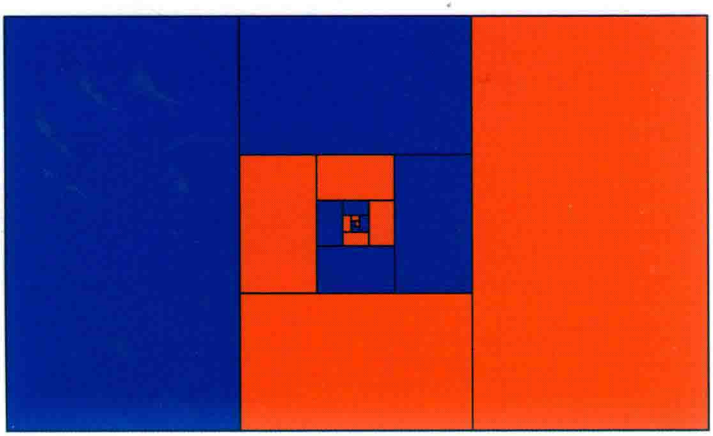
理性派

数学写真集（第4季）

——直观思考的进阶

[美] 罗杰 B. 尼尔森（Roger B. Nelsen） 著

管涛　顾森　范兴亚　程晓亮　朱一心　译



$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{2};$$

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

MAA PRESS
An imprint of the American Mathematical Society

数学写真集（第 4 季）
——直观思考的进阶

[美] 罗杰 B. 尼尔森（Roger B. Nelsen） 著
管 涛 顾 森 范兴亚 程晓亮 朱一心 译

机械工业出版社

本书由近百个“无字证明”组成。无字证明（Proofs Without Words）也叫作“无需语言的证明”，一般是指仅用图像而无需语言解释就能不证自明的数学结论。无字证明往往是指一个特定的图片，有时也配有少量解释说明。本书正是因为图片丰富而趣味十足，所以取名为数学写真集。

本书是数学爱好者的休闲读物，也是中学生和大学生的课外参考书，还是数学教师的教学素材。

图书在版编目（CIP）数据

数学写真集. 第 4 季，直观思考的进阶/(美）罗杰 B. 尼尔森（Roger B. Nelsen）著；管涛等译. —北京：机械工业出版社，2017.3

书名原文：Proofs Without Words Ⅲ：Further Exercises in Visual Thinking

ISBN 978-7-111-56168-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①罗…　②管…　Ⅲ.①数学-通俗读物
Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 037088 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
责任校对：陈　越　封面设计：路恩中
责任印制：孙　炜
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 12.5 印张 · 184 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-56168-2
定价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金 书 网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

前言

一个无趣的证明可以用一个几何类比作为一个补充，这样定理的优美性和正确性几乎瞥一眼就能看得到。——马丁·加德纳

在美国数学协会1993年出版《数学写真集（第1季）—无需语言的证明》后的一年，威廉·德汉姆在他的《数学领域——一次按字母顺序排列的伟大证明、问题及知名学者的数学之旅》一书中写道：

> 数学家欣赏的证明是灵巧的，但是数学家特别欣赏的证明是既灵巧又经济的。这些证明仅需很少的论证，而即使是这些很少的论证也能够直接指向问题的核心，并且一针见血地达到证明的目标。这样的证明确实是优美的。
>
> 数学的优美不同于其他创意的活动。它和莫奈用很少且灵巧的绘画技巧在帆布上描绘出法国的风景有些类似，也和用三行俳句诗去描绘出比其语言能够达到的多得多的意境类似。优美的极致是艺术而非数学性质。
>
> 一种被数学家们叫作“无字证明”的东西就能实现极致的优美。在“无字证明”中富有启发意义的构图立刻传递一种证明而不需要任何解释，这种感觉让人感到再优美不过了。

自从上述书籍出版后，第二个合集《数学写真集（第2季）—无需语言的证明》由美国数学协会于2000年出版，而本书是“无字证明”的第三本合集。㊀我必须承认，这本书像前两本一样，必然是不完整的。它并没有包含从第二本合集出版以来的所有的无字证明，也没有包括前两本写真集中忽略的全部。作为美国数学协会期刊的读者，我们深知，新的无字证明在纸媒上出现得很频繁，而且现在还会在互联网上以一种纸媒更优越的形式出现，它可以动还可以与读者交互。

㊀ 本书为作者罗杰 B. 尼尔森编的第三本无字证明，翻译为中文纳入数学写真集（第4季）——编辑注

我希望阅读这本合集的读者在发现或者重拾某些数学思想的直观展示的过程中能享受到乐趣。我希望老师们能将书中的内容与学生们分享，我希望每个人都能受到激励和鼓舞，去创造新的无字证明。

致谢：在此我想表达我对贡献无字证明这种数学文化的人们的感谢与感激，他们的名字在本书的第184～187页。没有他们，这本书是不可能存在的。感谢苏珊·斯特普尔斯和她的课堂教学资源团队细心地阅读本书的初稿并提出了许多有益的建议。同时在本书出版过程中也必须感谢美国数学协会的出版人员卡罗尔·巴克斯特、贝弗利·鲁埃迪和萨马莎·韦伯的鼓励、建议以及努力的工作。

罗杰 B. 尼尔森（Roger B. Nelsen）
路易克拉克大学
俄勒冈州　波特兰

原书作者注：1. 为了形成一个统一的外观，书中所有图形重新描绘过。在一些例子中标题改变了，并且为了更清楚，增加（减少）了一些阴影和符号。在这一过程中的任何错误都是我的责任。

2. 我们用不同的罗马数字区分同一个定理不同的无字证明，而且这种编号次序从《数学写真集（第1季）—无需语言的证明》和《数学写真集（第2季）—无需语言的证明》一直沿用。比如，毕达哥拉斯定理在第1季中有6个，在第2季中还有几个，这个定理在本书中从毕达哥拉斯定理XIII开始编号。

3. 有些无字证明是以数学竞赛，比如普特南数学竞赛、哈萨克斯坦国家数学竞赛中的问题与解的形式给出的。但是，具体用这种解法能得多少分我们不能确定。因为，在数学竞赛中，比方说普特南数学竞赛中，要求选手将证明的每个必要步骤都说清楚才能获得满分。

目　录

前言

几何与代数 …… 1

毕达哥拉斯定理XⅢ …… 3

毕达哥拉斯定理XⅣ …… 4

毕达哥拉斯定理XⅤ …… 5

毕达哥拉斯定理XⅥ …… 6

毕达哥拉斯定理的帕普斯推广 …… 7

毕达哥拉斯定理的倒数形式 …… 8

一个类似于毕达哥拉斯定理的定理 …… 9

四个类似于毕达哥拉斯定理的定理 …… 10

直角梯形的毕达哥拉斯定理 …… 14

缺角矩形的毕达哥拉斯定理 …… 15

海伦公式 …… 16

每个三角形有无穷多个内接等边三角形 …… 17

每个三角形可以被分割成 6 个等腰三角形 …… 18

更多的等腰分割 …… 19

维维安尼定理Ⅱ …… 20

维维安尼定理Ⅲ …… 21

托勒密定理Ⅰ …… 22

托勒密定理Ⅱ …… 23

平行四边形分割中的相等面积 …… 24

内部正方形的面积 …… 25

平行四边形定律 …… 26

借助平行四边形定律得到三角形中线长公式 …… 27

两个正方形和两个三角形 …… 28

等边三角形内切圆半径 …… 29

通过三角形内心的直线 …… 30

三角形的面积和外接圆的半径 …… 31

外围三角形之外…… 32
和为45°的角 …… 33
三等分线段Ⅱ …… 34
面积和恒定的两个正方形…… 35
面积和恒定的四个正方形…… 36
圆里和半圆里的正方形…… 38
圣诞树问题…… 39
“鞋匠之刀”的面积 …… 40
“盐窖”的面积 …… 41
直角三角形的面积…… 42
正十二边形的面积Ⅱ …… 43
四个月牙形的面积之和等于一个正方形的面积…… 44
月牙形和正六边形…… 45
三棱锥的体积…… 46
代数式的面积Ⅳ …… 47
合比与分比——一个关于比例的定理…… 48
配成完全平方Ⅱ …… 49
坎迪多恒等式…… 50
三角、微积分与解析几何…… 51
两角和或差的正弦（通过正弦定理证明） …… 53
两角差的余弦Ⅰ …… 54
两角和的正弦Ⅳ以及两角差的余弦Ⅱ …… 55
二倍角公式Ⅳ …… 56
欧拉正切半角公式…… 57
三倍角的正弦、余弦公式Ⅰ …… 58
三倍角的正弦、余弦公式Ⅱ …… 59
15°角和75°角的三角函数 …… 60
18°角及其整倍数的三角函数 …… 61
莫尔韦德等式Ⅱ …… 62
一般三角形中的牛顿公式…… 63
三角形的一个正弦恒等式…… 64
正余函数之和…… 65
正切定理Ⅰ …… 66
正切定理Ⅱ …… 67

想找 $x+y=xy$ 的一组解？ …… 68
$\sec x+\tan x$ 的一个恒等式 …… 69
正切乘积的和…… 70
三个正切的和与积…… 71
正切的乘积…… 72
反正切的和Ⅱ …… 73
一个图形，五个反正切恒等式…… 74
赫顿和斯特拉尼斯基公式…… 75
一个反正切恒等式…… 76
欧拉反正切恒等式…… 77
函数 $a\cos t+b\sin t$ 的极值 …… 78
最小面积问题…… 79
正弦的导数…… 80
正切的导数…… 81
一个极限的几何求值Ⅱ …… 82
一个数及其倒数的对数…… 83
单位双曲线围出的等面积区域…… 84
魏尔斯特拉斯替换法Ⅱ …… 85
看，无需换元！ …… 86
自然对数的积分…… 87
$\cos^2\theta$ 和 $\sec^2\theta$ 的积分…… 88
一个部分分式分解…… 89
积分变换…… 90
不等式…… 91
算术平均-几何平均不等式Ⅶ …… 93
算术平均-几何平均不等式Ⅷ（通过三角函数证明） …… 94
算术平均-平方平均不等式 …… 95
柯西-施瓦茨不等式Ⅱ（用帕普斯定理*） …… 96
柯西-施瓦茨不等式Ⅲ …… 97
柯西-施瓦茨不等式Ⅳ …… 98
柯西-施瓦茨不等式Ⅴ …… 99
关于直角三角形各种半径的不等式 …… 100
托勒密不等式 …… 101
代数不等式Ⅰ …… 102

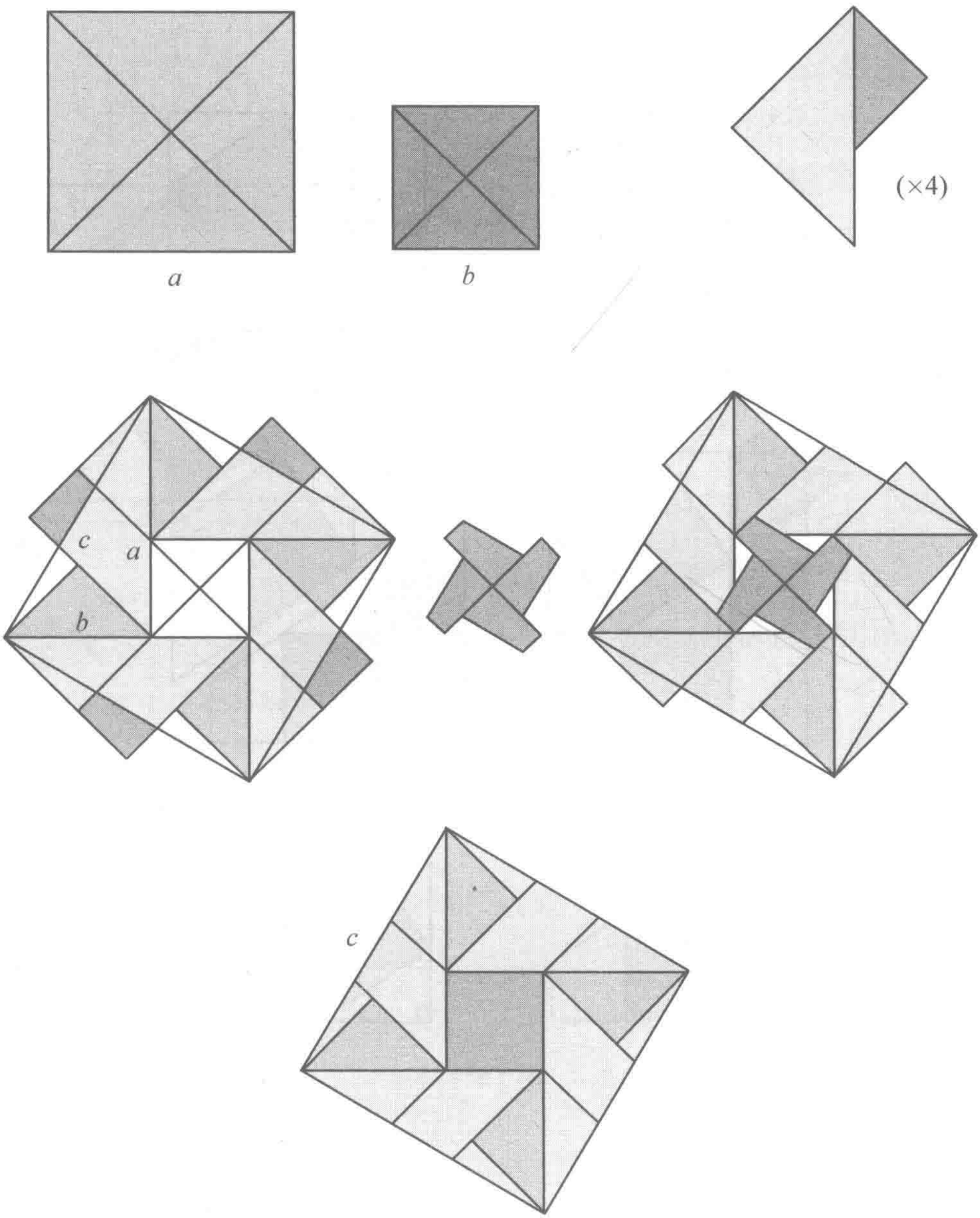
代数不等式Ⅱ …… 103
正弦在[0,π]上的次可加性 …… 104
正切在[0,π/2)上的超可加性 …… 105
和为1的两个数的不等式 …… 106
帕多阿不等式 …… 107
与e有关的斯坦纳问题 …… 108
辛普森悖论 …… 109
马尔可夫不等式 …… 110
整数与整数求和 …… 111
奇数和Ⅳ …… 113
奇数和Ⅴ …… 114
奇数的交错和 …… 115
平方和Ⅹ …… 116
平方和Ⅺ …… 117
连续平方数的交错和 …… 118
奇数平方的交错和 …… 119
阿基米德平方和公式 …… 120
通过数三角形计算平方和 …… 121
平方数模3 …… 122
二阶阶乘的和 …… 123
把立方数表示为二重求和 …… 124
把立方数表示为等差数列的和 …… 125
立方和Ⅷ …… 126
连续立方数的差模6余1 …… 127
斐波那契恒等式Ⅱ …… 128
斐波那契地砖 …… 129
斐波那契梯形 …… 130
斐波那契三角形和梯形 …… 131
斐波那契数的平方与立方 …… 132
每个八边形数是两个平方数的差 …… 133
2的幂 …… 134
4的幂的和 …… 135
通过自相似证明 n 的连续幂的和 …… 136
每个大于1的四次幂都等于两个不连续三角形数的和 …… 137

三角形数的和V …… 138
三角形数的交错和Ⅱ …… 139
一串又一串的三角形数 …… 140
每第三个三角形数的和 …… 141
隔项奇数和与三角形数的和 …… 142
三角形数是二项式系数 …… 143
关于三角形数的容斥公式 …… 144
分拆三角形数 …… 145
三角形数恒等式Ⅱ …… 146
三角形数的一个和式 …… 147
带权重的三角形数的和 …… 148
中心三角形数 …… 149
雅各布斯塔尔数 …… 150
无穷级数及其他议题 …… 151
几何级数V …… 153
几何级数Ⅵ …… 154
几何级数Ⅶ（通过直角三角形证明） …… 155
几何级数Ⅷ …… 156
几何级数Ⅸ …… 157
几何级数的导数Ⅱ …… 158
几何裂项 …… 159
交错级数Ⅱ …… 160
交错级数Ⅲ …… 161
交错级数审敛法 …… 162
交错调和级数Ⅱ …… 163
伽利略比值Ⅱ …… 164
把筝形裁成扇形 …… 165
非负整数解与三角形数 …… 166
分割蛋糕 …… 167
可重复的无序选择的数目 …… 168
一道普特南数学竞赛题的无字证明 …… 169
毕达哥拉斯三元组 …… 170
毕达哥拉斯四元组 …… 171
$\sqrt{2}$的无理性 …… 172

$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 是可数集 …… 173
前 n 个整数的图论式求和 …… 174
二项式系数的图论式分解 …… 175
(0,1)和[0,1]有相同的势 …… 176
不动点定理 …… 177
在空间中，四种颜色是不够的 …… 178
文献索引 …… 179
英文人名索引 …… 184
中文人名索引 …… 186

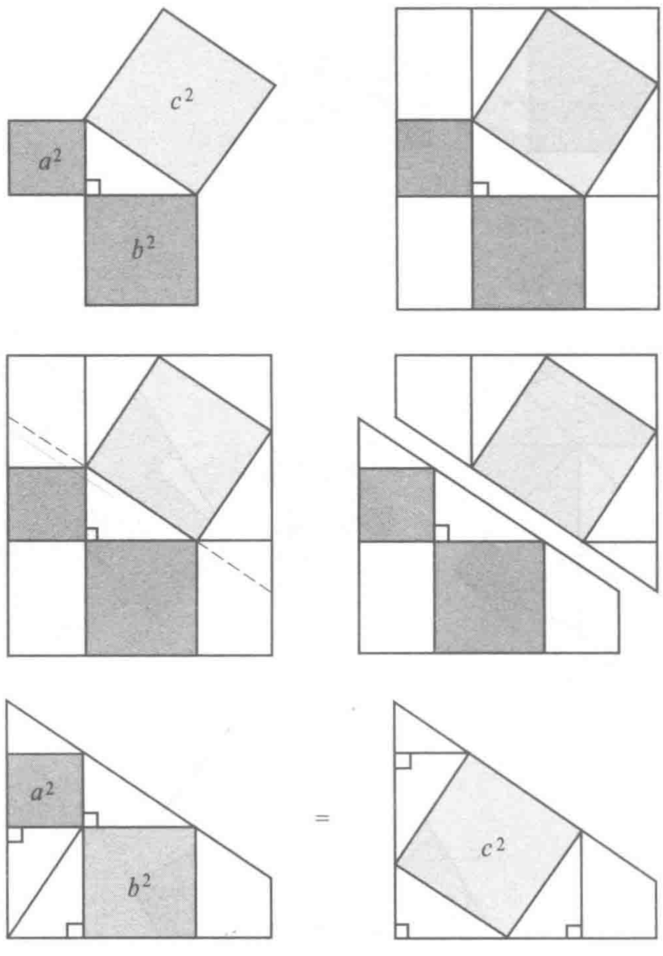
几何与代数

毕达哥拉斯定理 XIII



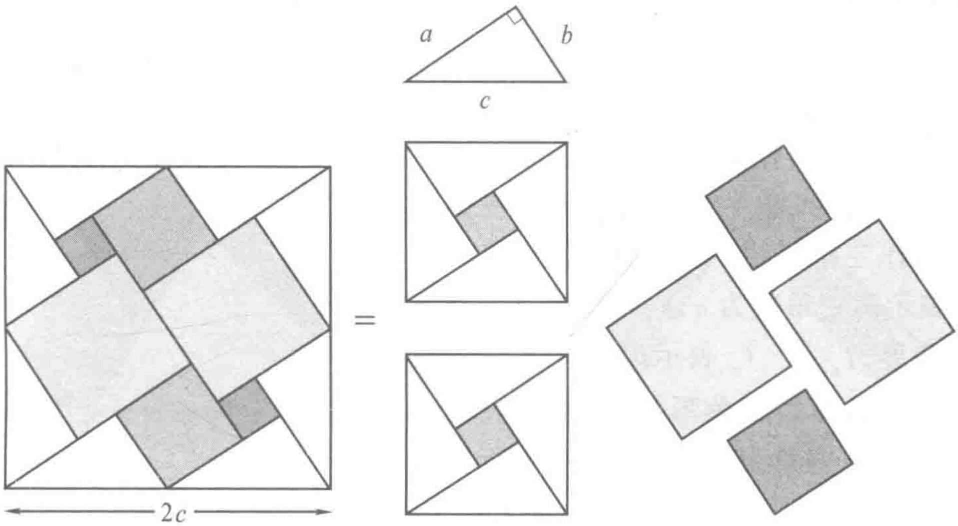
——乔斯 A. 戈麦斯(José A. Gomez)

毕达哥拉斯定理 XIV



$a^2+b^2=c^2$.

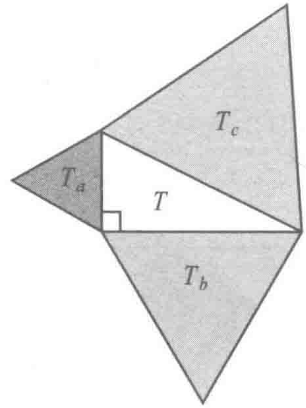
毕达哥拉斯定理XV



$$(2c)^2 = 2c^2 + 2a^2 + 2b^2$$
$$\therefore c^2 = a^2 + b^2.$$

——许南谷(Nam Gu Heo)

毕达哥拉斯定理XVI



毕达哥拉斯定理(《几何原本》第Ⅰ卷命题47)通常是用直角三角形每条边向外作正方形表示的.

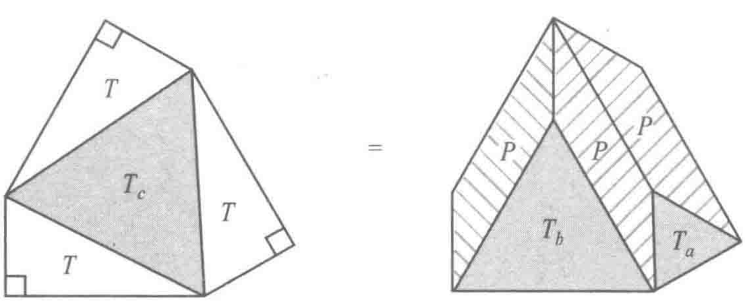
事实上,根据《几何原本》第Ⅵ卷命题31,向外作任意三个相似的多边形都是可以的,例如,右图就是用直角三角形向外作三个等边三角形得到的.我们用T表示两直角边为a、b,斜边为c的直角三角形,T_a、T_b、T_c表示以边a、b、c分别向外作的等边三角形的面积.P表示边长为a、b,内角为30°和150°的平行四边形的面积.我们有:

1. $T=P$.

证明:

2. $T_c=T_a+T_b$.

证明:



——克劳迪·阿尔西纳,罗杰 B. 尼尔森.(Claudi Alsina & RBN)