$x_1+2x_2\leqslant 8,\ 4x_1\leqslant 16,\ 4x_2\leqslant 12$$

由于这三个不等式的左边都是关于变量 x_1、x_2 的函数，因此称之为**函数约束**.

又因 A、B 两种产品的产量不能为负值，故 x_1、x_2 的取值还须满足以下限制条件：

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

称之为**非负性约束**.

函数约束与非负性约束统称为**约束条件**.

这样，该问题的数学模型可归结为：在上述约束条件下，确定变量 x_1，x_2的数值，使目标函数的函数值达到最大.

因此，该问题的数学模型可表示为

$$\max z=3x_1+5x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 & (1)\\ 4x_1\leqslant 16 & (2)\\ 4x_2\leqslant 12 & (3)\\ x_1,\ x_2\geqslant 0 & (4)\end{cases}$$

其中，max 是英文 maximize（最大化）的缩写；s. t. 是英文 subject to（服从于，受约束于）的缩写.

一般的生产计划问题可描述如下：

某企业拟用 m 种资源 A_1，A_2，…，A_m生产 n 种产品 B_1，B_2，…，B_n. 已知第 i 种资源的数量为 b_i，每生产一个单位第 j 种产品所消耗的第 i 种资源的数量为 a_{ij}，每单位第 j 种产品售出后所得利润为 c_j. 问：该企业应如何拟定生产计划才能使总利润最大?

设 x_j为第 j 种产品 B_j的产量（$j=1,2,\cdots,n$），z 为总利润，则有下面的数学模型：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

2. 食谱问题

例 1.1.2 某医院的一位特需病人每天需要从食物中获取 2 500 kJ 热量、60 g 蛋白质和 900 mg 钙. 如果市场上只有 4 种食品可供选择，它们每千克所含的热量、营养成分和市场价格见表 1－2. 问医院应如何选购才能在满足营

养需求的前提下使购买食品的费用最小?

表1—2 4种食品每千克所含的热量、营养成分和市场价格

食品	热量/(kJ/kg)	蛋白质/(g/kg)	钙/(mg/kg)	价格/(元/kg)
鸡肉	1 000	50	400	15
鸡蛋	800	60	200	8
大米	900	20	300	6
白菜	200	10	500	2
每天需要量	≥2 500	≥60	≥900	

解 该类问题通常称为食谱问题,也称为营养配餐问题.

(1) 确定决策变量. 设 x_i($i=1$ 为鸡肉,$i=2$ 为鸡蛋,$i=3$ 为大米,$i=4$ 为白菜)为第 i 种食品的购买数量(kg).

(2) 确定约束条件. 由病人对食物热量、蛋白质和钙的最低要求可以确定下面的约束条件:

$$1\,000x_1+800x_2+900x_3+200x_4\geqslant 2\,500 \text{(热量约束)}$$

$$50x_1+60x_2+20x_3+10x_4\geqslant 60 \text{(蛋白质约束)}$$

$$400x_1+200x_2+300x_3+500x_4\geqslant 900 \text{(钙约束)}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0 \text{(各食品购买量不能为负)}$$

(3) 确定目标函数. 本问题的目标是购买食品的费用为最小,而总费用为

$$15x_1+8x_2+6x_3+2x_4$$

所以,目标函数为

$$z=15x_1+8x_2+6x_3+2x_4$$

从而,可得该问题的数学模型为

$$\min z=15x_1+8x_2+6x_3+2x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}1\,000x_1+800x_2+900x_3+200x_4\geqslant 2\,500\\50x_1+60x_2+20x_3+10x_4\geqslant 60\\400x_1+200x_2+300x_3+500x_4\geqslant 900\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$$

其中,min 是英文 minimize(最小化)的缩写.

一般的食谱问题可描述如下:

有 n 种食品,每种食品中含有 m 种营养成分. 已知第 $j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 种食品单价为 c_j,每天最大供量为 d_j;而每单位第 j 种食品所含第 $i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 种养分的数量为 a_{ij}. 假定某种生物每天对第 i 种营养成分的需求量至少为 b_i,对第 j 种食品的摄入量不少于 e_j,而每天进食数量限制在

$[h_1, h_2]$范围内. 试求该生物的食谱，既可以保证该生物的营养需求，又能使总成本最小.

设 x_j 为每天提供给该生物食用的第 j 种食品的数量，则该问题的模型可表示为

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \\ h_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant h_2 \\ e_j \leqslant x_j \leqslant d_j (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

1.1.2 线性规划模型的一般形式

通过对上述两个例子的具体分析，可发现这类问题的共同特征如下：

（1）每一个问题都可以用一组变量来表示某一方案，这组变量的定值就代表一个具体方案. 这组变量的取值往往要求非负，常常将其称为决策变量.

（2）存在有关的数据，同决策变量构成互不矛盾的约束条件，这些约束条件都可以表示为决策变量的线性等式或不等式.

（3）都有一个要求达到的目标，这个目标可以表示为关于决策变量的线性函数，通常称为目标函数. 按所考虑问题的不同，可要求目标函数实现最大化或最小化.

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划（Linear Programming，LP）的数学模型. 其一般形式为

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{1.1.1}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \qquad (1.1.2) \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant (\leqslant) 0 \text{ 或 } x_j \text{ 自由 } (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1.1.3) \end{cases}$$

式（1.1.1）为**最优化目标函数**，其中 $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ 称为**目标函数**；式（1.1.2）称为**函数约束**；式（1.1.3）中的 $x_j \geqslant 0$ 称为**非负性约束**，$x_j \leqslant 0$ 称为**非正性约束**；式（1.1.2）、式（1.1.3）统称为**约束条件**；$x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为**决策变量**. 一般说来，满足式（1.1.2）和式（1.1.3）的解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 有无穷多个，求解线性规划问题的目的就是从中找出一个能满足式（1.1.1）的解，作为该线性规划问题的最终决策.

a_{ij}、b_i、c_j 称为线性规划模型的参数，它们对于任一确定的线性规划模型

都是常数. 其中，a_{ij} 为技术系数，表示变量 x_j 取值为一个单位时所消耗的第 i 种资源的数量；b_i 为限额系数，表示第 i 种资源的拥有量；c_j 为价值系数，表示实际问题中的利润、产值、成本等价值.

综上所述，决策变量、目标函数和约束条件是线性规划模型的三要素，其中后两者都是关于前者的线性表达式；而线性规划模型就是由最优化的目标函数和约束条件这两部分构成的.

1.1.3 建立线性规划模型的步骤

总结 1.1.1 节中对实际问题建立数学模型的过程，可以得到一般线性规划问题建立模型的步骤如下：

(1) 理解要解决的问题，即弄清楚在满足什么条件下实现什么目标.

(2) 定义决策变量，即用一组变量（x_1，x_2，…，x_n）来表示解决问题的所有方案. 一旦该组变量的值确定了，就代表一个具体的方案，对于大多数实际问题而言，变量的取值通常非负.

(3) 列出约束条件，即将解决问题过程中所必须遵循的约束条件表示为决策变量的线性等式或不等式.

(4) 确定目标函数，即将问题所追求的目标表示为决策变量的线性函数，并根据实际问题的不同，将该函数最大化或最小化.

1.2 线性规划问题的图解法

图解法是指借助于几何图形来求解线性规划问题的一种方法. 这种方法简单直观，有助于领会线性规划的基本性质以及线性规划问题求解的基本原理.

1.2.1 图解法的步骤

下面以例 1.1.1 来说明图解法求解的过程.

1. 图示约束条件，确定可行域

例 1.1.1 的非负性约束

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0 \tag{4}$$

代表以 x_1 为横轴、以 x_2 为纵轴的直角坐标系的第一象限，首先画出它的图形，并适当选取单位坐标长度. 显然，满足该约束条件的解（对应坐标系中的一个点）均在第一象限内.

例 1.1.1 的三个函数约束为

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \tag{1}$$

$$4x_1 \leqslant 16 \tag{2}$$

$$4x_2 \leqslant 12 \tag{3}$$

先就式（1）说明这类约束图形的画法.

取式（1）的等式，得到

$$x_1+2x_2=8 \tag{5}$$

容易得到该直线的两个点，（8，0）和（0，4），过这两点画一条直线，即为式（1）的边界. 取原点（0，0）作为参照点，代入式（1）左端，得 $0+2\times0=0\leqslant8$，满足式（1），这说明原点是式（1）所代表图形内的一点. 由此可以断定：式（1）的图形为其边界式（5）及其左下方（包含原点）的区域.

类似地，可以分别画出式（2）、式（3）所表示的区域. 同时满足式（1）～式（4）的点为图 1－1 中凸多边形 $OABCD$ 所包含的区域（用阴影线标示），即为例 1.1.1 的可行域.

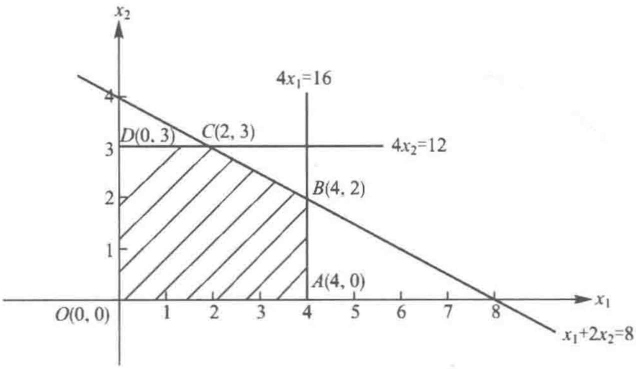

图 1－1

区域 $OABCD$（包括其边界）上的每一点，都是例 1.1.1 的线性规划模型的一个解，称为**可行解**. 区域 $OABCD$ 是该线性规划模型解的集合，称为**可行域**.

2. 图示目标函数

由于 z 是一个要优化的目标函数值，若随 z 的变化，由小到大适当地给 z 赋值，如令 $z=0$，15，30，45，… 可得到一族斜率为 $\left(-\frac{3}{5}\right)$ 的平行直线，由于位于同一直线上的点均具有相同的目标函数值，因而这族平行直线通常称为**等值线**，如图 1－2 所示. 取 z 的两个不同的值，画出两条平行线，再垂直于它们画一直线，取 z 值沿该直线递增的方向（$z=3x_1+5x_2$ 的梯度方向），即为 z 值增加最快的方向（在图 1－2 中指向右上方）.

3. 确定最优解

最优解是可行域中使目标函数达到最优的点，由于例 1.1.1 的目标要求为取最大，因此需要沿 $z=3x_1+5x_2$ 的梯度方向平行移动直线. 当代表目标函数 $z=3x_1+5x_2$ 的那条直线由原点开始向右上方移动时，z 值逐渐增大，一直

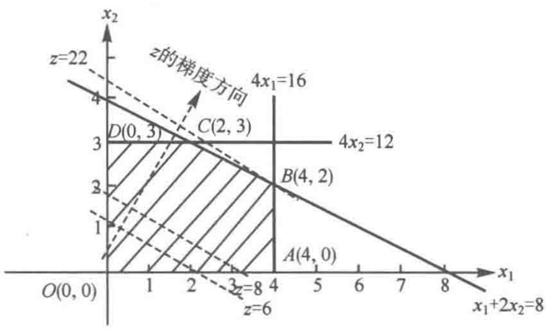

图 1－2

移动到代表目标函数的那条直线与约束条件形成的凸多边形 $OABCD$ 相切时为止，切点（B 点）就是代表最优解的点（图 1－2）．此时，若再继续向右上方移动，z 值虽然仍然可以继续增大，但在代表目标函数的直线上找不出一个点位于约束条件形成的凸多边形内部或边界上．

例 1.1.1 中，代表目标函数的直线与凸多边形的切点是**最优点** B，该点坐标可由求解直线方程 $x_1+2x_2=8$ 和 $4x_1=16$ 得到，为 $(x_1, x_2)=(4, 2)$．将其代入目标函数，算出相应于最优点 B 的目标函数值

$$z=3x_1+5x_2=3\times4+5\times2=22.$$

最优点的坐标值称为**最优解**，简称为**解**，记为 $\boldsymbol{X}^*=(x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{X}^*$ 对应的目标函数值称为**最优值**，记为 z^*．例 1.1.1 的最优解 $\boldsymbol{X}^*=(4, 2)^{\mathrm{T}}$，最优值 $z^*=22$，即最优生产方案为：生产 A 产品 4 件，B 产品 2 件，工厂获得最大利润为 22 百元．

1.2.2 线性规划问题求解的几种可能结果

对一般的线性规划问题，求解结果可能出现以下四种情况．

1. 唯一最优解

线性规划问题具有唯一最优解，是指该线性规划问题有且仅有一个既在可行域内、又使目标值达到最优的解．上例中求解得到问题的最优解是**唯一**的，就属于这种情况．

2. 无穷多最优解（多重最优解）

线性规划问题具有无穷多最优解，是指该线性规划问题有无穷多个既在可行域内又使目标值达到最优的解．

若将例 1.1.1 中的目标函数变为求 $\max z=2x_1+4x_2$，则表示目标函数中以参数 z 的这族平行直线与约束条件 $x_1+2x_2\leqslant8$ 的边界线平行．当 z 值由小变大时，将与线段 BC 重合．线段 BC 上任意一点都使 z 取得相同的最大值，该线性规划问题此时有无穷多最优解（多重最优解）．

3. 无界解

线性规划问题具有无界解，是指最大化问题中的目标函数值可以无限增大，或最小化问题中的目标函数值可以无限减小.

对下述线性规划问题

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1-3x_2\leqslant 3\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用图解法求解结果如图 1－3 所示. 从图 1－3 中可以看出，该问题可行域无界，目标函数值可以增大到无穷大. 这种情况即为无界解.

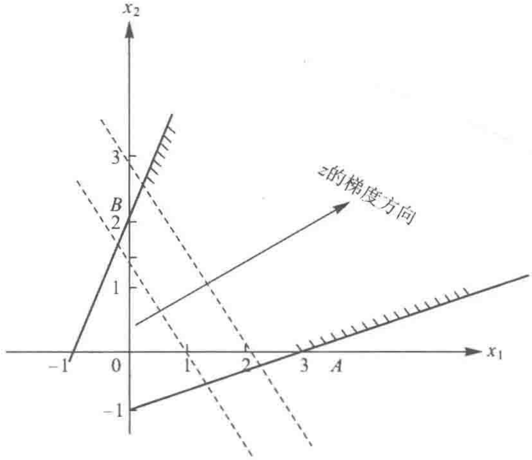

图 1－3

4. 无可行解

线性规划问题无可行解，是指线性规划问题中的约束条件不能同时满足，可行域不存在.

如果在例 1.1.1 的数学模型中增加一个约束条件 $-2x_1+x_2\geqslant 4$，该问题的可行域为空集，此时没有可行解，更不存在最优解.

其中，唯一最优解和无穷多最优解为**有最优解**，无界解和无可行解为**无最优解**. 当线性规划问题无最优解时，求解结果必为无界解和无可行解两种情形之一，此时，线性规划问题的数学模型肯定有错误：前者缺乏必要的约束条件，后者是有矛盾的约束条件（资源条件满足不了人们的要求），建模时应予以注意.

1.2.3 图解法的几点说明

应用图解法时，需要注意以下几点：

(1) 图解法是求解二维线性规划问题（问题只有两个决策变量）最简单