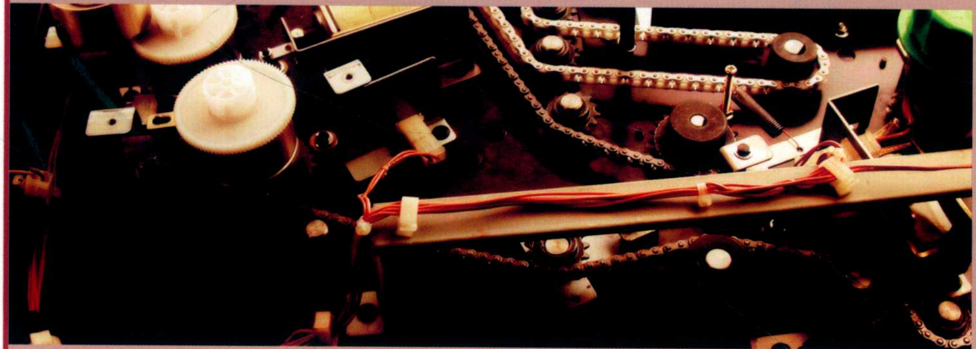
力学问题有限元分析方法
及其建模实践研究

谷骁勇　著



LIXUE WENTI YOUXIANYUAN FENXI FANGFA
JIQI JIANMO SHIJIAN YANJIU

中国原子能出版社

力学问题有限元分析方法及其建模实践研究

谷骁勇　著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

力学问题有限元分析方法及其建模实践研究 / 谷骁勇著. --北京：中国原子能出版社，2018.12

ISBN 978-7-5022-9564-6

Ⅰ. ①力… Ⅱ. ①谷… Ⅲ. ①力学—有限元分析—系统建模—研究 Ⅳ. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 287333 号

内容简介

本书将在简明概述有限元分析方法的基本理论的基础之上，深入讨论有限元分析方法在杆系结构、弹性力学平面问题、空间问题、轴对称问题、薄板问题、热传导问题、动力学问题、非线性问题中的具体应用，并以 ANSYS 平台为基础，研究有限元建模的具体实践案例。本书结构合理，条理清晰，内容丰富新颖，是一本值得学习研究的著作，可供相关工程技术人员参考使用。

力学问题有限元分析方法及其建模实践研究

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号　100048)
责任编辑	张　琳
责任校对	冯莲凤
印　　刷	三河市铭浩彩色印装有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	14.5
字　　数	260 千字
版　　次	2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-9564-6　　定　价　69.00 元

网址：http://www.aep.com.cn　　E-mail:atomep123@126.com

发行电话:010－68452845

前言

有限元的相关理论可追溯于 20 世纪 50 年代初，但由于有限元分析理论在应用时所涉及的运算量庞大，又缺乏有效的应用软件作支持，所以一直处于理论研究阶段，其应用不是很广泛。近年来，随着计算机辅助软件技术的快速发展，借助计算机辅助软件进行有限元分析与研究迅速成为应用领域的热点之一。

随着大型建造业需求的迅速发展，对高风险及大型工程进行可行性预研、可靠性分析及总体可信度论证或评估等工作显得越来越重要，如大型飞机舰船、高架路桥、跨海大桥和超高建筑等高风险工程项目。近几年，对产品材料与结构进行有限元分析与计算机辅助研究已成为提高研究效率、降低研发成本、提高产品性能及降低风险投入的有效手段之一。目前，ANSYS 作为一种大型通用型有限元分析软件，不仅能实现对实体结构进行静态和动态问题的有限元分析，还能进行热传导、流体流动、电磁学和波谱等方面的研究，同时具有多物理场的耦合计算功能，如热-磁、热-电、流-固和结构-声学等耦合问题的分析与计算，而且具有很好的系统兼容性。学习有限元分析的基础理论，掌握有限元分析方法，并通过 ANSYS 等软件实现工程应用，是当今工业制造技术发展的方向之一。

由于有限元法的理论性强、适用范围广、针对性强、建模过程复杂以及结果关联性高，所以初学者不易掌握。本书的特点是理论基础与实例解析相结合，理论计算与 ANSYS 计算相结合。即先以有限元的基本理论做引导，建立必要的知识背景，提高理论理解与应用能力；再以实例详解 ANSYS 的实现方法和步骤，最终提高上机实践能力。同时，内容的选择与编排做到理论基础知识的渐进性、理论与实际的关联性，有利于读者应用实践。

全书共 8 章。第 1 章为绪论，第 2 章介绍有限元分析的基本原理及杆系结构的有限元分析，第 3 章介绍弹性力学平面问题有限元分析，第 4 章介绍三维空间与轴对称问题有限元分析，第 5 章介绍等参数单元有限元分析，第 6 章介绍薄板与热传导问题有限元分析，第 7 章介绍动力学与非线性问题有限元分析，第 8 章介绍基于 ANSYS 平台的有限元建模及案例分析。

作者在多年研究的基础上，广泛吸收了国内外学者在力学问题有限元分析方法及其建模方面的研究成果，在此向相关内容的原作者表示诚挚的敬意和谢意。

本专著依托河南省科技厅关于2018年度河南省重点研发与推广专项支持项目，项目编号：182102210217。

由于作者水平有限，加之时间仓促，本书难免存在错误、遗漏之处，恳请读者批评指正。

作　者

2018年7月

目　录

第1章　绪　论

有限元法(Finite Element Method,FEM)是一种适用于大型或复杂物体结构的力学分析与计算的有效方法。本章简要介绍有限元法的引入、基本思想及特点、发展与现状等内容。

1.1　有限元分析方法的引入

有限元法是分析连续体的一种近似计算方法,简言之就是将连续体分割为有限个单元的离散体的数值方法。有限元分析方法(简称有限元分析)是计算机问世以后迅速发展起来的一种广泛用于工程实体建模、结构分析与计算的有效方法。

自然现象的背后都对应有相关的物理本质与事物规律,用数学方法对物理本质与事物规律进行描述可以得到普适性定律和特定性定理,以及各种形式的(如代数、微分或积分)数学方程,即数学模型。

对于一个实际的工程问题,建立数学模型时,不仅需要根据实际物理背景采用有效的数学方法,还要考虑求解的效率、结果的精度以及方法的适用性等因素,即分析方法。

例如,对力学等工程应用问题,通常涉及的变量有位移、应变和应力等;其涉及的数学模型通常有平衡方程,几何方程和物理方程(代数、微分或偏微方程);在实际应用中可能涉及的边界和初始(约束)条件有力边界条件和位移边界条件等。

常用的分析方法如下。

①对线性的和边界规则的简单问题,一般可以利用解析法得到精确解。解析解在系统的任何点上都是精确的。例如,在材料力学中,利用计算应力和位移的解析公式研究等截面杆、简支梁和轴等问题,在弹性力学中利用弹性力学公式解决压力集中、板弯曲和厚壁圆筒等问题。

②对于许多实际的工程问题,由于研究系统的庞大,使得微分方程、边界和初始条件的复杂性大大增加,一般难以得到它的精确解。对非线性的

和边界不规则等问题，一般得不到精确的解析解，只能利用数值法（如有限差分法、有限元法等）得到其近似解。值得注意的是，数值解只是在离散点（节点）上才等于或近似于解析解。

事物存在大小之分，也存在有限与无限之分。通常，一个连续体可以被看作由有限个被分割的元素近似组成。例如，古人在计算圆的周长或面积时，采用多等边形来逼近圆周或圆面积。等边形的边数越多，计算结果的精度也越高，但计算过程也会越复杂，同时，即便使用圆周率 π 计算，也永远得不到圆周长的精确值即真值。由此可见，在精度满足要求的情况下，用离散化或有限舍去等近似方法，可使复杂问题简单化。

有限元法是基于离散化法逼近原模型的思想，其中包括有限元分割（分段或离散化）、有限元模型和有限元求解。有限元分割是指将连续物体（无限自由度）分割成有限个数目的单元（称为有限自由度下连续物体的有限元）。有限元模型是指使用积分方法（而不是有限差分法的微分方法）对各有限元建立代数方程，再用这些有限的代数方程所构成的方程组来近似表示原系统模型，即用连续函数精确描述有限单元，用描述有限单元的函数方程组来近似描述整体系统。可见有限元分割在宏观上是离散的，而在微观（单元）上则是分段连续的。有限元求解是指对有限元模型的单元变量进行求解，并将其组合为整体系统的解。

1.2 有限元分析方法的基本思想及特点

1.2.1 有限元法的基本思想

有限元法的基本思想是将一个连续域离散化为有限个单元并通过有限个结点相连接的等效集合体。由于单元能按不同的连接方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

1.2.2 有限元法的特点

有限元法经过几十年的发展，已成为一种通用的数值计算方法。它具

有鲜明的特点，具体表现在以下方面。

①概念清楚，容易理解。

可以在不同的水平上建立起对该方法的理解。既可以通过直观的物理意义来学习，也可以从严格的力学概念和数学概念推导。

②适应性强，应用范围广泛。

有限元法可以用来求解工程中许多复杂的问题，特别是采用其他数值计算方法求解困难的问题。如复杂结构形状问题，复杂边界条件问题，非均质、非线性材料问题，动力学问题等。

③计算格式规范，易于程序化。

有限元法计算格式规范，用矩阵表达，方便处理，易于计算机程序化。

1.3　有限元分析方法的发展与现状

有限元法基本思想的提出，通常认为始于 20 世纪 40 年代。雷尼柯夫（Hrenikoff，1941）首次提出用桁架方法求解弹性问题。柯兰特（Courant，1943）采用三角形域内分段连续函数求解扭转问题，第一次用有限元法思想处理连续体问题。阿基里斯（Argyris，1955）做了很多能量原理与矩阵分析方面的研究，并于 1960 年与克尔西（Kelsey）一起发表了《结构分析的能量原理（Energy Theorems and Structural Analysis）》一书，为有限元法理论基础的建立做出了贡献：1956 年，特纳（Turner）、克拉夫（Clough）、马丁（Martin）和托普（Topp）等将刚架分析中的位移法扩展到弹性力学平面问题，并用于飞机的结构分析和设计。

1960 年，克拉夫第一次使用有限元法（Finite Element Method）这个称谓。此后，大量学者、专家开始使用这一方法来处理工程结构、流体、热传导、电磁学等问题。贝塞林（Besseling，1963）、卞学璜（Pian，1963、1969）等人将有限元法与弹性力学变分原理联系起来，为有限元法数学基础的建立做出了贡献。晋凯维奇（Zienkiewicz）和张佑启（Cheung）于 1967 年发表了世界上第一部有限元法的专著。

20 世纪 70 年代后，随着计算机技术的快速发展，有限元法得到了更充分的应用与发展，尤其是在非线性、流变性和振动等方面，都取得了长足的进展。欧登（Oden，1972）出版了世界上第一部非线性连续介质有限元法的专著。

到 20 世纪 90 年代，有限元法的理论得到了不断的完善和发展。主要体现在：建立了严格的数学和工程学基础；应用范围扩展到结构力学以外的

领域;收敛性得到进一步研究,形成了系统的误差估计理论;相应的有限元软件得到快速发展。目前,各种数值模拟软件公司出现强强联合,不断推出功能齐全、界面友好的系列软件,以满足解决复杂及大型装备产品的设计与制造难题。

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展也做出了许多贡献,其中比较著名的有:陈伯屏(结构矩阵方法)、钱令希(余能原理)、钱伟长(广义变分原理)、胡海昌(广义变分原理)、冯康(有限单元法理论)、唐立民(拟协调元)等。近几十年,我国在有限元应用及软件开发方面也做了大量的工作,取得了一定的成绩,只是和国外的成熟产品相比还存在较大的差距。

1.4 有限元分析方法的应用领域

有限元法已深入应用于许多领域,如静力分析、动力分析、破坏与寿命分析、电磁场分析、热传导分析、声场分析、耦合场分析和流体分析等。21世纪后,随着计算机技术及计算机辅助设计软件的不断发展,有限元法的工程应用越来越广泛,如汽车的车架车身结构与零件强度设计、碰撞安全性分析,复合材料的力学分析,载荷物体的静力学与动力学分析,载荷材料的变形分析与受力计算,部件接触时的力学分析,电力场、热力场等流体力学分析,建筑结构的力学分析,高层剪力墙的塑性动力分析,道路桥梁的裂纹分析,手术计算机辅助模拟与应用,武器结构受力与精确打击的动态研究等。由此可见,有限元理论借助于计算机技术的发展,将在从微观的材料和医学技术到大型的车船建筑等各个领域发挥越来越重要的作用。

第 2 章　有限元分析的基本原理及杆系结构的有限元分析

随着人类社会的发展，工程结构变得越来越复杂，不仅是几何形状越来越复杂，荷载等环境条件也越来越复杂。这些工程结构的物理场通常是以微分方程表示的，这意味着，人们要获得这些结构的物理力学性质，就必须能够求解这些微分方程。由于结构形状的复杂，这些微分方程的边界条件变得十分复杂，而荷载和环境条件的复杂又使得微分方程的非齐次项变得十分复杂，从而使解析法和传统的近似解法已无力解决这些复杂的问题。有限单元法正是在这样的需求下诞生的。

2.1　弹性力学基本方程

一点的应力、应变、位移状态可用该点的应力、应变、位移分量来表示（当然也可以用主应力、应力不变量来表示）。一点的应力状态如图 2-1 所示。注意，以下公式等号右侧是矩阵，不是张量。

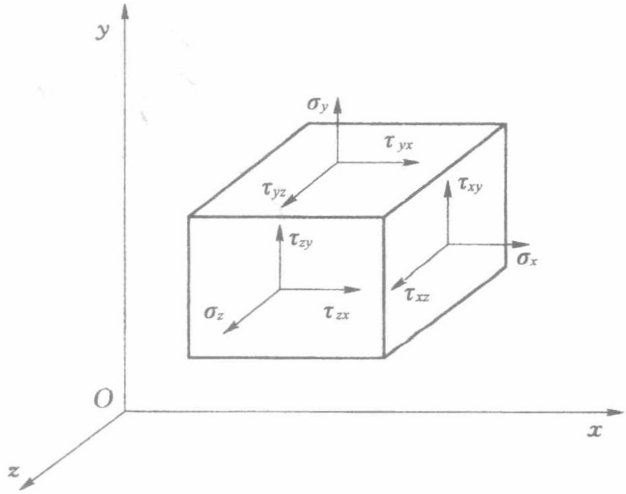


图 2-1　一点的应力状态

应力分量

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-1}$$

应变分量

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-2}$$

位移分量

$$\{f\}=[u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-3}$$

几何方程

$$\{\varepsilon\}=\left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-4}$$

弹性问题物理方程

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-1-5}$$

式中

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{1(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{1(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{1(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{2-1-6}$$

为弹性矩阵。

对于平面应力问题

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-7}$$

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-8}$$

$$\{\varepsilon\}=\left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-9}$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-1-10}$$

式中

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-1-11}$$

对于平面应变问题，只需将式(2-1-11)中的 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$，即可得到平面应变问题的物理方程。

2.2　能量变分原理

2.2.1　变分原理

变分原理就是求泛函的变分问题。所谓泛函，简单地讲，若把自变量的函数称为自变函数，则泛函就是自变函数的函数。如应力和应变是坐标的函数，是自变函数，而应变能是应力和应变的函数，应变能就是泛函。

假设 u 是一组坐标的连续函数，以函数 u 为自变函数，构造新的函数，则得到泛函

$$\Pi=\int_{\Omega}F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}E\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{2-2-1}$$

它是自变函数 u 及其导数的函数，F、E 是特定的微分算子。如果 u 是所求问题的真实解，则 u 使泛函 Π 对于自变函数任意微小的变化 δu 取驻值，即泛函的变分(变分运算法则类似微分运算法则)等于零：

$$\delta\Pi=0 \tag{2-2-2}$$

这就是变分原理。相对于问题的微分方程提法，变分原理也称为问题的泛函变分提法。问题的泛函可通过微分方程等效积分的弱形式或其他方式得到，如弹性问题的势能就是一种泛函，它可由平衡微分方程和边界条件的等效积分的弱形式得到，见虚位移原理的证明过程。而问题的求解就是基于变分原理寻求使泛函取驻值的函数。显然，问题的微分方程表达与泛函变分表达具有等价性。但是，必须注意并不是所有问题都能建立起相应的泛函，即使问题的微分方程表达存在。

2.2.2　势能变分原理

对于弹性问题，系统总势能就是一种泛函，如式(2-2-3)。

$$\Pi = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\varepsilon_0 + \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_0\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}(Xu + Yv + Zw)\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}(\overline{X}u + \overline{Y}v + \overline{Z}w)\,\mathrm{d}\Gamma \tag{2-2-3}$$

势能变分原理是指，在所有满足边界条件的可能位移中，那些满足平衡方程的真实位移使物体势能泛函取驻值，即势能的变分为零：

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \tag{2-2-4}$$

此式也称为变分方程。对于线性弹性体，势能取最小值，即

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U - \delta^2 W \geqslant 0 \tag{2-2-5}$$

此时的势能变分原理就是著名的最小势能原理。其物理意义就是在自然状态下系统势能总是趋于最小化，这是一个普遍的物理规律。

最小势能原理很容易证明。假设位移分量发生了满足边界条件所容许的微小改变，即虚位移或位移变分 δu，δv，δw 变为

$$u^* = u + \delta u,\ v^* = v + \delta v,\ w^* = w + \delta w \tag{2-2-6a}$$

称为可能位移。将可能位移代入式(2-2-3)考察系统势能的变化(为了简便，假设不存在初应力和初应变)，并注意相应的应变分量，则对应可能位移的势能为

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varepsilon^{*\mathrm{T}}D\varepsilon\cdot\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}(Xu^* + Yv^* + Zw^*)\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma}(\overline{X}u^* + \overline{Y}v^* + \overline{Z}w^*)\,\mathrm{d}\Gamma \\ &= \Pi + \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi\end{aligned} \tag{2-2-6b}$$

其中，$\delta\Pi$、$\delta^2\Pi$ 分别是系统势能的一阶变分和二阶变分，其表达式如下：

$$\delta\Pi = \int_{\Omega}\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma}(\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)\,\mathrm{d}\Gamma$$

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\delta\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega \tag{2-2-6c}$$

根据泛函驻值条件，一阶变分 $\delta\Pi = 0$。考虑到应变能的非负性，即二阶变分 $\delta^2\Pi$ 非负，由式(2-2-6c)知

$$\Pi^* - \Pi \geqslant 0 \tag{2-2-7}$$

上式说明满足位移边界条件的所有可能位移所对应的势能总是不小于真实位移所对应的势能，即真实位移使系统总势能取最小值，最小势能原理得证。

比较虚功原理

$$\int_{\Omega}\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}\delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma}\delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\mathrm{d}\Gamma \tag{2-2-8}$$

由最小势能原理式(2-2-4)可知，势能变分原理与虚功原理是完全等价的。同时，通过运算，还可以由最小势能原理(或虚功原理)导出弹性体的微分平衡方程与应力边界条件。这说明最小势能原理或虚功原理都可以代替平衡微分方程与应力边界条件，用于描述弹性体的平衡状态，只是前者是基于能量的描述，后者是基于力的平衡。

2.3　虚功原理

虚功原理是能量原理中的一个基本原理，它包括虚位移原理和虚应力原理。虚位移原理是建立在真实的力系和虚设的位移基础上的，因此，适用于求解力系的平衡问题。而虚应力原理是建立在真实的位移和虚设的力系基础上的，因此，适用于求解系统的变形问题。在理论力学中，虚位移原理用于求解刚体系统的静平衡问题，我们称其为“刚体虚位移原理”，它只是平衡方程的另一种表现形式，因此，只适用于求解静定结构的未知力。而当我们需要计算结构的变形或位移时，就必须依赖于弹性体的虚功原理。

弹性体的虚功原理可表述为：弹性体中一组平衡的力系在任意满足协调条件的变形状态上所做的虚功等于零，体系的外力虚功与内力虚功之和等于零。

为了计算弹性体的内力虚功，我们先介绍几个与内力虚功有关的概念。

2.3.1　功和余功

功的概念是大家所熟悉的，它是力对物体作用效果的度量。对于定常力作用下的刚体，功等于力与刚体位移的内积。而对于弹性体，由于弹性体抵抗变形的能力随变形的增大而增大，因此，力在弹性体变形过程中是连续变化的，如图 2-2 所示。

根据功的定义，不难写出图 2-2 所示系统的外力 P 在位移 $\mathrm{d}u$ 上所做的功：

$$\mathrm{d}W = P\mathrm{d}u \tag{2-3-1}$$

则力 P 在位移 u_1 上的功为

$$W = \int_0^{u_1} P\mathrm{d}u \tag{2-3-2}$$

式(2-3-2)的积分等于图 2-2 中曲线 OA 下的面积 OAB 。而曲线 OA 上的面积 OAC 则为力 P 的余功，即：

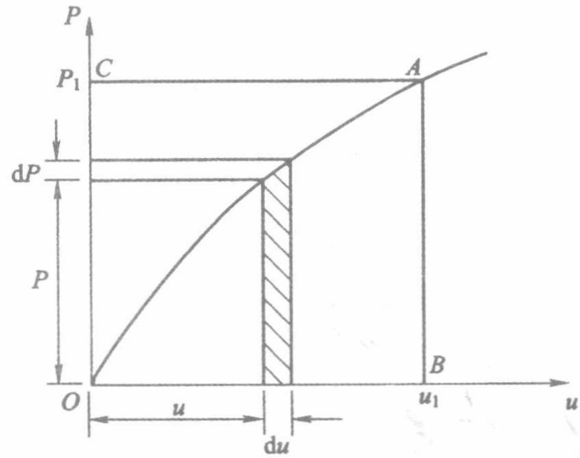


图 2-2　功和余功示意图

$$W^{*} = \int_{0}^{P_1} P\,\mathrm{d}u \tag{2-3-3}$$

对于线弹性系统，由图 2-3 可知：

$$W = \int_{0}^{u_1} P\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} P\,\mathrm{d}u_1 = \frac{1}{2} P_1\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{P_1} u\,\mathrm{d}P = W^{*} \tag{2-3-4}$$

即线弹性系统的功和余功相等。

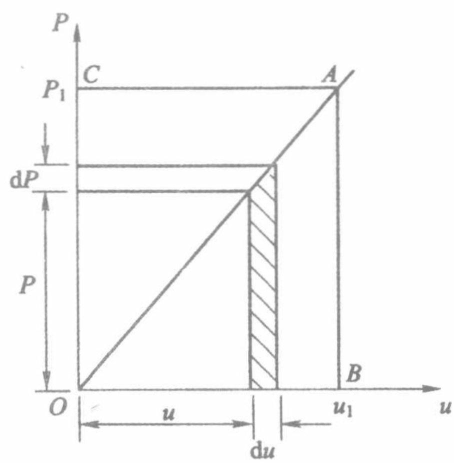


图 2-3　线弹性系统的功和余功示意图

2.3.2　应变能与应变余能

应变能和余能可以用与功和余功相同的方式来说明，如图 2-4 和图 2-5 所示。工程应力应变曲线就是材料的荷载位移曲线，因此，图 2-4 和图 2-5